Tongbu Zhuanti Tupo

同步专题突破

Chaoji Ketang

新课标

超级课堂

丛书主编/王后雄　本册主编/马春华

高中数学 2-1 (选修)

- 考点分类例析
- 方法视窗导引
- 防错档案预警
- 专题优化测训

華中師範大學出版社

新课标

Tongbu Zhuanti Tupo

同步专题突破

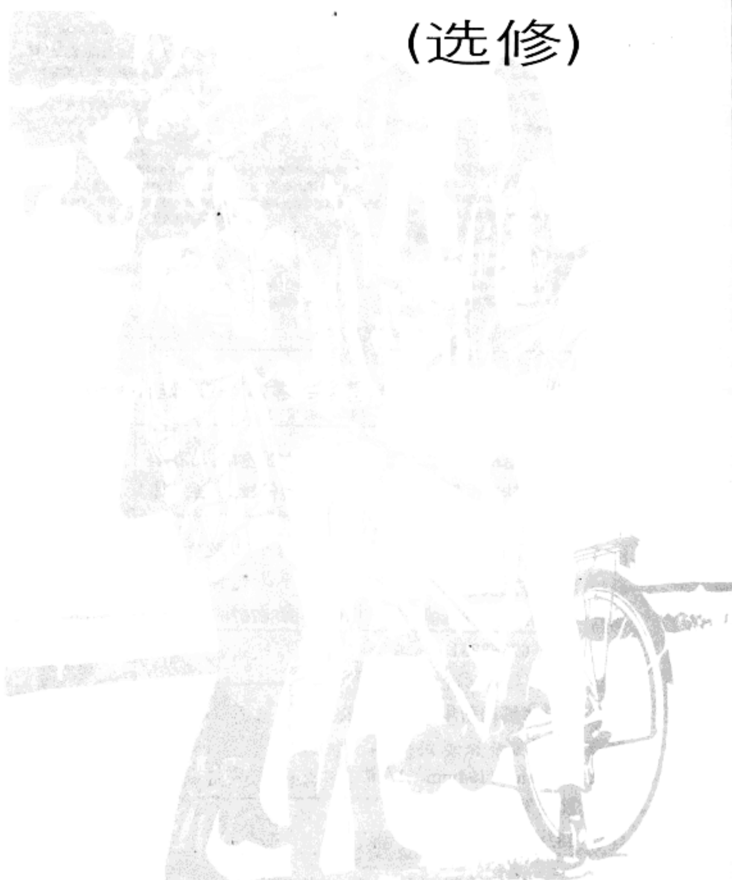
丛书主编/王后雄　本册主编/马春华

超级课堂

高中数学

2-1

(选修)



華中師範大學出版社

新出图证(鄂)字10号
图书在版编目(CIP)数据
同步专题突破超级课堂 高中数学2-1(选修)丛书主编:王后雄.本册主编:马春华
—武汉:华中师范大学出版社,2009.8
ISBN 978-7-5622-3895-9
Ⅰ.同… Ⅱ.①王… ②马… Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料
Ⅳ.G634
中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第043443号

同步专题突破超级课堂 高中数学2-1(选修)

丛书主编:王后雄 本册主编:马春华
责任编辑:张桂娜 陈 兰 责任校对:王 炜 封面设计:甘 英
选题设计:第一编辑室(027-67867361)
出版发行:华中师范大学出版社 ©
社址:湖北省武汉市珞喻路152号
销售电话:027-67863040 027-67867076 027-67867371 027-67861549
传真:027-67863291 邮购:027-67861321
网址:http://www.ccnupress.com 电子信箱:hscbs@public.wh.hb.cn
印刷:湖北省鄂南新华印务有限公司 督印:章光琼
字数:282千字
开本:889mm×1194mm 1/16 印张:10
版次:2009年8月第1版 印次:2009年8月第1次印刷
定价:18.80元

《同步专题突破超级课堂》使用图解

课标解读

呈现新课程标准内容要素，锁定不同版本教材要求，指明学习和考试的具体目标。

学法导引

注重学法点拨和考试方法指导，揭示学习重点和难点，探讨考试命题规律。

考点例析

考点分类、核心总结，要点重点各个击破，典例创新引导，首创分类解析导解模式。

变式跟踪

案例学习迁移，母题多向发散，预测高考可考变式题型，层层剖析深入变式训练。

超级链接

最佳导学模式，学案式名师点津。方法视窗、规律清单、防错档案，革新传统学习模式。

优化测训

学业水平测试、高考水平测试，习题层级清晰，水平测试立足教材、夯实基础，高考真题再现，提升解题能力。

解题依据

首创解题线索助学模式。当你解题失误或解题缺乏思路时，解题依据教你回归考点知识和例题启示。

答案提示

提示解题思路，突破解析模式，规范标准答案，全程帮助你对照思路、比照答案、减少失误、赢得高分。

同步专题突破超级课堂 高中数学2-1（选修）

编委会

目 录

板块一 常用逻辑用语

第1讲 命题及其关系

课标解读

1. 理解命题的概念.

(1)了解命题的概念,会用两个条件判断一个语句是否是命题.

(2)能正确指出已知命题的条件和结论,会将已知命题写成"若 p,则 q"的形式.

(3)会判断一些简单命题的真假,并能掌握用举反例的方法来判断某一命题为假命题.

2. 了解"若 p,则 q"形式的命题的逆命题、否命题与逆否命题,会分析四种命题的相互关系.

(1)了解命题的四种形式,会根据已知命题写出逆命题、否命题与逆否命题.

(2)理解并掌握四种命题之间的关系,对给出的命题,会运用四种命题的相互关系来予以处理.

3. 体会逻辑用语在表述和论证中的作用,并能自觉地将这些逻辑用语正确地用于数学学习和日常生活的交流之中.

学法导引

1. 四种命题反映出命题之间的内在联系,要注意结合实际问题,理解其关系(尤其是两种等价关系)的产生过程,关于逆命题、否命题与逆否命题,也可以叙述为:

(1)交换命题的条件和结论,所得的新命题就是原来命题的逆命题;(2)同时否定命题的条件和结论,所得的新命题就是原来的否命题;(3)交换命题的条件和结论,并且同时否定,所得的新命题就是原命题的逆否命题.

2. 学习时主要弄清四种命题之间的逻辑关系,培养判断命题真假的能力,尤其注意反证法证题的步骤技巧,并用它来证明某些命题.关键是记熟这四种命题条件、结论之间的关系及真假关系.

考点分类例析

考点1 判断语句是否为命题

核心总结

我们把用语言、符号或式子表达的,可以判断真假的语句叫做命题.其中,判断为真的语句叫做真命题,判断为假的语句叫做假命题.

考题1 下列语句中是命题的有______.

①"等边三角形难道不是等腰三角形吗?";

②"垂直于同一条直线的两条直线必平行吗?";

③"一个数不是正数就是负数";

④"大角所对的边大于小角所对的边";

⑤"$x+y$ 为有理数,则 x、y 也都是有理数";

⑥"作$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$".

【解析】 先根据命题的概念,判断是否是命题,若是,再判断真假.

①通过反意疑问句,对等边三角形是等腰三角形作出判断,是真命题.

②疑问句.没有对垂直于同一直线的两条直线是否平行作出判断,不是命题.

③是假命题.数0既不是正数也不是负数.

④是假命题.没有考虑在同一个三角形中.

⑤是假命题.如 $x=\sqrt{3}$,$y=-\sqrt{3}$.

方法视窗

1. 并不是任何语句都是命题,只有那些能判断真假的语句才是命题.一般来说,开语句、疑问句、祈使句、感叹句都不是命题.如陈述句"π是有理数",反意疑问句"难道矩形不是平行四边形吗?"都叫命题;而祈使句"求证$\sqrt{2}$是无理数",疑问句"π是无理数吗?",感叹句"向抗洪英雄学习!"就不是命题.

2. 要判断一个语句是不是命题,关键是看它是否符合"可以判断真假"这个条件.

⑥祈使句，不是命题.

故填①③④⑤.

【变式 1.1】 下列语句不是命题的是(　　).

A. 地球是太阳系的行星　　B. 等腰三角形两底角相等

C. 今天会下雪吗　　D. 正方形的内角均为直角

考点 2　命题的结构

核心总结

在数学中，具有“若 p，则 q”这种形式的命题是常见的. 我们把这种形式的命题中的 p 叫做命题的条件，q 叫做命题的结论.

数学中有一些命题虽然表面上不是“若 p，则 q”的形式，但是把它的表述作适当的改变，也可以写成“若 p，则 q”，“如果 p，那么 q”，“只要 p，就有 q”等形式.

考题 2　将下列命题改写成“若 p，则 q”的形式，并判断命题的真假.

(1)到线段两端点距离相等的点在线段的垂直平分线上；

(2)实数的平方为正数.

【解析】 (1)若一个点到已知线段两个端点的距离相等，则这个点在这条线段的垂直平分线上，为真命题.

(2)若一个数为实数，则它的平方是正数，为假命题，因为 $0^2=0$.

【变式 2.1】 把下列命题改写成“若 p，则 q”的形式，并判断命题的真假.

(1)当 $ac>bc$ 时，$a>b$；

(2)已知 x、y 为正整数，当 $y=x+1$ 时，$y=3$，$x=2$；

(3)当 $m>\frac{1}{4}$ 时，$mx^2-x+1=0$ 无实根；

(4)当 $abc=0$ 时，$a=0$ 或 $b=0$ 或 $c=0$；

(5)当 $x^2-2x-3=0$ 时，$x=3$ 或 $x=-1$.

方法视窗

1. 对于简缩了的数学命题，通常条件与结论都不太明显，在改写时，应先分清条件与结论，然后用清晰流畅的语句写成“若 p，则 q”的形式.

2. 当有些命题用文字语言不易表述时，可以改用数学语言来表述，如考题 2(2)可改写为“若 $a\in\mathbf{R}$，则 $a^2>0$”.

3. (1)任何一个命题都有条件和结论，一般地，条件由 p 表示，结论由 q 表示，故命题都可以写成“若 p，则 q”；(2)找准条件和结论.

考点 3　四种命题

核心总结

1. 四种命题的概念

一般地，用 p 和 q 分别表示原命题的条件和结论，用 $\neg p$ 和 $\neg q$ 分别表示 p 和 q 的否定，于是四种命题的形式就是：

原命题：若 p，则 q；　逆命题：若 q，则 p；　否命题：若 $\neg p$，则 $\neg q$；　逆否命题：若 $\neg q$，则 $\neg p$.

2. 四种命题的关系

四种命题以及它们之间的关系如图 1-1 所示：

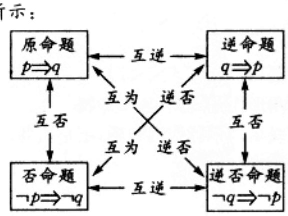


图 1-1

○ **考题3**　“已知a、b为实数，当$x^2+ax+b\leqslant 0$有非空解集时，则$a^2-4b\geqslant 0$”．写出该命题的逆命题和否命题，并判断其真假．

【解析】　逆命题：已知a、b为实数，若$a^2-4b\geqslant 0$，则$x^2+ax+b\leqslant 0$有非空解集．此命题为真．

否命题：已知a、b为实数，若$x^2+ax+b>0$有非空解集（或$x^2+ax+b\leqslant 0$无非空解集），则$a^2-4b<0$．此命题为假．

○ **考题4**　命题：“已知a、b、c、d是实数，若$a=b$，$c=d$，则$a+c=b+d$”．写出该命题的逆命题、否命题、逆否命题．

【解析】　由定义分别写出，要注意否定词的应用．

逆命题：已知a、b、c、d是实数，若$a+c=b+d$，则$a=b$，$c=d$．

否命题：已知a、b、c、d是实数，若a与b，c与d不都相等，则$a+c\neq b+d$．

逆否命题：已知a、b、c、d是实数，若$a+c\neq b+d$，则a与b、c与d不都相等．

【变式3.1】　设原命题为“已知a、b是实数，若$a+b$是无理数，则a、b都是无理数”，写出它的逆命题、否命题、逆否命题．

方法视窗

1．在判断四种命题之间的关系时，首先要注意分清命题的条件与结论，再比较每个命题的条件与结论之间的关系．

2．分析出原命题的条件和结论：(1)交换条件和结论得逆命题；(2)否定条件和否定结论得否命题；(3)交换条件和结论，并且同时否定得逆否命题．

防错档案

1．易错点

在改写命题时忽视命题的条件和大前提．

2．防错良方

明确大前提不作为条件，改写命题时大前提不变．如考题3中“a、b为实数”是大前提，改写各种命题时大前提不变，且“$x^2+ax+b\leqslant 0$有非空解集”为复合条件．

考点4　命题真假的判断

核心总结

1．一个命题真假的判断

一个命题要么真，要么假，二者必具其一．当一个命题改写成“若p，则q”的形式之后，判断这种命题真假的办法是：若由“p”经过逻辑推理得出“q”，则可判定“若p，则q”是真；判定“若p，则q”是假，只需举出一个反例即可．

2．四种命题的真假性的关系

原命题	逆命题	否命题	逆否命题
真	真	真	真
真	假	假	真
假	真	真	假
假	假	假	假

由于逆命题和否命题也是互为逆否命题，因此四种命题的真假性之间有如下关系：

(1)两个命题互为逆否命题，它们有相同的真假性；

(2)两个命题为互逆命题或互否命题，它们的真假性没有关系．

在同一个命题的四种命题中，真命题的个数要么是0个，要么是2个，要么是4个．

○ **考题5**　（2005，天津）给出下列三个命题：

①若$a\geqslant b>-1$，则$\dfrac{a}{1+a}\geqslant\dfrac{b}{1+b}$；

②若正整数m和n满足$m\leqslant n$，则$\sqrt{m(n-m)}\leqslant\dfrac{n}{2}$；

③设$P_1(x_1,y_1)$为圆O_1：$x^2+y^2=9$上任一点，圆O_2以$Q(a,b)$为圆心且半径为1，当$(a-x_1)^2+(b-y_1)^2=1$时，圆O_1与圆O_2相切．

其中假命题的个数为(　　)．

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

方法视窗

1．命题真假判断的常用方法：

(1)判断命题的真假，可先写出命题，分清条件与结论，直接判断．

(2)如果不易判断，可根据互为逆否命题的两个命题是等价命题来判断．

2．运用定义法可直接判断命题是否符合定义形式，从而判断真假；逻辑推证法既

【解析】 ①方法 1 ∵ $a\geqslant b>-1$，∴ $a+1\geqslant b+1>0$.

∴ $\frac{a}{1+a}-\frac{b}{1+b}=\frac{a-b}{(1+a)(1+b)}\geqslant 0$. ∴ $\frac{a}{1+a}\geqslant\frac{b}{1+b}$. 故①为真命题.

方法 2 ∵ $f(x)=\frac{x}{1+x}=1-\frac{1}{1+x}$在$(-1,+\infty)$上为增函数，

∴ 当 $a\geqslant b>-1$ 时，$f(a)\geqslant f(b)$，即$\frac{a}{1+a}\geqslant\frac{b}{1+b}$. 故①为真命题.

②因为正整数 m、n 满足 $m\leqslant n$，有 $m>0$，$n-m\geqslant 0$，

由均值不等式有 $\sqrt{m(n-m)}\leqslant\frac{m+(n-m)}{2}=\frac{n}{2}$. 故②为真命题.

③的实质是 $P_1(x_1,y_1)$在$\odot O_1$ 上，又 $P_1(x_1,y_1)$也在$\odot O_2$ 上，但两圆相交于 P_1 并不能保证两圆相切. 故③为假命题.

故选 B.

可用来判定命题为真，也可用来判定命题为假；而举反例则是判定一个命题为假的最简单有效的办法. 考题 5 中对①的两种判定方法均属逻辑推证，③是指出其逻辑推证的错误，当然也可以举反例.

○ **考题 6** （2006，辽宁）给出下列四个命题：

①垂直于同一直线的两条直线互相平行；

②垂直于同一平面的两个平面互相平行；

③若直线 l_1、l_2 与同一平面所成的角相等，则 l_1、l_2 互相平行；

④若直线 l_1、l_2 是异面直线，则与 l_1、l_2 都相交的两条直线是异面直线.

其中假命题的个数是（　　）.

A. 1　　　　B. 2　　　　C. 3　　　　D. 4

【解析】 由异面直线的公垂线知①假；垂直于同一个平面的两个平面也可以相交，②假；设直线 l_1 交平面 α 于点 P，过点 P 作平面 α 的垂线 l，l_1 关于 l 的对称直线为 l_2，l_1、l_2 与 α 所成的角相等，但 $l_1\cap l_2=P$，③假；过异面直线公垂线上一点的直线可与两异面直线都相交，④假.

故选 D.

【变式 4-1】 判断命题“若 $a\geqslant 0$，则 $x^2+x-a=0$ 有实根”的逆否命题的真假.

考点 5　命题的证明

核心总结

1. 直接证明某一个命题为真命题有困难时，可以通过证明它的逆否命题为真命题，从而间接地证明原命题为真命题.
2. 间接证明方法：（1）反证法；（2）逆否证法.

○ **考题 7** 已知函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上是增函数，a、$b\in\mathbf{R}$，对命题“若 $a+b\geqslant 0$，则 $f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$”.

写出其逆否命题，判断其真假，并证明你的结论.

【解析】 逆否命题：若 $f(a)+f(b)<f(-a)+f(-b)$，则 $a+b<0$，为真命题.

∵ 一个命题与它的逆否命题有相同的真假性，

∴ 可证明原命题为真命题.

∵ $a+b\geqslant 0$，∴ $a\geqslant -b$，$b\geqslant -a$.

又∵ $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上是增函数.

∴ $f(a)\geqslant f(-b)$，$f(b)\geqslant f(-a)$.

规律清单

1. 反证法与逆否证法：

(1) 反证法的步骤

①假设命题的结论不成立，即假设结论的反面成立；

②从这个假设出发，经过推理论证，得出矛盾；

③由矛盾判定假设不成立，从而肯定命题的结论成立.

∴ $f(a)+f(b)\geq f(-a)+f(-b)$.
∴ 逆否命题为真.

考题 8 若 $a^2+b^2=c^2$，则 a、b、c 不可能都是奇数.

【证明】 假设 a、b、c 都是奇数.
设 $a=2m-1$，$b=2n-1$，$c=2k-1$，m、n、$k\in \mathbf{Z}$.
则 $a^2+b^2=(2m-1)^2+(2n-1)^2=2(2m^2+2n^2-2m-2n+1)$ 为偶数，
而 $c^2=(2k-1)^2=4(k^2-k)+1$ 为奇数，
∴ $a^2+b^2\neq c^2$. 这与题设 $a^2+b^2=c^2$ 矛盾.
∴ a、b、c 不可能都是奇数.

【变式 5-1】 (2006，上海)在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 与曲线 $y^2=2x$ 相交于 A、B 两点.
(1)求证："如果直线 l 过点 $T(3,0)$，那么 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3$"是真命题；
(2)写出(1)中命题的逆命题，判断它是真命题还是假命题，并说明理由.

【变式 5-2】 证明：若 $x^2+y^2=0$，则 $x=y=0$.

(2)反证法导出结果的几种情况
①导出非 p 为真，即与原命题的条件矛盾；
②导出 q 为真，即与假设"非 q 为真"矛盾；
③导出一个恒假命题，即与定义、公理、定理矛盾；
④导出自相矛盾的命题.

(3)逆否证法：我们知道原命题与其逆否命题是等价的，因此当我们证明或判断原命题感到困难时，可考虑证它的逆否命题成立，这样也可达到证明原命题的目的，这种证法叫做逆否证法.

2. 反证法与逆否证法的联系：(1)依据相同. 都是利用原命题与其逆否命题的等价性；(2)起步相同. 都是从"$\neg q$"(即否定结论)出发(入手)；(3)思想相同. 都是"正难则反"思想的具体体现.

3. 反证法与逆否证法的区别：(1)目的不同. 反证法否定结论的目的是推出矛盾，而逆否证法否定结论的目的是推出"$\neg p$"(即否定条件)；(2)本质不同. 逆否证法实质是证明一个新命题(逆否命题)成立，而反证法是把否定的结论作为新的条件连同原有的条件进行逻辑推理，直至推出矛盾，从而肯定原命题的结论.

方法视窗

值得注意的是当命题结论的反面有多种情况时要分类讨论. 而对于结论中出现"至多"、"至少"、"全都"、"唯一"等字眼时，经常采用反证法来证明，如变式 5-2.

专题优化测训

学业水平测试

1. (考点 1)下列语句中不是命题的是(   ).
A. 台湾是中国的　　B. 两军相遇勇者胜
C. 学海无涯苦作舟　　D. 连结 A、B 两点

2. (考点 1)若 M、N 是两个集合，则下列命题中为真命题的是(   ).
A. 如果 $M\subseteq N$，那么 $M\cap N=M$
B. 如果 $M\cap N=N$，那么 $M\subseteq N$
C. 如果 $M\subseteq N$，那么 $M\cup N=M$
D. 如果 $M\cup N=N$，那么 $N\subseteq M$

3. (考点 2)指出下列命题中的条件 p 和结论 q.
(1)若整数 a 能被 2 整除，则 a 是偶数；
(2)若四边形是菱形，则它的对角线互相垂直且平分.

4.（考点2）将下列命题改写成“若 p，则 q”的形式.

（1）等腰三角形的两腰中线相等；

（2）垂直于同一平面的两平面平行.

5.（考点4）判断下列命题的真假.

（1）能被6整除的数一定能被3整除；

（2）二次函数的图象一定是抛物线.

6.（考点3）写出下列命题的否命题：

（1）若 $a>b$，则 $a-2>b-2$；

（2）到圆心的距离等于半径的点在圆上.

高考水平测试

一、选择题

1.（考点4，2007，辽宁）若 m、n 是两条不同的直线，α、β、γ 是三个不同的平面，则下列命题中的真命题是（　　）.

A. 若 $m\subset\beta$，$\alpha\perp\beta$，则 $m\perp\alpha$

B. 若 $\alpha\cap\gamma=m$，$\beta\cap\gamma=n$，$m/\!/n$，则 $\alpha/\!/\beta$

C. 若 $m\perp\beta$，$m/\!/\alpha$，则 $\alpha\perp\beta$

D. 若 $\alpha\perp\gamma$，$\alpha\perp\beta$，则 $\beta\perp\gamma$

2.（考点3，2007，重庆）命题“若 $x^2<1$，则 $-1<x<1$”的逆否命题是（　　）.

A. 若 $x^2\geqslant1$，则 $x\geqslant1$ 或 $x\leqslant-1$

B. 若 $-1<x<1$，则 $x^2<1$

C. 若 $x>1$ 或 $x<-1$，则 $x^2>1$

D. 若 $x\geqslant1$ 或 $x\leqslant-1$，则 $x^2\geqslant1$

3.（考点4，2007，北京）对于函数①$f(x)=|x+2|$，②$f(x)=(x-2)^2$，③$f(x)=\cos(x-2)$，判断如下两个命题的真假：

命题甲：$f(x+2)$ 是偶函数；

命题乙：$f(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 上是减函数，在 $(2,+\infty)$ 上是增函数.

能使命题甲、乙均为真的所有函数的序号是（　　）.

A. ①②　　B. ①③　　C. ②　　D. ③

4.（考点2、3、4，2008，山东）给出命题：若函数 $y=f(x)$ 是幂函数，则函数 $y=f(x)$ 的图象不过第四象限. 在它的逆命题、否命题、逆否命题三个命题中，真命题的个数是（　　）.

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

5.（考点3、4，2008，广东）命题“若函数 $f(x)=\log_a x(a>0,a\neq1)$ 在其定义域内是减函数，则 $\log_a 2<0$”的逆否命题是（　　）.

A. 若 $\log_a 2<0$，则函数 $f(x)=\log_a x(a>0,a\neq1)$ 在其定义域内不是减函数

B. 若 $\log_a 2\geqslant0$，则函数 $f(x)=\log_a x(a>0,a\neq1)$ 在其定义域内不是减函数

C. 若 $\log_a 2<0$，则函数 $f(x)=\log_a x(a>0,a\neq1)$ 在其定义域内是减函数

D. 若 $\log_a 2\geqslant0$，则函数 $f(x)=\log_a x(a>0,a\neq1)$ 在其定义域内是减函数

6.（考点3、4）有下列命题：

①面积相等的三角形是全等三角形；②“若 $xy=0$，则 $|x|+|y|=0$”的逆命题；③“若 $a>b$，则 $a+c>b+c$”的否命题；④“矩形的对角线互相垂直”的逆否命题.

其中真命题共有（　　）.

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

7.（考点4）已知 m、n 是两条不同的直线，α、β 为两个不同的平面，$m\perp\alpha$，$n\perp\beta$，则下列命题中的假命题是（　　）.

A. 若 $m/\!/n$，则 $\alpha/\!/\beta$

B. 若 $\alpha\perp\beta$，则 $m\perp n$

C. 若 α、β 相交，则 m、n 相交

D. 若 m、n 相交，则 α、β 相交

8.（考点4，2006，福建）对于直角坐标平面内的任意两点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，定义它们之间的一种“距离”：$\|AB\|=|x_2-x_1|+|y_2-y_1|$.

给出下列三个命题：

①若点 C 在线段 AB 的延长线上，则 $\|AC\|=\|CB\|+\|AB\|$；

②在△ABC 中，若 $\angle C=90°$，则 $\|AC\|^2+\|CB\|^2=\|AB\|^2$；

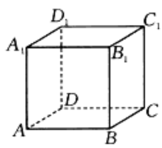
③在△ABC 中，$\|AC\|+\|CB\|>\|AB\|$.

其中真命题的个数为（　　）.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

二、填空题

9.（考点4，2006，山东）下列四个命题中，真命题的序号有________（写出所有真命题的序号）.



第9题图

①将函数 $y=|x+1|$ 的图象按向量 $v=(-1,0)$ 平移，得到的图象对应的函数表达式为 $y=|x|$；

②圆 $x^2+y^2+4x+2y+1=0$ 与直线 $y=\frac{1}{2}x$ 相交，所得弦长为2；

③若 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}$，$\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{3}$，则 $\tan\alpha\cot\beta=5$；

④如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，P 为底面 $ABCD$ 内一动点，P 到平面 AA_1D_1D 的距离与到直线 CC_1 的距离相等，则 P 点的轨迹是抛物线的一部分.

10.(考点3,2006,山东)给出命题:"已知 a、b、c、d 是实数,若 $a\neq b$ 且 $c\neq d$,则 $a+c\neq b+d$".对原命题、逆命题、否命题、逆否命题而言,其中真命题的个数为________.

11.(考点4)下列命题中:①$5\leqslant 4$;②有两个角是 45° 的三角形是等腰直角三角形;③方程 $x^2+1=0$ 没有实数根;④若 a、b 是实数,则 $|a|+|b|\geqslant 0$,其中真命题的序号为________.

12.(考点4,2007,上海)对于非零实数 a、b,以下四个命题都成立:

①$a+\dfrac{1}{a}\neq 0$;②$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$;③若 $|a|=|b|$,则 $a=\pm b$;④若 $a^2=ab$,则 $a=b$.那么,对于非零复数 a、b,仍然成立的命题的所有序号是________.

三、解答题

13.(考点4)判断下列命题的真假.

(1)如果 a、b 是两个正实数,那么 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$;

(2)如果实数 a 满足 $a^2=9$,则 $a=3$;

(3)矩形的对角线相等;

(4)$\sin\alpha>\sin\beta$,则 $\alpha>\beta$.

14.(考点5)试证:(1)命题"若 $m>0$,则 $x^2+x-m=0$ 有两个不同的实数根"是真命题;

(2)命题"若 $x^2+x-m=0$ 有两个不同的实数根,则实数 $m>0$"是假命题.

15.(考点3、4)判断下列命题的真假:

(1)对角线不相等的四边形不是等腰梯形;

(2)若 $x\notin A\cap B$,则 $x\notin A$ 且 $x\notin B$;

(3)若 $x^2+y^2\neq 0$,则 $xy\neq 0$;

(4)若 $x\neq y$ 或 $x\neq -y$,则 $|x|\neq |y|$.

16.(考点5)在四边形 $ABCD$ 中,若 $AB+BD<AC+CD$,则 $AB<AC$.

第 2 讲　充分条件与必要条件

课标解读

1. 理解必要条件、充分条件与充要条件的意义.

(1)初步理解充分条件、必要条件、充分必要条件等概念,并能从逻辑关系和集合间的关系上进行理解.

(2)了解命题 A 与命题 B 的条件关系的四类情况,会判断两命题的条件关系属充分不必要条件、必要不充分条件、充要条件、既不充分又不必要条件中的哪一种.

2. 进一步体会逻辑用语在日常生活中的重要作用,并会用充分条件、必要条件及充要条件来处理具体数学问题.

学法导引

1. 本讲重点是充分条件和必要条件的概念. 难点是对充分条件和必要条件概念的理解. 充分条件和必要条件是高考必考内容之一.

2. 在本讲的学习中,重点是关注判断充分必要条件的问题,或利用已知关系探求参数的取值范围的问题. 对于充要条件的证明,关键是分清命题的条件和结论,分清哪是充分性和哪是必要性的问题.

考点分类例析

考点 1　充分条件和必要条件的判定

核心总结

1. 充分条件:"若 p,则 q"为真命题,即 $p\Rightarrow q$,则 p 是 q 的充分条件.
2. 必要条件:"若 q,则 p"为真命题,即 $q\Rightarrow p$,则 p 是 q 的必要条件.
由以上可知:p 是 q 的充分条件,则 q 是 p 的必要条件.

考题 1　给出下列命题:

(1)p:$x-2=0$;q:$(x-2)(x-3)=0$.

(2)p:两个三角形相似;q:两个三角形全等.

(3)p:$m<-2$;q:方程 $x^2-x-m=0$ 无实根.

(4)p:一个四边形是矩形;q:四边形的对角线相等.

(5)p:$\theta=\dfrac{2\pi}{3}$;q:$\tan\theta=2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)$.

(6)p:$\log_{\frac{1}{2}}(|x|-3)>0$;$q$:$x^2-\dfrac{5}{6}x-\dfrac{1}{6}>0$.

指出 p 是 q 的什么条件.

【解析】　首先分清条件和结论,然后搞清楚前者能否推出后者,后者能否推出前者.

(1) ∵ $x-2=0\Rightarrow(x-2)(x-3)=0$,而$(x-2)(x-3)=0\nRightarrow x-2=0$,
∴ p 是 q 的充分不必要条件.

(2) ∵ 两个三角形相似$\nRightarrow$两个三角形全等,
而两个三角形全等$\Rightarrow$两个三角形相似,
∴ p 是 q 的必要不充分条件.

(3) ∵ $m<-2\Rightarrow$方程 $x^2-x-m=0$ 无实根,
而方程 $x^2-x-m=0$ 无实根$\nRightarrow m<-2$,
∴ p 是 q 的充分不必要条件.

规律清单

1. 判断一个具体问题中的条件与结论之间的充分与必要的关系,要注意以下几点:①确定条件是什么,结论是什么;②要尝试从条件推结论,又从结论推条件,然后再作出判断.

2. (1)判断 p 是 q 的什么条件,关键是看 p 能否推出 q,q 能否推出 p.

(2)若对于"$p\Rightarrow q$"是否成立不能判断,或不好处理,则可看它的逆否命题是否成立.

(3)否定一个结论时,只需举一个反例即可.

方法视窗

判断充分条件、必要条件的常用方法:

1. 定义法:判断 B 是 A 的什么条件,实际上就是判断 $B\Rightarrow A$ 或 $A\Rightarrow B$ 是否成立,只要把题目中所给条件按逻辑关系画出箭头

(4) ∵ 矩形的对角线相等， ∴ $p\Rightarrow q$.

而对角线相等的四边形不一定是矩形， ∴ $q\nRightarrow p$.

∴ p 是 q 的充分不必要条件.

(5) ∵ $\theta=\frac{2\pi}{3}$ 为方程 $\tan\theta=2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$ 的解，

∴ $\theta=\frac{2\pi}{3}$ 是 $\tan\theta=2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$ 成立的充分条件.

又∵ $\theta=\frac{8}{3}\pi$ 也是方程 $\tan\theta=2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$ 的解，

∴ $\theta=\frac{2\pi}{3}$ 不是 $\tan\theta=2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$ 成立的必要条件.

∴ p 是 q 的充分不必要条件.

(6) p：$\log_{\frac{1}{2}}(|x|-3)>0\Leftrightarrow 0<|x|-3<1\Leftrightarrow 3<|x|<4\Leftrightarrow -4<x<-3$ 或 $3<x<4$，令 $P=\{x|-4<x<-3$ 或 $3<x<4\}$.

q：$x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}>0\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)>0\Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$ 或 $x<\frac{1}{3}$，令 $Q=\left\{x\middle|x>\frac{1}{2}\text{ 或 }x<\frac{1}{3}\right\}$.

∴ $P\subsetneqq Q$.

∴ p 是 q 的充分而不必要条件.

【变式 1-1】 (1)已知直线 m、n 和平面 α，则 $m/\!/n$ 的一个必要非充分的条件是(　　).

A. $m/\!/\alpha$，$n/\!/\alpha$　　B. $m\perp\alpha$，$n\perp\alpha$

C. $m/\!/\alpha$，$n\in\alpha$　　D. m、n 与 α 成等角

(2)(2004·天津)已知数列 $\{a_n\}$，那么"对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，点 $P_n(n,a_n)$ 都在直线 $y=2x+1$ 上"是"$\{a_n\}$ 为等差数列"的(　　).

A. 必要而不充分条件　　B. 充分而不必要条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

示意图，再利用定义即可判断.

2. 转换法：当所给命题的充要条件不易判定时，可对命题进行等价转换，例如改用其逆否命题进行判断.

3. 集合法：对命题的条件和结论间的关系进行判断有困难时，有时可以从集合的角度来考虑，记条件 p、q 对应的集合分别为 A、B，则：

若 $A\subseteq B$，则 p 是 q 的充分条件；

若 $A\subsetneqq B$，则 p 是 q 的充分非必要条件；

若 $A\supseteq B$，则 p 是 q 的必要条件；

若 $A\supsetneqq B$，则 p 是 q 的必要不充分条件；

若 $A=B$，则 p 是 q 的充要条件；

若 $A\nsubseteq B$，且 $A\nsupseteq B$，则 p 是 q 的非充分非必要条件.

4. 传递法：例如 p 是 q 的充分而不必要条件，q 是 r 的充要条件，t 是 r 的必要不充分条件，问 t 是 p 的什么条件？

解：因 $p\Rightarrow q\Leftrightarrow r\Rightarrow t$，$q\nRightarrow p$，$t\nRightarrow r$，所以 $p\Rightarrow t$，$t\nRightarrow p$.

故 t 是 p 的必要不充分条件.

考点 2　充要条件的判定与探求

核心总结

充要条件：如果既有 $p\Rightarrow q$，又有 $q\Rightarrow p$，即 $p\Leftrightarrow q$，则 p 是 q 的充分必要条件，简称充要条件，同时 q 也是 p 的充要条件，即 p 与 q 互为充要条件.

考题 2　函数 $f(x)=x|x+a|+b$ 是奇函数的充要条件是(　　).

A. $ab=0$　　B. $a+b=0$　　C. $a=b$　　D. $a^2+b^2=0$

【解法 1】 $f(x)$ 为奇函数 $\Leftrightarrow -x|-x+a|+b=-x|x+a|-b\Leftrightarrow b=-b$ 且 $|a-x|=|a+x|\Leftrightarrow b=0$ 且 $a=0\Leftrightarrow a^2+b^2=0$.

故选 D.

【解法 2】 函数 $f(x)$ 是奇函数的一个必要条件是 $f(0)=0$，即 $b=0$. 由于 A、B、C 均不能保证这个条件成立，而 D 能保证.

故选 D.

【解法 3】 函数 $f(x)$ 是奇函数的一个必要条件是 $f(-a)=-f(a)$，即 $b=-2a|a|+b$，得 $a=0$，只有选项 D 能保证 $a=0$.

故选 D.

【变式 2-1】 已知方程 $x^2+(2k-1)x+k^2=0$，求使方程有两个大于 1 的根的充要条件.

方法视窗

1. 探求一个命题成立的充要条件一般有两种处理方法：

(1)先由结论成立推出命题成立的必要条件，然后再证明其充分性.

(2)等价性：将一个命题等价转换为另一个命题，列出使该命题成立的充要条件.

2. 考题 2 中解法 1 是运用等价转化的方法；解法 2 及解法 3 是先从探求一个必要条件出发，再利用代入排除法.

考点3 由命题成立的条件求参数取值范围

核心总结

充分条件、必要条件和充要条件是重要的数学概念，主要用来区分命题的条件 p 和结论 q 之间的下列关系.

1. 从逻辑推理关系上看：

(1)若 $p\Rightarrow q$，但 $q\nRightarrow p$，则 p 是 q 的充分不必要条件；

(2)若 $q\Rightarrow p$，但 $p\nRightarrow q$，则 p 是 q 的必要不充分条件；

(3)若 $p\Rightarrow q$，且 $q\Rightarrow p$(或 $p\Rightarrow q$ 且 $\neg p\Rightarrow\neg q$)，则 p 是 q 的充要条件；

(4)若 $p\nRightarrow q$，且 $q\nRightarrow p$，则 p 既不是 q 的充分条件，也不是 q 的必要条件.

2. 从命题的真假角度上看：

设有命题①"若 p，则 q"和命题②"若 q，则 p".

(1)若命题①是真命题，而命题②是假命题，则 p 是 q 的充分不必要条件；

(2)若命题②是真命题，而命题①是假命题，则 p 是 q 的必要不充分条件；

(3)若两个命题都是真命题，则 p 是 q 的充分必要条件；

(4)若两个命题都是假命题，则 p 既不是 q 的充分条件，也不是 q 的必要条件.

考题3 已知 $p:\left|1-\frac{x-1}{3}\right|\leqslant 2$，$q:x^2-2x+1-m^2\leqslant 0(m>0)$. 若 p 是 q 的充分不必要条件，求实数 m 的取值范围.

【解析】 设 $A=\left\{x\left|\left|1-\frac{x-1}{3}\right|\leqslant 2\right.\right\}$，$B=\{x|x^2-2x+1-m^2\leqslant 0\}$，则 $A\subsetneqq B$.

解不等式 $\left|1-\frac{x-1}{3}\right|\leqslant 2\Leftrightarrow -2\leqslant x\leqslant 10$，

解不等式 $x^2-2x+1-m^2\leqslant 0\Leftrightarrow 1-m\leqslant x\leqslant 1+m(m>0)$，

$\because$ $p\Rightarrow q$ 且 $q\nRightarrow p$，

故 $A\subsetneqq B$，则 $\begin{cases}1+m\geqslant 10,\\1-m\leqslant -2,\end{cases}$ $\therefore$ $m\geqslant 9$.

【变式3-1】 设 $p:|4x-3|\leqslant 1$，$q:x^2-(2a+1)x+a(a+1)\leqslant 0$.
若 p 是 q 的充分非必要条件，求实数 a 的取值范围.

方法视窗

解决这类问题时，一是直接求解；二是转化为等价命题求解，即 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件等价于 p 是 q 的充分不必要条件.

防错档案

1. 易错点

对于集合呈现的条件关系，易弄反集合之间的包含关系.

2. 防错良方

明确充要条件与集合包含关系之间的联系，见考点1中方法视窗的第3点.

考点4 充要条件的证明

核心总结

充要条件的证明方法有：

(1)定义法：分别证明充分性和必要性两个方面. 在解题时要避免把充分性当必要性来证明的错误，这就需要先分清条件与结论，若从条件推出结论，就是充分性；若从结论推出条件，就是必要性.

(2)等价法：就是从条件(或结论)开始，逐步推出结论(或条件)，但要注意每步都是可逆的，即反过来也能推出.