数学分析纵横谈

SHUXUE FENXI ZONGHENGTAN

（第二版）

李经文 著

气象出版社

数学分析纵横谈

（第二版）

李经文　著

内容简介

作为一本数学分析的教学研究专著，本书的特色是文理渗透．作者长期从事数学分析、实分析、复分析与泛函分析的教学，对数学分析的重要性略知一二，但深感获取有关历史资料之艰难以及多角度、多层次、全方位把握这门课程的价值．作者认为：数学分析与人文科学的哲学、美学、逻辑学及心理学等等是“有缘”的：数学分析为它们提供了研究素材，它们也为数学分析提供了思维方式…… 凡要真正透彻理解这门课程的教师、学生或学者，为使思维更广阔更深入一些，阅读本书是大有益处的．

图书在版编目(CIP)数据

数学分析纵横谈/李经文著．—北京：气象出版社，1996.4(1999.4 重印)

ISBN7-5029-2155-9

Ⅰ．数…　Ⅱ．李…　Ⅲ．数学分析　Ⅳ．O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 11945 号

责任编辑：吴庭芳　终审：纪乃晋

封面设计：刘　扬　责任技编：吴庭芳　责任校对：李向荣

气象出版社出版

(北京市海淀区中关村南大街 46 号　100081)

北京金瀑印刷有限责任公司印刷

新华书店总店北京发行所发行　全国各地新华书店经销

开本：850×1168　1/32　印张：5.25　字数：130 千字

2003 年 8 月第 2 版　2003 年 8 月第 3 次印刷

印数：8001～12000 册

ISBN 7-5029-2155-9/O・0038

定价：16.00 元

序　言

当今社会和科学技术的发展使数学深入到各个领域，人们更加认识到数学的重要性. 数学科学已成为与自然科学、社会科学并列的一个大的科学门类. 国内外若干著名大学已正式设立数学学院. 数学分析是数学科学最主要和最重要的一个分支. 在大专院校开设的“数学分析”这一门课程则是为培养数学科学专门人才和其他科学技术高级人才而铺设的一块基石.

“数学分析”课程历来是师生们最重视的一门基础课. 国内外不少著名数学家如库儿沙、波利亚与舍贵、辛钦、菲赫金哥儿茨、柯朗、华罗庚、徐利治等都为这门课程写出了各有特色的教材或参考书. 面向 21 世纪，“数学分析”课程正在进行教学改革，北京大学、清华大学等校都已作了大胆的尝试，值得我们学习.

李经文同志从事“数学分析”课程教学多年，具有丰富的教学经验. 他还研读了不少关于数学史、美学、哲学、逻辑学、心理学等方面的书. 在此基础上，他写了这本关于“数学分析”课程教学研究的书，是有参考价值的.

周淑子

1996 年 4 月 4 日于湖南大学

目　　录

第一章　数学分析的结构、特征和位置

关于数学分析，大体上有两种不同的意见. 一种是大范围的，其内容包括微积分学、实分析、复分析及泛函分析初步等，如杨宗磐著《数学分析入门》；另一种是狭义的，即通常所谓的微积分学，其内容不越出吉米多维奇著《数学分析习题集》的范围. 国内现行的数学分析教本属于后一种，本文所言亦如此.

数学分析业已定型. 它是高等学校数学专业学生的主干基础课，也是理工类农医类财经类等学生所学高等数学的主体.

1.1　数学分析的框架

概而言之，数学分析是四大块结构：分析引论；微分学；积分学；无穷级数与广义积分.

数学分析的立论数域是实数连续统，研究对象是函数，主要工具是极限，基本问题是无穷小及其运算，且对函数的研究以连续函数为主体等等. 这些问题由于在整个教材中贯穿始终，因而形成了分析的预篇，即分析引论.

关于无穷小运算，封闭性是研究的重要内容. 无穷小之比（0/0）及无限个无穷小之和（$\sum 0$），一般而言并不封闭. 这种矛盾的特殊性，含有丰富的内容及探索价值，它们分别构成了分析的两大课题——导数与积分. 也正因为如此，数学分析可谓“无穷小分析”.

微分学包括一元与多元两部分. 一元微分学的内容是：导数与微分的定义及计算；微分学基本定理（即四个中值定理：洛尔定

理,拉格朗日中值定理,柯西中值定理及泰勒中值定理);不定积分(其源于导数的逆运算);微分学的应用(包括函数单调、凹凸等性态研究和一元函数极值)等. 多元微分学可以基本类似地建立起来:包括多元函数的偏导数的定义与求法;多元函数的微分;多元泰勒公式及多元函数的极值等. 积分学亦分一元与多元两部分. 一元积分指定积分. 在多元积分中,与求偏导数对应的是求含参量的常义积分;直接由定积分推广的,由于积分范围的不同形状,可分重积分及曲线、曲面积分等. 无论一元或多元积分,都有其应用部分.

无穷级数与广义积分,似乎相距甚远,实则同出一源. 自然界是连续与离散的统一,相应的,在数学中,既有连续变量,又有离散变量. 序列是一种特殊的函数——自变量是离散的自然数集.

连续型变量 $f(x)$ 的导数定义为

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x};$$

对离散变量 $f(n)=a_n$ 而言,最小的 $|\Delta n|=1$,故常取 $\Delta n=1$. 于是,与 $f'(x)$ 相应的是差分

$$\Delta a_n=\Delta f(n)=\frac{f(n+\Delta n)-f(n)}{\Delta n}=a_{n+1}-a_n,$$

从而,与定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 相应的是有限和

$$\sum_{n=1}^{k}f(n)\Delta n=\sum_{n=1}^{k}a_n.$$

无穷级数与广义积分分别是在有限和及定积分的基础上加上一个极限运算而已. 由含参量的常义积分发展的是含参量的广义积分,而在离散情形,就是函数项级数(特殊情形是幂级数与傅里叶级数),实质上它也可视为含参量 x 的无穷级数.

1.2　数学分析结构的内部和谐性

数学分析要凝成一个整体，四大块之间及各块内部，都应当具有一致性与和谐性．这无论从逻辑的角度，还是从哲学、美学的角度考虑，都是必要的．

函数是数学分析的研究对象，极限是数学分析的主要工具，而极限理论又必须建立在实数连续统的基础上．这些内容作为分析引论，无可非议，因为其余三块，都离不开它们．

导数与积分这两大课题，本来是独立发展的，但后来发现它们是相通的：在一元情形，由导数引出逆运算——求原函数或不定积分，而可积函数的原函数与积分之间由牛顿-莱布尼兹公式沟通，从而这两大块之间是和谐统一的．

不仅如此，各块内部的不同知识点之间，也存在有机的联系，可以由此及彼，**寓多样性于统一性之中**．多元函数求导（求偏导数）归结为一元函数求导；多元函数积分（重积分）归结为一元函数积分（累次积分）；至于含参量的常义积分本身可视为一元定积分．这种计算方法上的重要特征显示：从计算角度而言，求导数与求不定积分这一对互逆运算，是数学分析的主要课题．正因为如此，掌握求导及求不定积分的各种方法和技巧，是数学分析教学中一件根本性的大事．

再看无穷级数与广义积分这一块．两种广义积分——无穷积分与瑕积分之间，可经变量替换相互演变．函数项级数与含参量的广义积分的对应，不仅同出一源，而且二者都有一致收敛等概念．

当然，我们对数学分析的结构划分，并不是绝对的．有的内容该置于哪一块，也许有不同的争议．比如，原函数与不定积分，既

可置于微分学(实质上的),也可置于积分学(形式上及计算上的);含参量的常义积分,既可置于积分学(实质上的),也可置于无穷级数与广义积分(因它与含参量的广义积分形式上的联系)……这种交叉性质正是内部和谐统一的标志. 上面提出的四大块分置方案,主要是着眼于事物的内部联系而不是外部联系.

1.3 函数研究的特征

数学分析中对函数的研究,具有既不同于初等数学,又不同于高等数学中别的学科的明显特征.

(1)函数研究的个别性. 基本上对指定的函数而言,不像泛函分析那样研究具有某种性态的函数类(函数空间).

(2)定义域的区间性. 函数的定义域是一个或几个区间. 即使定义域是若干区间的并集,也是一个一个区间分别考虑的.

这两大特征,与初等数学对函数的研究没有本质的差别.

(3)点态性. 对函数的研究,不少问题是着眼于某点及其附近.

(4)动态性. 不是孤立地、静止地去考察函数在某点的性态,而是要研究当自变量 x 变化时,函数 $y=f(x)$ 相应的变化状态.

上述(3)与(4)是相互联系、相互制约的. **动态是某点附近的动态,而点态并非静止的点态**. 这与初等数学不一样:初等数学从根本上讲是"静态"的,总是对给定的自变量值进行讨论;即使涉及到函数的某些性态的讨论(如单调性、奇偶性、周期性等),也仅仅是着眼于函数值的简单比较而已.

动态性与点态性,使得数学分析既成为变量的科学,又存在较大的局限性.

对于运动,人们最关注的是某种规律性. 在研究任何一门学

科时，我们对杂乱无章的东西并不感兴趣．自变量的变化，可以人为地使其呈现某种规则性变化，一般是令 $x \to a^+$，$x \to a^-$，$x \to a$，$x \to +\infty$，$x \to -\infty$ 及 $x \to \infty$．这时 $y = f(x)$ 的相应变化再不能随意．y 的变化或许相当复杂，但我们饶有兴趣的依然是上述 6 种变化状态．

对函数的变化着眼于“点”——在某点及其附近．极限是点态的，从而在一点的连续与可导亦如此．函数极值与函数序列的收敛，也是点态的．在某一区间上函数的连续性、可导性及函数序列的收敛等等，只不过是点态性质的汇集而已．定积分是依赖于整个区间的．但是，分析中的“微元法”表示，在构造定积分解决实际问题时，真正起作用的是点态的“微元”．而且，计算定积分广为应用的牛顿-莱布尼兹公式，其中求原函数是求导运算的逆运算，而求导是点态的……因此，定积分中事实上隐含着点态的因素．

1.4　数学分析的地位及局限性

数学分析是高等学校数学专业基础课中的支柱，分析数学这一庞大的领域是以它为基础的；报考任何一个数学分支的硕士研究生都以它为必考科目．在数学专业中，复分析、实分析、泛函分析、概率统计及微分方程等，均可视为其后继课程．在复变函数中，求导公式（多值解析函数对单值分支而言）与数学分析一致；解析函数在单连通区域中沿曲线积分的计算公式与数学分析中求定积公的原函数解法本质上是一样的．在实变函数中，尽管 L 积分具有重大的理论价值，但在实际计算 L 积分时，仍然是设法演变成分析中的 R 积分．概率论中计算随机变量的数学期望及方差，依离散及连续两种情形，归结为分析中的无穷级数与广义积分．泛函分析中的函数空间（如 $C[a,b]$ 空间）与分析中的若干概念联

系紧密. 从计算角度而言,分析中的求导与积分,具有本质的跨学科的意义. 数学分析的方法和技巧,对于从事当代数学创造性工作,依然价值颇大: 如在泛函微分方程的振动理论及渐近理论的研究中,灵活地运用数学分析的方法和技巧,具有举足轻重的意义(参看附录 2).

但是,数学分析是有其局限性的,主要表现在如下几个方面.

1.4.1 立论数域的局限性

数学分析的立论数域是实数连续统. 实数域对复数域而言,有其无法弥补的缺陷. 复变函数中美妙的和谐是数学分析望尘莫及的. 比如幂级数

$$1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots, \tag{1.1}$$

$$1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\cdots, \tag{1.2}$$

收敛半径均为 1. 在$(-1,1)$内,其和函数分别是$\dfrac{1}{1+x^2}$与$\dfrac{1}{1+x}$. 级数(1.2) 的收敛半径显然不能大于 1,因其和$\dfrac{1}{1+x}$在$x=-1$处无意义. 但是,$\dfrac{1}{1+x^2}$在实数域 R 上均有意义. 从(1.2) 看,收敛半径与和函数有关; 从(1.1),却又看不出二者有什么必然的联系.

把上述二级数延拓到复平面上考虑,级数(1.1)变为

$$1-z^2+z^4-\cdots+(-1)^n z^{2n}+\cdots, \tag{1.3}$$

在圆 $|z|<1$ 内,其和为$\dfrac{1}{1+z^2}$;在圆 $|z|=1$ 上,和函数有两个孤立奇点:$z=\pm i$. 因此,级数(1.3) 的收敛半径为 1. 由此可见,把实的幂级数延拓到复平面上考虑, 和函数与级数收敛半径的内在的本质的联系就呈现出来了.

这毫不足怪. 实系数的 n 次多项式,尽管有 n 个复根,如果局限于实数域,也许一个根都没有.

函数的性态,一般而言,在复平面上表现得比较完整. 在数学分析中,关于函数的幂级数展开,讲过这样的例: 即使 $f(x)$ 在 $(-r,r)$ 内有各阶导数,即使 $f(x)$ 的马克劳林级数收敛,也还是不够的. 其例是

$$f(x)=\begin{cases}e^{-1/x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

可证 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有各阶导数,且 $f^{(n)}(0)=0(n=0,1,2,\cdots)$,因此,$f(x)$ 的马克劳林级数实际上是零级数(即各项系数均为 0).

在数学分析中,上例说明了泰勒公式中余项 $r_n(x)\to 0(n\to\infty)$ 的必要性. 但是,为什么 $f(x)$ 在 $(-r,r)$ 内不能展成幂级数,能从 $f(x)$ 本身找到根据吗?

若 $f(x)$ 能在 $(-r,r)$ 内幂级数展开,则解析开拓后,$f(z)$ 能在 $|z|<r$ 内展成幂级数,从而在该圆内解析. 当 $z\neq 0$ 时,$f(z)$ 的解析性无疑,故只须考查 $f(z)$ 在 $z=0$ 的可导性.

因 $z=0$ 是 e^{-1/z^2} 的本性奇点,因而也是

$$\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\frac{e^{-1/z^2}}{z}$$

的本性奇点. 于是,$\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{f(z)-f(0)}{z-0}$ 不存在,从而 $f(z)$ 在 $z=0$ 不可导.

1.4.2　点态性的局限

所谓函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在 x_0 收敛,它只要求数列 $\{f_n(x_0)\}$ 收敛,这与函数列在 x_0 附近其它点上是否收敛毫无关系. 若我们考虑

的函数列中的函数没有某种共同属性,这种点态收敛的价值就微不足道了. 由于这种函数列点态收敛的束缚力是如此薄弱,即使序列中的函数具有某种共性(如 $f_n(x)$ 都在某区间 I 上连续),也得不到极限函数相应的性质(如连续性). 因为根据函数的 Baire(贝尔) 分类,任何定义在$[a,b]$上的第一类函数,均可表为$[a,b]$上某连续函数序列点态收敛的极限,而这种函数的间断点分布也许是相当复杂的. 比如,存在这样的函数 $f(x)$,它是某个连续函数列的极限,但它在任何非空开区间 $I\subset[0,1]$ 上,都有不可数个间断点①.

点态收敛的这种局限性,迫使人们去研究一种整体性的一致收敛. 在一致收敛条件下,保证了连续函数序列极限的连续性,但这种条件又太强,因为一致收敛并非连续函数序列极限连续的必要条件. 当然,连续函数列极限函数连续的充要条件是有的,Arzela 就给出了一个,它基于一种弱于一致收敛而强于点态收敛的收敛性——广义的半一致收敛性,但这已越出数学分析的范围②. 可以证明:在$[a,b]$上连续函数的集合 $C[a,b]$ 中,强于点态收敛拓扑的完备范数拓扑唯有一致收敛拓扑(参看附录1). 从这种意义上看,在数学分析中引进函数序列的一致收敛,其实是不可避免的.

1.4.3 点集结构的局限性

在一元分析中,函数的定义域以区间为基本形式,而区间有开的、闭的及半开半闭几种形式. 在数学分析中,既没有引进一般点集的度量(测度),甚至对区间也模模糊糊,不从拓扑结构上区分(如开集、闭集和紧集等). 因此,在讲了 $[a,b]$ 上定积分的定义

① 汪林:《实分析中的反例》,高等教育出版社,1989,第45页.
② 菲赫金哥尔茨:《微积分学教程》(中译本),第二卷第二分册,人民教育出版社,1954,第391,396页.

后，讲了三类可积函数(即$[a,b]$上的连续函数可积，单调函数可积及只有有限个第一类间断点的有界函数可积)，但没有讲一个以间断点个数为标志的可积性充要条件，这只有在建立了一般点集的勒贝格测度的实变函数中，才解决这一问题：有界函数在$[a,b]$上R可积的充要条件是其间断点集为L零测集.

关于闭区间上的连续函数具有“三性”(即：有界性、最值性与介值性)，而开的、半闭半开的区间上的连续函数一般不同时具备“三性”，其理由也只有在对直线上区间的拓扑结构讲清楚以后，才能透彻理解：其源盖出于在直线上区间是通集，有限闭区间是紧集，而连续函数恰有变通集为通集，变紧集为紧集的特性. 通集的特征是介值性，所以各种区间上的连续函数均有介值性. 紧集的特征是最值性(包括有界性)，且在直线上，紧集等价于有界闭集. 因此，有界闭集上的连续函数具有有界性与最值性. 由于$[a,b]$既通又紧，相应的$f([a,b])$亦如此，这样，$[a,b]$上连续函数的“三性”就一揽子解决了.

由于数学分析的种种局限性，使得在整个分析教材中出现“充分条件多”，举“反例”多的状况. 因此，尽管数学分析在总体框架上是和谐统一的，但在不少局部显得不和谐，甚至不可思议. **在知识密集程度越来越高，学科分工越来越细的当代，任何一门学科都不可能包罗万象，因此，局限性是不可避免的，总有不少问题留给更深层次的更专一的后继课程去研究**. 尽可能在这门学科知识点的范围内，写得完整些，写得深入浅出，无懈可击，是教材编写者费尽心机的. 数学分析由于付出了众多人物的心血，因此在这些方面是比较成熟的，分析的总体(指标准分析)处于一种业已定型的稳定状态. 现在，不少的人是在“大局已定”的情况下，做一些修修补补的工作而已.

第二章 极限理论的发展及其历史评价

现代极限理论，在一般拓扑空间中可以建立，并在不少数学分支中广为应用. 作为从有限向无限过渡的分析工具，极限理论在数学分析发展的历史长河中，扮演着十分重要的角色.

2.1 最早的无限分割思想

在我国古代，战国时代的《庄子·天下篇》中，有“一尺之棰，日取其半，万世不竭”的名言. 其意是所余部分总可一分为二，永远取不完. 这是公元前 3 世纪以前的事.

还较早一点，古希腊的安提丰(Antiphon，公元前 5 世纪)提出了通过边数不断加倍的方法，用圆的内接正多边形面积去接近圆的面积. 但当时仅仅是一种设想，并未付诸计算.

显然，这归结于圆可以无限分割. 应当注意，“无限分割”是一种数学抽象，是一个哲学概念，它被排斥于感觉经验王国之外，因为人的感官能力为感觉下限所限. 这表示：**远在两千多年以前，人类智慧已意识到连续量无最小区间可言.**

2.2 西方的穷竭法与中国的割圆术

对安提丰的思想作出重大发展的是欧多克斯(Eudoxus，公元前 408—前 355). 他提出如下著名原理：“对于两个不等的量，若从较大量减去大于其半的量，再从所余量减去大于其半的量，重复这一步骤，则所余量必小于原来较小的量”，这就是现代所谓“阿基

米德"公设的前身．此公设的现代表述是："已知任二正数 $a<b$，总存在自然数 n，使得 $na>b$"，可证这两种表述是等价的．

由欧多克斯提出，欧几里德(Euclid，约公元前 330－前 275)发扬光大并广为应用，阿基米德(Archimedes，公元前 287－前 212)继续作出重大贡献的这种方法(17 世纪时被人称为穷竭法)，其理论基础就是阿基米德公设，在论证过程中最后运用双重归谬法．下举一例说明之．

为证两圆面积与它们直径的平方成正比，用穷竭法的证明如下：设大小圆面积分别是 A 和 a，其直径分别是 D 和 d．若比例式 $a:A=d^2:D^2$ 不成立，则存在 $a'>0$，使 $a':A=d^2:D^2$，其中 a' 为另一个比 a 小(或大)的圆的面积．若 $a'<a$，则可在面积为 a 的圆内作一面积为 p 的内接多边形，使 $a'<p<a$(根据阿基米德公设，可使 $a-p<a-a'$)．在面积为 A 的圆内作出与上述多边形相似的内接多边形，设其面积为 P．则有 $p:P=d^2:D^2=a':A$．因 $p>a'$，故导出 $P>A$，这不合理．同理可证 $a'>a$ 会导致矛盾．

不难看出，在上面的证明过程中，除用到相似多边形的面积比等于对应线段之平方比这一性质外，就是用阿基米德公设与双重归谬法．这在逻辑上是十分严密的．

上述问题的功绩在于证明了圆的面积 $S=cr^2$，其中 $c>0$ 为常数(一般用 π 表示，并称之为圆周率)．于是计算圆周率 π 成为当时一件大事．阿基米德本人运用穷竭法，从圆的内接和外切正 6 边形算起，直到内接与外切正 96 边形，证明了

$$3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{10}{70}$$

已精确到小数点后两位．

穷竭法的基本思路标志着极限概念的轮廓已在古希腊问世．

例如,设一圆半径为 R,面积为 A. 当 $n_0 > 3$ 时,其内接正 n_0 边形面积 $P_{n_0} > \frac{1}{2}A$(在实际计算时,常取 $n_0 = 4$ 或 $n_0 = 6$). 在边数加倍的过程中,从 P_{n_0} 到 P_{2n_0} 所增面积 $P_{2n_0} - P_{n_0} > \frac{1}{2}(A - P_{n_0})$,这由图 2.1 即可看出:阴影部分的面积大于弓形面积之半. 阿基米德公设就是在这种启发下得到,并成为穷竭法的理论基础. 事实上,在边数不断加倍的过程中,会出现一个圆的内接正多边形面积序列:

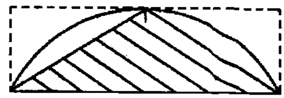

图 2.1

$$P_{n_0}, P_{2n_0}, P_{4n_0}, \cdots, P_{2^n n_0}, \cdots$$

按照阿基米德公设,对任 $\varepsilon > 0$,当 n 充分大时,有

$$A - P_{2^n n_0} < \varepsilon$$

看来,穷竭法与今天的极限法只相差那么一层障碍,一旦捅破这层障碍,就与今天的极限法一致了. 但是,古希腊数学家用穷竭法,并不像我们现在取极限那样,真正进行到无穷,得一无穷序列. 在他们的心目中,总有一个剩余量. 他们理解的"无穷",是边数加倍的过程可以无休止地进行下去. 他们的实际工作只进行了有限步,他们并未掌握如何从有限过渡到无穷. 正因为如此,为了逻辑的严谨,他们每次不得不使用繁冗的双重归谬法.

穷竭法的基本思路是无限接近. 在公元 3 世纪,我国魏晋时期的数学家刘徽,基于《庄子》的无限分割思想,独立地采用了类似穷竭法的思维进行了伟大的实践(当时欧几里德、阿基米德的思想并未传入我国). 他在《九章算术》的注文中,提出了"割圆术",其算法是:先在圆内作内接正 6 边形,再继续作出内接正 12 边形,内接正 24 边形……刘徽指出:"割之弥细,所失弥少,割之又割,以至于不可割,则与圆合体,而无所失矣."所谓"割之弥细,所失弥少",