

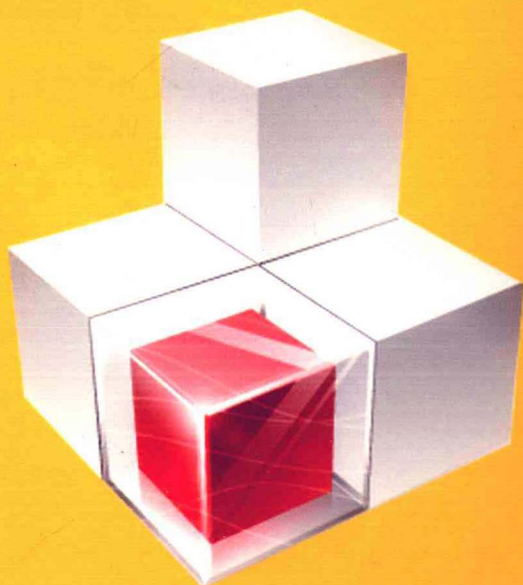
Shuxue Aosai
Fudao Congshu

数 学 奥 赛 辅 导 丛 书

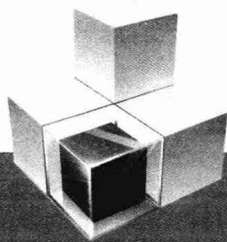
从特殊性看问题

Cong Teshuxing Kan Wenti

苏 淳 编著



中国科学技术大学出版社



数 学 奥 赛 辅导丛书

从特殊性看问题

苏 淳 编著

中国科学技术大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

从特殊性看问题/苏淳编著. —3 版. —合肥:中国科学技术大学出版社,2009.4

(数学奥赛辅导丛书)

ISBN 978-7-312-02485-6

I. 从… II. 苏… III. 数学课—高中—教学参考资料
IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 049181 号

中国科学技术大学出版社出版发行

地址:安徽省合肥市金寨路 96 号,230026

网址: <http://press.ustc.edu.cn>

合肥学苑印务有限公司印刷

全国新华书店经销

*

开本:880×1230/32 印张:6.375 字数:126 千

1988 年 1 月第 1 版 2009 年 4 月第 3 版

2009 年 4 月第 3 次印刷

定价:12.00 元

序

目前,有关中学生复习资料、课外辅导读物已经出版得很多了,甚至使一些中学生感到不堪负担,所以再要出版这类读物一定要注重质量,否则“天下文章一大抄”,又无创新之见,未免有误人子弟之嫌.写这类读物如何才能确保质量呢?我想华罗庚老师的两句名言:“居高才能临下,深入才能浅出”,应该成为写这类读物的指导思想,他本人生前所写的一系列科普读物,包括为中学生写的一些书,也堪称是这方面的范本.

中国科学技术大学数学系的老师们,在从事繁重的教学与科研工作的同时,一向对中学数学的活动十分关注,无论对数学竞赛,还是为中学生及中学教师开设讲座,出版中学读物都十分热心,这也许是受华罗庚老师的亲炙,耳濡目染的缘故,所以至今这仍然是中国科学技术大学数学系的一个传统和特色.

我看了几本他们编写的“数学奥赛辅导丛书”原稿,感到他们是按照华罗庚老师的教诲认真写作的,所以乐之为序.

龚 昇

前 言

这是一本以介绍数学解题思想方法为目的的书。

如果说问题是数学的心脏,那么解题的思想方法就应当说是数学的灵魂。思想方法,不是指解答某道题的具体方法,也不是指数学归纳法之类的技术性方法,而是指如何看待数学世界,如何考察数学问题的带有指导性的普遍思想方法。例如大家所迫切关心的“拿到一道数学题后,该如何下手?”之类的问题,就属于需要思想方法指导的普遍性问题。

当代著名美国数学家波利亚(G. Polya)说过:“我们应该讨论一般化、特殊化和类比这些过程本身,它们是获得发现的伟大源泉。”本书的目的,就在于试图“特殊化”这一认识数学世界的重要思想方法,结合大量初等数学,尤其是各类数学竞赛试题中的例子,做一番较为细致的剖析。

从特殊性看问题的思想方法,归结起来,可以大致分为从简单情形看问题和从特殊对象看问题这样两个方面。本书将分别从不同的角度介绍这两个方面的内容。

本书在内容安排上,基本保持了各节之间的相对独立性,对于书中个别带*号的例题,读者如果一时读不懂,也可先撇开不看,而不会影响后面内容的阅读。

作者关于写作这样一本书的设想,可以说是由来已久。这些年来,国内数学课外活动有了较大发展,配合一年一度的全国数学竞赛,各地纷纷举办数学讲座,开办数学夏令营、冬令营,甚至

创办数学奥赛业余学校.自1986年始,我国的数学奥赛事业,也已正式走向世界,并一举取得引人注目的好成绩.在这种形势之下,如何提高数学课外活动的科学性、系统性便成了日益尖锐的、迫切需要解决的问题.作者写这本书的一个重要目的、便是试图根据作者本人最近几年来,为全国各地中学数学教师和高中学生举办数学讲座的经验,总结出一本可为听者接受的、以讲述解题思想方法为主要内容的讲座材料.因此作者在取材上,坚持以初等数学问题作为例题,并尽量结合数学竞赛的内容需求和最新动态;在写作方法上,则坚持以例题作为线索,注意循序渐进,注意对解题经验的总结,在章节设置上,则既注意了整体上的系统性,又保持了各章节间的相对独立性.但是由于作者的能力和水平有限,错误和疏漏在所难免,还望读者批评指正.

作者应当感谢常庚哲教授的指导与帮助,他不仅向作者提供了许多资料,还向作者提供了许多写作方面的指导性意见.作者还应当向盛立人、严镇军和单墀教授致谢,写作中曾不同程度地参阅了他们的著作和举办数学讲座时的讲稿,本书第7节则主要取材于单墀教授为安徽省黄山市夏令营讲课时的讲稿.最后,作者还要感谢孙立广同志,感谢我的妻子万希仁同志,是他们为我提供了寒假期间安静的写作地点和条件.

苏 淳

于中国科学技术大学

目 次

序	(I)
前言	(Ⅲ)
1. 一把开门的钥匙	(1)
2. 一个行事原则	(12)
3. 退下来看问题	(20)
4. 由简单情形提供对比	(46)
5. 化归简单情形	(59)
6. 有趣的五点问题	(75)
7. 爬坡式推理	(85)
8. 路分两次走	(103)
9. 着眼极端情况	(113)
10. 考虑特殊对象	(135)
11. 考察上下界限	(146)
12. 关注整体性质	(154)
习题	(168)
提示与解答	(174)

1 一把开门的钥匙

拿起一道数学题,尤其是竞赛试题,最怕的就是摸不着头脑,不得其门而入,而正确的思想方法则可以提供开门的钥匙.“从特殊性看问题”就是这样一把百用皆灵的开门钥匙.

当代著名美国数学家波利亚把一般化、特殊化和类比并列地称为“获得发现的伟大源泉”.波利亚专门写了一本书《数学与猜想》论述这种思想.他在这本当代数学名著中列举了许多生动的例子,说明数学家们是如何从对简单,特殊的事物的考察中找到规律,导致伟大的发现的.波利亚在他的书中这样写道:

如果我们要考察一个关于凸多边形的命题,那么就可以先从正多边形看起,特别地,还可以先从正三角形看起.

如果我们要检验关于素数的某个命题,那么就可以先从一些具体素数,例如从 17 看起.

如果我们讨论的是一列与一切自然数 n 有关的命题,那么最好还是先来看一看 $n=2$ 和 3 的情形.

.....

先辈们的这些宝贵经验和谆谆教诲揭示了数学学习和研究的普遍规律,是应当时刻牢记的至理名言.可以说,只要

你真正了解了它们,记住了它们,并且在自己的学习中时刻想到运用它们,那么你就会尝到无尽的甜头.

我们来看一些例子.

【例 1】 能否把 $1, 2, \dots, 10$ 这 10 个自然数按某顺序写成一行,使得每相邻三个数的和都不大于 15?

刚开始拿到这个问题,一般同学都会试着去排,并且往往在碰了钉子之后不知回头.当然,先试着排一排并无不妥,问题是在碰了钉子之后应当回头,就应当认真地想一想到底是“能”还是“否”?

那么正确的做法是什么呢?我们说,那就是应当看一看某些特殊的位置上该填什么数.为了便于说明问题,我们假定把 10 个数写成一行:

$$a_1, a_2, \dots, a_{10}$$

显然,一头一尾是两个特殊的位置.那么,我们就来看看 a_{10} 和 a_1 该分别是哪两个数吧!

大家知道 $1+2+\dots+10=55$,而如果所写的方式满足题意,那么就应当有

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_9 &= (a_1 + a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) \\ &\quad + (a_7 + a_8 + a_9) \leq 45 \end{aligned}$$

从而必定要有 $a_{10} \geq 55 - 45 = 10$ 因此 a_{10} 只能为 10. 同理,此时也应当有

$$\begin{aligned} a_2 + a_3 + \dots + a_{10} &= (a_2 + a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7) \\ &\quad + (a_8 + a_9 + a_{10}) \leq 45 \end{aligned}$$

从而就一定还要有 $a_1 \geq 55 - 45 = 10$, 于是 a_1 也只能为 10. 上

述两点要求当然不能同时满足,所以这个问题的答案是“否”!即不能按题目要求把所给的10个自然数写成一行。

在这里,一头一尾这两个位置就是两个特殊对象.对它们的考察就是找着了开门的钥匙.

我们再来继续考察这个问题:15不行,那么16行不行呢?事实上,16是行的,例如把10个数排列为:10,4,2,9,1,6,7,3,5,8,就可以满足要求.那么在这种排列中有没有什么窍门呢?当然是有窍门的!首先,利用与上面类似的推理,可知第1,4,7,10个数都不能小于7,其次,要对1到6这6个数适当地两两搭配.这里面仍然需要抓住特殊对象看问题.读者不妨试着自己排一排,以体会其中的奥妙.需要指出的是:我们把1到6这6个数搭配为(4,2),(1,6)和(3,5),使得它们的和分别为6,7和8;并且让第1,4,7,10个数分别为10,9,7和8,其中都包含有一定的用意.

我们再来看一些其它例子.

【例2】在第一行中先按递增顺序写出自然数 $1, 2, \dots, n$;再在第二行中按另一种顺序写出它们.能否使得每一列中的两个数之和都是完全平方数,如果:(1) $n=9$;(2) $n=11$;(3) $n=2000$?

无可非议,大家可以先试着写一写.但是,如果没有指导思想地瞎试,那么,虽然对较小的 n 可能会找到答案,但却不能节省时间,且很难为解决较大的 n 提供启发.

我们来看一看如何做更为合理?

由于我们要为每个数找到一个“配偶”,使得两者相加得

到完全平方数. 并且各个数的“配偶”互不相同, 且都要在 $1, 2, \dots, n$ 之中. 因此, 一般来说, 数越大, 选择“配偶”时所受到的限制就越多. 由此可见, 比较合理的思路是按从大到小的顺序依次考虑.

先看(1) $n=9$. 我们先从 9 看起. 易知, 9 只能与 7 相配, 故我们也让 7 与 9 相配. 接下来考虑 8, 易知可让 8 与 1 互配. 再接下来, 不难发现, 6, 5, 4, 3 可分别与 3, 4, 5, 6 互配. 最后, 可让 2 与自己相配. 于是我们得到了本小题的肯定答案:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
8	2	6	5	4	3	9	1	7

通过本小题的解答, 我们体会到, 这种逐步自大到小的考虑顺序既合理, 又方便. 显然, 它体现了一种从特殊对象看起的思想.

再看(2) $n=11$. 仍然先从最大的数看起. 显然 $11+11=22 < 5^2$, $11 > 3^2$, 所以只能让 11 与 5 相配, 使它们之和为 $16=4^2$. 这一事实引起我们注意, 因为在(1) $n=9$ 时, 4 是与 5 相配的. 因此, 现在能否按照题意写数的关键便是: 能否让 4 与别的数相配? 显然, 4 自己已是 2^2 , 而 $2+11=13 < 4^2$, 所以唯一的选择只有 $4+5=9=3^2$. 于是问题的答案便一目了然了: 不能按照题中要求写出这 11 个数, 因为我们无法解决 11 和 4 都要与 5 相配这个矛盾.

在这里, 我们分别抓住了两个特殊对象: 11 和 4, 其中一个是最大的数, 另一个是讨论中暴露出的值得特别关注的对

象.通过分析它们,我们便找到了问题的答案.可见,它们正是开门的钥匙.我们再次品味到从特殊对象看问题的甜头.

在(3) $n=2000$ 时,我们依然先从最大的数看起.易知,可让 $2000, 1999, \dots, 25$ 依次分别与 $25, 26, \dots, 2000$ 相配,使得所配的二数之和都是 $2025=45^2$.接下来,我们立即发现,又可使 $24, 23, \dots, 1$ 依次分别与 $1, 2, \dots, 24$ 相配,使得所配二数之和都是 $25=5^2$.于是我们很快便得到这个看似复杂,其实却很容易解答的问题的答案.但是,如果我们没有合理的思路,那么情形又将如何呢?

【例3】 将 8×8 方格表中每个方格的中心点标出,共得到64个点.试问,能否用13条直线把这64个点全都两两彼此隔开?

我们知道,这64个点是被表中内部的7条水平方格线和7条竖直方格线所在的14条直线两两彼此隔开的,现在的问题便是能否减少所需直线和条数?

如果漫无目标地去想,显然会使我们不得要领.为此,我们还是来看“特殊对象”为妥.

我们来观察边框中的28个方格.显然,要是能把表中64个方格的中心点全都两两彼此隔开,那么也就能把这28个方格的中心点全都两两彼此隔开.我们知道,“边框”是两个正方形所夹成的区域.每一条直线上至多有两点位于该区域中,而每一条线段至多可把两个点彼此隔开.因此边框中的28个方格的中心点需要有28条线段才能把它们全都两两彼此隔开.而13条直线上至多有26条线段位于该区域中,

所以它们不足以隔开 28 个方格的中心点,因此就更谈不到把表中 64 个方格的中心点全都两两彼此隔开了. 所以本题的答案是否定的.

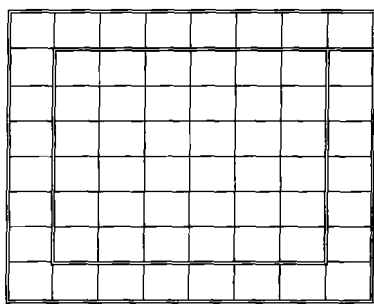


图 1.1

在这里,正是“边框中的 28 个方格的中心”这些特殊对象为我们提供了开门的钥匙. 并且借助于它们,我们即已找到了问题的答案,而无须涉及表格中间的其它点.

【例 4】 是否存在凸多面体,它的每个面都是偶数边形,而它却一共有奇数条棱?

一般来说,有关空间形体问题要比平面图形问题复杂,尤其是这类存在性问题更会使人感到难以下手. 在这里,最可靠的做法是:先从一些最熟悉的空间形体看起. 显然,四面体不合要求,六面体也不合要求,并且六面体难于提供我们进一步思考的余地. 我们还是来看六棱柱. 当然,它也不合要求. 不过,它有六个面为四边形,两个面为六边形和 18 条棱,这就给我们留下了广阔的回旋余地,使我们有可能对其加以改造,使之变为合乎要求的形体. 经过一些思索,我们终

于找到了如图所示的合乎要求的凸多面体,它有八个面为四边形,一个面为六边形和 19 条棱,并且是从六棱柱稍加改造后得到的(见图 1.2).

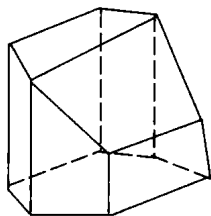


图 1.2

这个例子再次展示了从特殊对象看起这一办法的威力. 并且告诉我们, 在漫无头绪之时, 最好是先去观察一些最熟悉的最特殊的对象, 并设法通过它们找出问题的答案. 我们再来看一个很能说明问题的例子.

【例 5】 坐标平面上的所有整点(即两个坐标 x 和 y 都是整数的点 (x, y)) 都被分别染为红蓝两种不同颜色. 证明, 可以在该平面上找到一个具有对称中心的由同色点构成的无限集合.

乍一拿到这道题目, 的确漫无头绪, 令人无从下手. 怎么办? 我们还是老办法, 先看一些特殊对象. 最容易想到的对象当然是“以原点为对称中心的同色点集”, 即

$$A = \{(x, y) \mid (x, y) \text{ 与 } (-x, -y) \text{ 同色}\}$$

显然, 如果该集合 A 是无限集合, 则由此不难得知题中结论. 但是, 如果 A 不是无限集合呢? 那么我们暂时还是不能得出进一步的结论. 怎么办? 还是老办法, 再继续看一些特殊对象. 现在, 最容易想到的对象之一当然是“以点 $(1, 0)$ 为对称中心的同色点集”, 即

$$B = \{(x, y) \mid (x, y) \text{ 与 } (-x+2, -y) \text{ 同色}\}$$

如果该集合 B 是无限集合, 则由此亦可得知题中结论.

但是,如果 B 也不是无限集合呢? 我们是否还要再继续如此看下去呢? 如此下去何时是尽头呢? 所以,现在我们应当认真想一想,能不能从“ A 和 B 都不是无限集合”出发,证明出题中结论? 因为现在我们已不是一无所知,而是有了“ A 和 B 都不是无限集合”这个前提了. 好吧,就让我们来试一试!

既然“ A 和 B 都不是无限集合”,所以在平面上的广大区域内就都不会有这两个集合中的点. 换句话说,集合 A 和 B 中的点的纵坐标和横坐标的绝对值都会有有限的最大值. 为此,我们将集合 $A \cup B$ 中的点的纵坐标的绝对值的最大值记作 y_0 ,再记 $m = y_0 + 1$,于是在直线 $y = m$ 和 $y = -m$ 上就都不会有 $A \cup B$ 中的点,那么,这是什么意思呢? 我们应该好好推敲一下.

显然,对任何整数 x ,点 (x, m) 都在直线 $y = m$ 上,所以有 $(x, m) \notin A \cup B$,即该点既不在集合 A 中,也不在集合 B 中. 因此,点 $(-x, -m)$ 和 $(-x+2, -m)$ 都与点 (x, m) 异色. 同理,由于点 $(x, -m)$ 都在直线 $y = -m$ 上,所以点 $(-x, m)$ 和 $(-x+2, m)$ 都与点 $(x, -m)$ 异色. 这样一来,我们便有了推理的基础了:

如果 $(0, m)$ 是红点,则 $(0, -m)$ 和 $(2, -m)$ 都是蓝点. 由 $(0, -m)$ 是蓝点,知 $(2, m)$ 是红点,从而 $(-2, -m)$ 是蓝点,于是 $(4, m)$ 是红点,……,如此下去,并结合归纳法,即可知,对一切正整数 n , $(2n, m)$ 都是红点. 另一方面,由于 $(2, -m)$ 是蓝点,所以 $(-2, m)$ 是红点,从而 $(4, -m)$ 是蓝点,于是 $(-4, m)$ 又是红点,……,如此下去,并结合归纳法,亦可得知,对一

切正整数 n , $(-2n, m)$ 也都是红点. 综合上述两方面, 我们便推得: 集合

$$C = \{(2n, m) \mid n \text{ 为整数}\}$$

中的点全是红点. 该集合显然是一个无限集合, 并且以点 $(0, m)$ 作为其对称中心.

这样一来, 我们便证得了题中所要证明的结论.

回顾上述证明过程, 我们不仅体会到了“从特殊对象看起”这一思维方法的威力, 而且看到了如何借助“特殊对象”作为推理的前提, 发展思维, 以达到最后的目的. 这就告诉我们, 要想运用好“从特殊对象看起”这一有利武器, 不仅要养成自觉运用它的习惯, 而且还需在培养正确的思维方式上下工夫. 无论如何, 养成这一习惯是有百利而无一害的.

下面的例题取自 2001 年中国数学奥赛试题, 对我们甚有启发.

【例 6】 在正 n 边形的每个顶点上各停有一只喜鹊. 偶受惊吓, 众喜鹊都飞去. 一段时间后, 它们又都回到这些顶点上, 仍是每个顶点上一只, 但未必都回到原来的顶点. 求所有正整数 n , 使得一定存在 3 只喜鹊, 以它们前后所在的顶点分别形成的三角形或同为锐角三角形, 或同为直角三角形, 或同为钝角三角形.

本题的答案是: n 可为不等于 5 的所有不小于 3 的正整数.

作出正 n 边形的外接圆. 我们来分情况讨论.

对于 $n=5$, 有反例如图 1.3 所示. 其中每个原来的锐角

三角形都变为钝角三角形;而每个原来的钝角三角形都变为锐角三角形. 所以 $n \neq 5$.

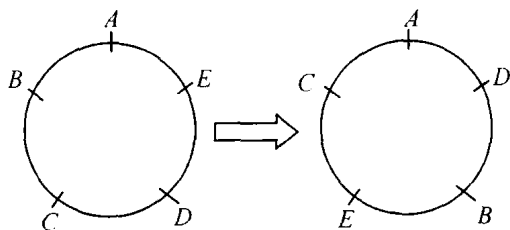


图 1.3

对于 $n=2m, m \geq 2$, 我们抓住任意一对原来位于同一直径两端(称它们为“对径”)的喜鹊 A 和 B . 如果它们后来仍然“对径”, 那么它们与任何一只别的喜鹊 C 前后所在的顶点分别形成的三角形都是直角三角形; 如果它们后来不再“对径”, 则后来与 A 对径的是某只别的喜鹊, 设为 D . 易知 A, B, D 3 只喜鹊前后所在的顶点分别形成的三角形也都是直角三角形. 所以 n 可为一切不小于 4 的偶数.

$n=3$ 的情形显然. 对于 $n=2m+1, m \geq 3$, 我们抓住任意一只喜鹊 A , 过 A 所在的顶点作外接圆的直径, 称之为 AA_1 . 由于 A_1 不是正 $2m+1$ 边形的顶点, 所以点 A_1 处没有喜鹊. 此时在 AA_1 的两侧显然各有 m 只喜鹊. 由于 $m \geq 3$, 所以必有 3 只喜鹊 B, C, D 原来位于 AA_1 的同一侧, 它们之中的任意两只都与 A 所在的顶点形成直角三角形. 并且, 由抽屉原则, B, C, D 中必有某两只后来也位于过 A 所在的顶点的直径的同一侧, 因此, 它们后来也与 A 所在的顶点形成直角三