课标本

教材完全解读

王后雄学案

总策划：熊 辉

高中数学 必修1

配人教A版

丛书主编：王后雄
本册主编：王兴旺 丁邦才

中国青年出版社

课标本

教材完全解读

王后雄学案

高中数学 必修1

配人教A版

丛书主编：王后雄
本册主编：王兴旺　丁邦才
编　　委：万　钧　李长英
李年余　刘　冰
黄清燕　曾　强
杨少超　郑艳霞
彭　景　王　杰

小熊图书

中国青年出版社

（京）新登字083号

图书在版编目（CIP）数据

教材完全解读：人教A版. 高中数学. 1：必修/王后雄主编.
—5版. —北京：中国青年出版社，2009
ISBN 978-7-5006-6380-5

Ⅰ.教… Ⅱ.王… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第085314号

策　　划：熊　辉
责任编辑：李　扬
封面设计：木头羊

教材完全解读
高中数学
必修 1

中国青年出版社 出版发行

社址：北京东四 12 条 21 号　邮政编码：100708
网址：www.cyp.com.cn
编辑部电话：（ 010 ）64034328
读者服务热线：（ 027 ）61883306
武汉市精彩印务有限公司印制　新华书店经销
889 × 1194　1/16　9.5 印张　251 千字
2009 年 6 月北京第 5 版　2009 年 6 月湖北第 6 次印刷
印数：23001 — 33000 册
定价：17.30 元
本书如有任何印装质量问题，请与承印厂联系调换
联系电话：（ 027 ）61883355

目录

知识与方法

阅读索引

第一章 集合与函数概念

第二章 基本初等函数(Ⅰ)

学法指津

——怎样学好高中数学

进入高中后,很多同学觉得学习数学很难,怎样才能学好高中数学呢?大家要注意哪些问题呢?纵观许多成功的经验和失败的教训,主要应处理好以下几个环节:

一、选一本好的教辅资料

因同学们的精力有限,不可能一门学科选两本及以上教辅资料,所以这一本的选取相当重要,甚至可以决定这一门学科成绩的好坏.《教材完全解读》必修1数学应是同学们最好的选择,它知识取之于教材,却又在教材的基础上加深加宽,涵盖了所有的重点题型和方法,可以说,老师的测验卷、测试题绝大多数都离不开本书的题型和解题方法.

二、预习与听课

有些同学说,小学、初中时,他们做完作业从不预习数学,成绩还是很好.可升到高中后,随着知识难度的增加,不事先预习,听课就感到有些吃力,往往会听不懂或似懂非懂.通过预习后,情况就不一样了.怎么预习呢?首先,把明天要上的数学教材初步阅读一下,了解下节课要讲的基本内容和思路,再看看例题,然后取出自备的预习本,不看答案自己独立地做例题,再与书上的答案对一下.如果与书上的答案和式子不符,就应对照书本弄清楚自己错在哪里,以至下次不再重犯.如果搞不清楚的,就应马上抄录在预习本上,以便于上课时提问.这对知识的吸收和消化,起了一定的促进作用,同时也能养成"不动笔墨不看书"的好习惯,可以"提醒注意",使所学的知识在头脑中的印象更深刻.

通过预习,对老师讲课的内容就有所了解,就会大大提高上课的积极性,极大地提高了思维能力和记忆能力,同时对自身的自学能力也会有一定的提高.

三、复习与作业

有些同学从来不注重数学作业和复习的先后次序,总是拿起笔来就先把作业做好,根本没想过做作业之前应先复习有关内容,或者一旦作业做不好的时候再去翻书本和看笔记.其实这些做法是不对的,因此,要合理安排作业和复习的先后次序和时间.首先应把老师课堂上所讲知识的主要内容像放电影一样回忆一遍,使自己对所学的知识有一个初步的印象,回忆不起来的地方可看看例题和笔记,对所学的新课进行一番"消化".这样在解答问题时就能做到"胸有成竹"了,使作业的错误减少,效率提高.接着,就要认真独立地做题目.每次练习都要仔细地分析,积极地思考,当成测验一般认真对待.对于一些没有把握的题目,就要马上翻书,直至做对为止,决不能敷衍了事,写个答案交差.做完作业要认真地检查,只有这样才能确保正确率与整洁及得到最大收获!

四、多做与多想

有一位数学家认为"学数学最好的方法是做数学".大家都很赞同这一观点.高中三年中所学的数学是很有限的,只有四、五本书.如果只满足于听懂老师讲的和看懂书上的例题,那是很容易的,但是仅凭这点东西绝对是无法应对高考的,因为高考中的数学题是很灵活的,我们只有在平时就不断地提高自己的水平才能应对高考.提高数学水平最好的方法就是多做题,做的题越多,见过的题型越广,在考场上形成在头脑中的思路也就越宽.在考场上做题是需要灵感的,但是灵感的迸发是基于平时的积累,所以只有平时多做题,"战时"才会有灵感.

多做习题,不无道理,我们不是常说"量变引起质变"吗?知识点的学习是需要一个过程的,尤其把现成的知识消化吸收为自己的能力这一环节至关重要,而做题是开启这扇大门的唯一钥匙,经受住检验有两种方法:一是有良好的数学素质和很强的变通能力,出色地去临场发挥;二是靠扎实的基础和解题经验制胜.毕竟我们大多数同学只能选择后者,而这扎实的基础和丰富的经验从何而来?正源于平时不懈地练习训练.对于数学学习来说总是一回生,二回熟,做得多了,这些原先陌生的题型就成了你的拿手戏了.

可"多"究竟应多到什么程度呢?为什么有些同学在完成两三本习题册后就熟练掌握了知识、技巧,而有些同学做了七八本,甚至十几本参考书仍会掉队呢?显而易见,仅是以多取胜,还是有欠缺的.故而徐耘婧同学认为,做数学题应该是以精取胜.这个"精"字,可以通过以下三个方面体现出来.

首先,是"广".就是说习题尽管只针对一个重点,却能把这个知识的外延内涵都顾及到,特别有些习题能切中要害,点出被我们忽视的细节.

其次,是"深".就是要把握尺度,在老师要求的程度上稍稍拔高些.这些加深的内容也许对考试毫无用处,但它却能使你站在一个新的高度重新审视课本知识."欲穷千里目"就必须"更上一层楼".

再次,是"懂".理解是知识的飞跃,是应用的基础,理解就要求我们更多在乎的是"这道题是怎么做的?""为什么要这样做?"和"怎么会想到这样去做的?"

这就是同学们更要注意的,"多做"还得"多想"才行!科学的做题方法应该是能够从每一道题中吸取和积累一定的经验和方法,这样做题才有意义.否则做题再多又有什么意义呢?所以一定要"多想".

那么,应该想些什么问题呢?

——这道题目考的是什么知识点?

——这道题目是怎么考的这一知识点?

——解这道题的关键点是什么?

——还有其他什么解题方法吗?

有些同学之所以考试时不会而考后一点就通,正是因为"不愿做习题",下不得苦功,不注意思考与总结而造成的!学数学不做题是不行的,著名数学家华罗庚先生曾经说过:"学数学不做题,如同入宝山而空手归."著名数学教育家弗里德曼也说过:"寻找题解不能教会,而只能靠自己学会."只有自己认真扎实地思考、演算,才能体会其中的精髓.只有不断地总结、纠错,才能迅速地提高!

第一章 集合与函数概念

1.1 集合

1.1.1 集合的含义与表示

课标三维目标

1. 了解集合的含义，掌握集合中元素的三个特点，会判断一些对象的全体能否构成一个集合.
2. 体会元素与集合间的"从属关系"，能选择自然语言、图形语言、符号语言描述不同的集合问题.
3. 记住常用数集的专用符号并会应用，会对集合进行分类，初步了解有限集、无限集、空集的含义.
4. 清楚用列举法、描述法表示集合的形式，会用列举法、描述法表示不同的集合.
5. 掌握集合的有关术语和符号，能正确地选用恰当的方法表示集合，并能解决简单的实际问题.

解题依据

1 知识·能力聚焦

1. 集合与元素

(1)元素

一般地，我们把研究对象称为元素(element). 元素常用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示.

(2)集合

把一些元素组成的总体叫做集合(set)(简称为集). 集合通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示.

集合的概念是一种描述性说明，因为集合是数学中最原始的、不加定义的概念，这与我们初中学过的点、直线等概念一样，都是用描述性语言表述的.

课本说"我们一般用花括号'{ }'表示集合"，也就是赋予了符号"{ }"新的含义：表示"所有的""全部的"，具有共同特征的研究对象都在花括号内.

例如：{圆}表示所有到定点的距离等于定长的点的轨迹，即所有的圆. {正数}表示所有大于 0 的实数组成的集合.

但以下表示方法是错误的：$A=\{$所有的圆$\}$，$B=\{$所有的三角形$\}$，因为符号"{ }"已有"所有的"的含义.

(3)元素与集合的关系

元素与集合的关系有属于与不属于两种：元素 a 属于集合 A，记作 $a\in A$，读作"a 属于集合 A"；元素 a 不属于集合 A，记作 $a\notin A$ 或 $a\overline{\in}A$，读作"a 不属于集合 A".

①$a\in A$ 与 $a\notin A$ 取决于 a 是不是集合 A 中的元素. 根据集合中元素的确定性，可知对任何 a 与 A，在 $a\in A$ 与 $a\notin A$ 这两种情况中必有一种且只有一种成立.

名题诠释

【例题1】 下列各组对象：

①接近于0的数的全体 ②比较小的正整数全体 ③平面上到点 O 的距离等于1的点的全体 ④正三角形的全体 ⑤$\sqrt{2}$的近似值的全体

其中能构成集合的组数是(　　).

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

【解析】 "接近于 0 的数""比较小的正整数"标准不明确，即元素不确定，所以①②不是集合. 同样，"$\sqrt{2}$的近似值"也不明确精确到什么程度，因此很难判定一个数，比如 2 是不是它的近似值，所以⑤也不是一个集合. ③④能构成集合. 故选 A.

【答案】 A

【例题2】 已知 $a=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$，$A=\{x\mid x=m+\sqrt{3}n,m,n\in\mathbf{Z}\}$，则 a 与 A 之间是什么关系?

【分析】 由题目可获取以下主要信息：(1)元素 a 是个无理数；(2)集合 A 中的元素都能写成一个整数与另一个整数$\sqrt{3}$倍的和. 解答本题可将 a 分母有理化，看能否化为 $m+\sqrt{3}n$ 的形式.

【解析】 $\because a=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}=2+\sqrt{3}\times1$，

而 $2,1\in\mathbf{Z}$，$\therefore 2+\sqrt{3}\in A$，即 $a\in A$.

【点评】 判断一个元素是不是某个集合的元素，就是判断这个元素是否具有这个集合的元素的共同特征. 像此类题，主要看能否将所给对象的表达式转化为集合中元素具有的形式.

【例题3】 已知集合 $M=\{x\mid x=3n,n\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{x\mid x=3n+1,n\in\mathbf{Z}\}$，$P=\{x\mid x=3n-1,n\in\mathbf{Z}\}$ 且 $a\in M,b\in N,c\in P$，设 $d=a-b+c$，则(　　).

A. $d\in M$　　B. $d\in N$　　C. $d\in P$　　D. 以上都不对

【解析】 设 $a=3n,b=3m+1,c=3s-1,m,n,s\in\mathbf{Z}$，则 $d=3n-(3m+1)+(3s-1)=3(n-m+s)-2=3(n-m+s-1)+1$，所以 $d\in N$. 故选 B.

【答案】 B

【点评】 此类题关键是弄清集合中元素的属性，只要将 d 变形为集合中元素的属性的形式，即可判断.

②符号“$\in$”“$\notin$”是表示元素与集合之间的关系的，不能用来表示集合与集合之间的关系，这一点千万要记准.

③a与$\{a\}$的区别和联系：a表示一个元素，$\{a\}$表示一个集合，该集合只有一个元素a；它们之间的联系为$a\in\{a\}$.

(4)特定集合的表示

对于一些常用的数集，我们指定一些大写的拉丁字母专门表示这些集合.

①非负整数集(或自然数集)——记作$\mathbf{N}$；

②正整数集——记作$\mathbf{N}_+$或$\mathbf{N}^*$；

③整数集——记作$\mathbf{Z}$；

④有理数集——记作$\mathbf{Q}$；

⑤实数集——记作$\mathbf{R}$.

在这些特定集合符号中，$\mathbf{N}$与$\mathbf{N}_+$的区别为$\mathbf{N}$中比$\mathbf{N}_+$多一个元素0，符号$\mathbf{N}_+$中的“+”号在下标位置，$\mathbf{N}^*$中的“*”号在上标位置，不能写成$\mathbf{N}^+$或$\mathbf{N}_*$，此种写法是错误的.

(5)集合相等

在理解了集合的概念后，我们就可以进一步研究集合与集合之间的关系，这正如两个实数之间的关系一样. 类似于实数相等，两个集合之间也存在着相等的关系.

只要构成两个集合的元素是一样的，我们就称这两个集合是相等的. 当已知两个集合相等时，这两个集合的元素是完全相同的：①个数相等；②对于其中一个集合的任一个元素，在另一个集合中也都可以找到这个元素. 例如，集合$A=\{1,2,3\}$，$B=\{1,3,2\}$，则$A=B$；集合$A=\{x|2x-1\geqslant 0\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,x\geqslant\dfrac{1}{2}\right\}$，则$A=B$.

警示：①两个集合是否相等，不能从集合的形式上看，而应该判断出这两个集合的所有元素，再根据集合相等的定义进行判断. 例如，集合$A=\{x|x^2-2x-3=0\}$，$B=\{-1,3\}$，则$A=B$. ②集合相等是集合之间的一种关系，在后面还要进一步学习集合之间的其他关系.

(6)集合的分类

按集合中元素的个数分为有限集和无限集. 有限集是指含有有限个元素的集合；无限集是指含有无限个元素的集合. 如果一个集合是有限集，并且元素的个数较少时，通常选择用列举法表示；如果一个集合是有限集且所含元素较多或是无限集时，通常选择用描述法表示.

2 方法·技巧平台

2. 集合的表示方法

集合的表示方法常见的有自然语言法、列举法、描述法、Venn图法，以及后面将会学习的用“区间”表示集合.

【例题4】 设集合$B=\left\{x\in\mathbf{N}\,\middle|\,\dfrac{6}{2+x}\in\mathbf{N}\right\}$.

(1)试判断实数1、实数2与集合B的关系；

(2)用列举法表示集合B.

【解析】 (1)当$x=1$时，$\dfrac{6}{2+x}=2\in\mathbf{N}$，所以$1\in B$，

当$x=2$时，$\dfrac{6}{2+x}=\dfrac{3}{2}\notin\mathbf{N}$，所以$2\notin B$.

(2)因为$\dfrac{6}{2+x}\in\mathbf{N}$，所以$2+x$只能取1,2,3,6.

又$x\in\mathbf{N}$，所以x只能取0,1,4，则$B=\{0,1,4\}$.

【点评】 对于第(1)问，只需将$x=1$，$x=2$分别代入$\dfrac{6}{2+x}$看它的值是否符合条件；对于第(2)问，判断一个元素是不是某个集合的元素，就是判断这个元素是不是具有这个集合的元素具有的属性特征.

【例题5】 设集合$A=\{1,a,b\}$，$B=\{a,a^2,ab\}$，且$A=B$，求$a^{2009}+b^{2010}$.

【解析】 解法一：$\because A=B$，$\therefore A,B$中元素分别对应相同.

$\therefore\begin{cases}1+b=a^2+ab,\\1\cdot b=a^2\cdot ab\end{cases}$即$\begin{cases}(a-1)(a+b+1)=0,\\(a^3-1)b=0.\end{cases}$

$\because$集合中元素互异，$\therefore a\neq 1$.

于是可求得$a=-1$，$b=0$.

解法二：$\because A=B$，$\therefore\begin{cases}a^2=1,\\ab=b\end{cases}$或$\begin{cases}a^2=b,\\ab=1.\end{cases}$

$\because$集合中元素互异，$\therefore a\neq 1$.

于是可得$a=-1$，$b=0$.

故$a^{2009}+b^{2010}=-1$.

【例题6】 用列举法表示下列集合：

(1)$\{(x,y)|x+y=3,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}\}$；

(2)$\{(x,y)|y=x^2-1,|x|\leqslant 2,x\in\mathbf{Z}\}$.

【分析】 集合中的元素是有序数对(x,y)，可以理解为直角坐标系上点的坐标，因此，此题给的集合可以理解为点集.

【解析】 (1)x,y都是自然数，而$3=0+3=1+2$. 故集合为$\{(0,3),(1,2),(2,1),(3,0)\}$.

(2)$\because|x|\leqslant 2,x\in\mathbf{Z}$，$\therefore x=0,\pm1,\pm2$，相应的$y=-1,0,3$. 故集合为$\{(0,-1),(1,0),(-1,0),(2,3),(-2,3)\}$.

【点评】 若$a\neq b$，则(a,b)与(b,a)表示不同的元素.

【例题7】 用描述法表示下列集合：

(1)大于4的全体奇数构成的集合；

(2)坐标平面内，两坐标轴上点的集合；

(3)三角形的全体构成的集合.

【分析】 由题目可获取以下主要信息：用描述法表示集合. 解答此类问题要清楚集合中代表元素是什么，元素满足什么条件.

【解析】 (1)$\{x|x=2k+1,k\geqslant 2,k\in\mathbf{N}\}$；

(2)$\{(x,y)|xy=0\}$；

(3)$\{x|x$是三角形$\}$或$\{$三角形$\}$.

【点评】 (1)用描述法表示集合，首先应弄清楚集合的属性，是数集、点集还是其他的类型. 一般地，数集用一个字母代表其元素，而点集则用一个有序数对来表示.

(2)若描述部分出现元素记号以外的字母时，要对新字母说明其含义或指出取值范围，如(1)小题.

(1)自然语言法

用文字叙述的形式描述集合的方法.使用此方法要注意叙述清楚即可,如由所有正方形构成的集合,就是自然语言表示的,不能叙述成"正方形".又如集合$\{2,4,6,8\}$用自然语言叙述为:大于等于2且小于等于8的偶数构成的集合.

(2)列举法

将集合中的元素一一列举出来,写在花括号内表示集合的方法.

用列举法表示集合时要注意以下几点:

①元素间用分隔号",";

②元素不重复;

③元素无顺序;

④对于含较多元素的集合,如果构成该集合的元素有明显规律,可用列举法,但是必须把元素间的规律显示清楚后才能用删节号.

如方程$x^2-4x+4=0$的解组成的集合用列举法表示时应写为$\{2\}$,而不要因为该方程有两个相等实根而写成$\{2,2\}$.列举法常用来表示有限集或有特殊规律的无限集,如方程$x^2-9=0$的解集为$\{3,-3\}$,所有正偶数组成的集合为$\{2,4,6,8,\cdots\}$.

(3)描述法

当集合的元素有无数多个,或者集合的元素是有限个但比较多时,用列举法显然不能或不容易表示出集合,这时就采用描述法.用集合所含元素的共同特征表示集合的方法叫做描述法.它的一般形式是:$\{x\in A|P(x)\}$或$\{x|P(x)\}$,其中x是集合中的代表元素,$P(x)$是集合元素的共同特征,注意竖线"|"不能省略.集合元素的共同特征可以用文字语言或符号语言描述,例如,由直线$y=2x$上的点组成的集合,可以表示为:$\{P|P$是直线$y=2x$上的点$\}$或$\{(x,y)|y=2x\}$.

警示:使用描述法时,还应注意以下几点:

①写清集合中代表元素的符号,如实数或实数对;

②说明该集合中元素具有的性质,如方程、不等式、函数或几何图形等;

③不能出现未被说明的字母;

④多层描述时,应当准确使用"且""或";

⑤所有描述的内容都要写在花括号内,用于描述的语句力求简明、确切.

这几种方法各有特点及适用范围:

用列举法表示集合,元素不重复,不计次序,不遗漏,且元素与元素之间用","隔开.列举法适合表示有限集,当集合中元素的个数较少时,用列举法表示集合较为方便,而且使人一目了然.

用描述法表示的集合,认识它一要看集合中竖线左边代表元素是什么形式;二要看竖线右边元素满足什么条件.对符号语言所表达含义的理解在数学中要求是很高的,希望同学们能逐步提高对符号语言的认识.

一般集合的表示方法最终结果很少用自然语言法.若要求结果用集合表示:其结果一定是用描述法、列举法或区间(后面将要学习)表示的.

◈【例题8】 下面三个集合:①$\{x|y=x^2+1\}$;②$\{y|y=x^2+1\}$;③$\{(x,y)|y=x^2+1\}$.

(1)它们各自的含义是什么?

(2)它们是不是相同的集合?

【解析】 (1)集合①$\{x|y=x^2+1\}$的代表元素是x,满足条件$y=x^2+1$中的$x\in\mathbf{R}$,∴实质上$\{x|y=x^2+1\}=\mathbf{R}$;

集合②$\{y|y=x^2+1\}$的代表元素是y,满足条件$y=x^2+1$中y的取值范围是$y\geq1$,∴$\{y|y=x^2+1\}=\{y|y\geq1\}$;

集合③$\{(x,y)|y=x^2+1\}$的代表元素是(x,y),可以认为是满足$y=x^2+1$的有序数对(x,y)的集合;也可以认为是坐标平面内的点(x,y)构成的集合,且这些点的坐标满足$y=x^2+1$.

(2)由(1)可知集合①是实数集,集合②是大于或等于1的实数集,集合③是抛物线上的点构成的点集,故它们是互不相同的集合.

【点评】 对于用描述法给出的集合,首先要清楚集合中的代表元素是什么,元素满足什么条件.这是我们研究集合的关键,否则极易出错.

◈【例题9】 判断下列集合是有限集还是无限集,并用适当的方法表示:

(1)被3除余1的自然数组成的集合;

(2)由所有小于20的既是奇数又是质数的正整数组成的集合;

(3)二次函数$y=x^2+2x-10$图象上的所有点组成的集合;

(4)设a,b是非零实数,求$y=\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{ab}{|ab|}$的所有值组成的集合.

【分析】 用列举法与描述法表示集合时,一要明确集合中的元素;二要明确元素满足的条件;三要根据集合中元素的个数来选择适当的方法表示集合.

【解析】 (1)由于被3除余1的自然数有无数个,所以此集合是无限集,适合用描述法表示.又这些自然数常表示为$3n+1(n\in\mathbf{N})$.所以可表示为$\{x|x=3n+1,n\in\mathbf{N}\}$.

(2)由题意,得满足条件的正整数有3,5,7,11,13,17,19,则此集合中的元素有7个,所以此集合是有限集,用列举法表示为$\{3,5,7,11,13,17,19\}$.

(3)由于二次函数$y=x^2+2x-10$图象上的点有无数个,所以此集合是无限集,适合用描述法表示.通常用有序数对(x,y)表示点,那么满足条件的点组成的集合可表示为$\{(x,y)|y=x^2+2x-10\}$.

(4)当$ab<0$时,$y=\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{ab}{|ab|}=-1$.

当$ab>0$时,则$a>0,b>0$或$a<0,b<0$.

若$a>0,b>0$,则有$y=\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{ab}{|ab|}=3$;

若$a<0,b<0$,则有$y=\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{ab}{|ab|}=-1$.

∴$y=\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{ab}{|ab|}$的所有值组成的集合共有两个元素$-1$和3,此集合是有限集,则用列举法表示为$\{-1,3\}$.

【点评】 一般情况下,常根据集合中所含元素的个数来选择表示集合的方法,对所含元素较少的有限集宜采用列举法,如(2)(4);对无限集或元素较多的有限集宜采用描述法,如(1)(3).

3. 集合中元素的三种属性

(1) 确定性：判断一些对象是否可以组成一个集合，主要方法是，在观察任意一个对象时，应该可以确定这一对象要么属于这一集合，要么它不属于这一集合，绝无模棱两可的情况；否则这些对象将无法组成一个集合，因此我们说集合的元素具有确定性. 即 $a\in A$ 和 $a\notin A$ 二者必居其一.

例如：给出集合{地球上的四大洋}，它的元素是：太平洋、大西洋、印度洋、北冰洋. 其他对象都不属于这个集合. 如果说"由接近$\sqrt{3}$的数组成的集合"，这里"接近$\sqrt{3}$的数"，是没有严格标准，比较模糊的概念. 它不能构成集合. 如"好人""较大的树"等都不能成为集合.

(2) 无序性：集合中的元素的无序性，是指在表示一个集合时，我们只需将某些指定的对象集中在一起，虽然习惯上会将某些元素按一定顺序来写出，但却不强调它们的顺序，当两个集合中的元素相同，即使放置顺序完全不同时，它们也表示同一集合.

例如：$\{a,b\}$ 和 $\{b,a\}$ 表示同一个集合.

集合中的元素是不分先后次序的. 集合和点的坐标是不同的概念，在平面直角坐标系中，点(1,0)和点(0,1)表示不同的两个点，而集合$\{1,0\}$和$\{0,1\}$表示同一个集合.

(3) 互异性：集合中元素的互异性，则是说对于任意一个集合而言，在这一集合中的表示出来的元素都是互不相同的个体，无论是从其表现形式来看，还是从其本质特征来看，都应强调不同的元素只能出现一次. 如：给出集合$\{1,a^2\}$，我们根据集合中元素的互异性，就已经得到了关于这个集合的几点信息，即这一集合中两个不同的元素，其中的一个是实数1，而另一个一定不是1，所以 $a\neq1$，且 $a\neq-1$.

(4) 重点提示：集合中的元素具有"三性"，即"确定性、互异性、无序性"，解题时要注意运用，即分析问题时，要思考能否利用"三性"找到解题的切入点，题目解答出来后，也要检验其元素是否满足"三性"，特别是"互异性"最容易被忽视，应引起足够的重视.

3 创新·思维拓展

4. 集合语言在函数、不等式、方程等方面的应用

集合语言是现代数学的基本语言，也就是用集合的有关概念和符号来叙述问题的语言.

集合语言（简洁、抽象）

文字语言　符号语言　图形语言

集合的三种语言之间可进行相互转化，在解决集合问题时，一般是将集合符号语言转化为图形语言、文字语言，这样有助于弄清集合是由哪些元素所构成的，有助于提高分析和解决问题的能力.

【例题10】 已知 $x^2\in\{1,0,x\}$，求实数 x 的值.

【分析】 由题目可获取以下主要信息：集合中有3个元素，且 $x\neq1$，$x\neq0$. 解答本题可由确定性知 $x^2=1,0$ 或 x，由互异性 $x\neq0,1$.

【解析】 若 $x^2=0$，则 $x=0$，此时集合为$\{1,0,0\}$，不符合集合中元素的互异性，舍去.

若 $x^2=1$，则 $x=\pm1$.

当 $x=1$ 时，集合为$\{1,0,1\}$，舍去；

当 $x=-1$ 时，集合为$\{1,0,-1\}$，符合.

若 $x^2=x$，则 $x=0$ 或 $x=1$，不符合互异性，都舍去.

综上可知：$x=-1$.

【点评】 这是应用集合中元素的特性来解题的. 这类问题既要用元素的确定性，又要利用互异性检验解的正确与否. 初学者解题时易忽视元素的互异性，必须在学习中高度重视. 另外，本类问题往往涉及分类讨论的数学思想.

【例题11】 集合 M 中的元素为自然数，且满足：如果 $x\in M$，则 $8-x\in M$，试回答下列问题：(1)写出只有一个元素的集合 M；(2)写出元素个数为2的所有集合 M；(3)满足题设条件的集合 M 共有多少个？

【分析】 抓住 $x\in M$ 时，$8-x\in M$ 这一条件，对元素进行逐一验证，然后找出满足题意的基本元素，最后写出满足各题意的解.

【解析】 (1) M 中只有一个元素，根据已知必须满足 $x=8-x$，$\therefore x=4$. 故含一个元素的集合 $M=\{4\}$.

(2) 当 M 中只含两个元素时，其元素只能是 x 和 $8-x$，从而全部含两个元素的集合 M 应为$\{0,8\}$，$\{1,7\}$，$\{2,6\}$，$\{3,5\}$.

(3) 满足条件的 M 是由集合$\{4\}$，$\{0,8\}$，$\{1,7\}$，$\{2,6\}$，$\{3,5\}$中的元素组成，它包括以下情况.

①只含1个的有$\{4\}$，$\{0,8\}$，$\{1,7\}$，$\{2,6\}$，$\{3,5\}$共5种.

②含有2个的有$\{4,0,8\}$，$\{4,1,7\}$，$\{4,2,6\}$，$\{4,3,5\}$，$\{0,8,1,7\}$，$\{0,8,2,6\}$，$\{0,8,3,5\}$，$\{1,7,2,6\}$，$\{1,7,3,5\}$，$\{2,6,3,5\}$共10种.

③含有3个的有$\{4,0,8,1,7\}$，$\{4,0,8,2,6\}$，$\{4,0,8,3,5\}$，$\{4,1,7,2,6\}$，$\{4,1,7,3,5\}$，$\{4,2,6,3,5\}$，$\{0,8,1,7,2,6\}$，$\{0,8,1,7,3,5\}$，$\{1,7,2,6,3,5\}$，$\{0,8,2,6,3,5\}$共10种.

④含有4个的有$\{4,0,8,1,7,2,6\}$，$\{4,1,7,2,6,3,5\}$，$\{4,0,8,2,6,3,5\}$，$\{4,0,8,1,7,3,5\}$，$\{0,8,1,7,2,6,3,5\}$共5种.

⑤含有5个的有$\{4,0,8,1,7,2,6,3,5\}$共1种.

共有 $5+10+10+5+1=31$ 个.

【点评】 由集合中元素的互异性及两元素之和为8的特点出发，在(3)问中，从 M 中元素的特点入手，满足条件的集合可含$\{4\}$，$\{0,8\}$，$\{1,7\}$，$\{2,6\}$，$\{3,5\}$中的1个，2个，3个，4个，5个，分别"数"之，最后求和.

【例题12】 已知集合 $A=\{x|ax^2-2x-1=0,x\in\mathbf{R}\}$，若集合 A 中至多有一个元素，求实数 a 的取值范围.

【分析】 由描述法可知集合 A 是关于 x 的方程 $ax^2-2x-1=0$ 的实数解集，首先应考虑方程是不是一元二次方程.

【解析】 当 $a=0$ 时，方程只有一个根 $-\frac{1}{2}$，则 $a=0$ 符合题意.

当 $a\neq0$ 时，则关于 x 的方程 $ax^2-2x-1=0$ 是一元二次方程. 由于集合 A 中至多有一个元素，则一元二次方程 $ax^2-2x-1=0$ 有

解决集合问题的关键：弄清集合由哪些元素所构成的．如何弄清呢？关键在于把抽象问题具体化、形象化．也就是把用描述法表示的集合用列举法来表示，或用图示法来表示抽象的集合，或用图形来表示集合，或用数轴来表示这些集合；再如，当集合的元素为有序实数对时，可用平面直角坐标系中的图形表示相关的集合等．

两个相等的实数根或没有实数根，所以 $\Delta=4+4a\leqslant 0$．解得 $a\leqslant -1$．

综上所得，实数 a 的取值范围是 $\{a\mid a=0$，或 $a\leqslant -1\}$．

【点评】　将集合语言具体化为自然语言，使它们描述的语言形象化、直观化，是解决集合问题的常用技巧．本题转化为关于 x 的方程 $ax^2-2x-1=0$ 的实数根的个数问题，这样就容易解决了．

4 能力·题型设计

速效基础演练

1．下列正确的是（　　）．

A．$0\in\mathbf{N}_+$　　B．$\pi\notin\mathbf{R}$

C．$1\notin\mathbf{Q}$　　D．$0\in\mathbf{Z}$

2．方程组 $\begin{cases}x+y=1,\\x-y=3\end{cases}$ 的解集是（　　）．

A．$\{x=2,y=-1\}$　　B．$\{2,-1\}$

C．$\{(2,-1)\}$　　D．$(-1,2)$

3．已知集合 $S=\{a,b,c\}$ 中的三个元素分别是 $\triangle ABC$ 的三边长，那么 $\triangle ABC$ 一定不是（　　）．

A．锐角三角形　　B．直角三角形

C．钝角三角形　　D．等腰三角形

4．已知集合 $A=\{1,m+1\}$，则实数 m 满足的条件是______．

5．集合 $\{x\mid x^2-2x+m=0\}$ 含有两个元素，则实数 m 满足的条件为______．

6．设集合 $A=\{1,x^2+5x\}$，集合 $B=\{1,6\}$，且集合 A 与集合 B 相等，求实数 x 的值．

知能提升突破

1．给出命题①$\{a,b,c,d\}$ 与 $\{c,d,b,a\}$ 是两个不同的集合；②方程 $(x-1)^2(x-2)=0$ 的解集为 $\{1,1,2\}$；③全体高个子中国人构成一个集合．其中正确命题的个数是（　　）．

A．1　　B．2　　C．3　　D．0

2．设有下面四个关系式：$\sqrt{2}\in\{x\mid x\in\mathbf{R}\}$；$0.3\in\mathbf{Q}$；$0\in\mathbf{N}$；$0\in\mathbf{N}_+$．其中正确的个数是（　　）．

A．1个　　B．2个　　C．3个　　D．4个

3．定义集合运算：$A*B=\{z\mid z=xy,x\in A,y\in B\}$．设 $A=\{1,2\}$，$B=\{0,2\}$，则集合 $A*B$ 的所有元素之和为（　　）．

A．0　　B．2　　C．3　　D．6

4．方程组 $\begin{cases}x-y-1=0,\\2x+y-2=0\end{cases}$ 的解集是①$\{1,0\}$；②$\{x=1$ 或 $y=0\}$；③$\{(1,0)\}$；④$\{(x,y)\mid x=1$ 且 $y=0\}$．其中正确表示的是（　　）．

A．①②　　B．①③　　C．②③　　D．③④

5．已知集合 $M=\{m\mid m=a+b\sqrt{2},b\in\mathbf{Q}\}$，则下列四个元素属于集合 M 的元素的个数是（　　）．

①$m=1+\sqrt{2}\pi$　②$m=\sqrt{7+2\sqrt{12}}$　③$m=\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}$　④$m=\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}$

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

6．由实数 $x,-x,|x|,\sqrt{x^2},-\sqrt[3]{x^3}$ 所组成的集合，最多含有元素的个数为（　　）．

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

7．设集合 $A=\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{1}{3^n},n\in\mathbf{N}\right\}$，若 $x_1\in A$，$x_2\in A$，则必有（　　）．

A．$x_1+x_2\in A$　　B．$x_1x_2\in A$

C．$x_1-x_2\in A$　　D．$\dfrac{x_1}{x_2}\in A$

8．设 a,b,c 为非零实数，则 $x=\dfrac{a}{|a|}+\dfrac{|b|}{b}+\dfrac{c}{|c|}+\dfrac{|abc|}{abc}$ 的所有值组成的集合为（　　）．

A．$\{4\}$　　B．$\{-4\}$　　C．$\{0\}$　　D．$\{0,-4,4\}$

9．用代表元素描述法表示集合{被5除余2的整数}：______．

10．已知集合 $P=\{-2,-1,0,1\}$，集合 $Q=\{y\mid y=|x|,x\in P\}$，则 $Q=$______．

11．集合 $\{3,x,x^2-2x\}$ 中 x 应满足的条件是______．

12．用描述法表示图1－1－1－1中阴影部分（含边界）的坐标的集合为______．

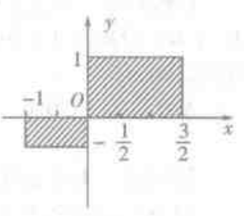

图1－1－1－1

13．已知集合 $M=\{-2,3x^2+3x-4,x^2+x-4\}$，若 $2\in M$，求 x．

14．用适当的方法表示下列集合：

(1) $A=\{(x,y)\mid x+y=4,x\in\mathbf{N}^*,y\in\mathbf{N}^*\}$；

(2) $B=\left\{\dfrac{6}{1+x}\in\mathbf{Z}\mid x\in\mathbf{N}\right\}$；

(3) 方程 $x^2+y^2-4x+6y+13=0$ 的解集；

(4) 平面直角坐标系中所有第二象限的点．

15．含有三个实数的集合可表示为 $\left\{a,\dfrac{b}{a},1\right\}$，也可表示为 $\{a^2,a+b,0\}$．求 $a^{2009}+b^{2010}$．

16．已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid ax^2-3x+2=0\}$．

(1) 若 A 是单元素集，求 a 的值及集合 A；

(2) 求集合 $P=\{a\in\mathbf{R}\mid a$ 使得 A 至少含有一个元素$\}$．

点击考例

测试要点1(3)、1(4)
[例题2]
测试要点3
测试要点2
[例题8]
测试要点1
[例题3]
测试要点3
测试要点3
[例题9]
测试要点3
测试要点3
[例题12]
测试要点2
[例题9]
测试要点1(5)
[例题5]
测试要点3
[例题11]
测试要点3
[例题10]
测试要点2
测试要点1
[例题1]
测试要点1
测试要点1 3
[例题10]
测试要点2,4
测试要点2
[例题4,6,7]
测试要点2
测试要点1 3
[例题5]
测试要点1
测试要点4
[例题12]

教材课后习题解答

练习(P_5)

1. (1) $\in$ $\notin$ $\in$ $\notin$

(2) $\notin$ 提示:$A=\{x|x^2=x\}=\{0,1\}$.

(3) $\notin$ 提示:$B=\{x|x^2+x-6=0\}=\{-3,2\}$.

(4) $\in$ $\notin$ 提示:$\because C=\{x\in \mathbf{N}|1\leqslant x\leqslant 10\}=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

2. (1) $\{-3,3\}$;(2) $\{2,3,5,7\}$;(3) $\{(1,4)\}$;

(4) $\{x|4x-5<3\}=\{x|x<2\}$.

最新5年高考名题诠释

【考题1】 若集合$M=\{0,1,2\}$,$N=\{(x,y)|x-2y+1\geqslant 0$且$x-2y-1\leqslant 0,x、y\in M\}$,则$N$中元素的个数为( ).

A. 9 B. 6 C. 4 D. 2

● 2007年江西高考题

【解析】 由题意得(1)当$x=y$时,有$\begin{cases}x-2x+1\geqslant 0,\\x-2x-1\leqslant 0,\end{cases}$即$-1\leqslant x\leqslant 1$,又$x\in M$,则有序实数对$(x,y)$有两对;(2)当$x\neq y$时,若$x=0$,则有$\begin{cases}0-2y+1\geqslant 0,\\0-2y-1\leqslant 0,\end{cases}$即$-\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant \frac{1}{2}$,又$y\in M$,则有序实数对$(x,y)$不存在;若$x=1$,则有$\begin{cases}1-2y+1\geqslant 0,\\1-2y-1\leqslant 0,\end{cases}$即$0\leqslant y\leqslant 1$,又$y\in M$,$y=0$,则有序实数对$(x,y)$有一对;若$x=2$,则有$\begin{cases}2-2y+1\geqslant 0,\\2-2y-1\leqslant 0,\end{cases}$即$\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant \frac{3}{2}$,又$y\in M$,$y=1$,则有序实数对$(x,y)$有一对.综上所述,集合$N$中元素的个数为4.

【答案】 C

【考题2】 定义集合运算:$A\odot B=\{z|z=xy(x+y),x\in A,y\in B\}$.设集合$A=\{0,1\}$,$B=\{2,3\}$,则集合$A\odot B$的所有元素之和为( ).

A. 0 B. 6 C. 12 D. 18

● 2006年山东高考题

【解析】 由题意分析:

(1) $x=0,y=2$,则$z=xy(x+y)=0$;

(2) $x=0,y=3$,则$z=xy(x+y)=0$;

(3) $x=1,y=2$,则$z=xy(x+y)=2\times 3=6$;

(4) $x=1,y=3$,则$z=xy(x+y)=3\times 4=12$.

综上所述,集合$A\odot B$的所有元素之和为:$0+0+6+12=18$,故选D.

【答案】 D

【考题3】 设$\oplus$是$\mathbf{R}$上的一个运算,A是$\mathbf{R}$的非空子集.若对任意$a、b\in A$,则有$a\oplus b\in A$,则称A对运算$\oplus$封闭.下列数集对加法、减法、乘法和除法(除数不等于零)四则运算都封闭的是( ).

A. 自然数集 B. 整数集

C. 有理数集 D. 无理数集

● 2006年辽宁高考题

【解析】 该题属于代数中群、环、域中的知识,以信息给予的形式给了考生,让考生辨别运算.自然数集中的减法运算的结果可能产生负数,如$3-4=-1\notin \mathbf{N}$;整数集中的除法运算的结果可能产生小数,$2\div 4=0.5\notin \mathbf{Z}$;无理数集中四则运算的结果可以是有理数,如$\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2\in \mathbf{Q}$.故选C.

【答案】 C

【考题4】 设$P、Q$为两个非空实数集合,定义集合$P+Q=\{a+b|a\in P,b\in Q\}$.若$P=\{0,2,5\}$,$Q=\{1,2,6\}$,则$P+Q$中元素的个数是( ).

A. 9 B. 8 C. 7 D. 6

● 2005年湖北高考题

【解析】 集合P中的元素0与Q中的元素组成$P+Q$中的元素为:1,2,6;同理P中的元素2与Q中的元素组成$P+Q$中的元素为:3,4,8;集合P中的元素5与集合Q中的元素组成$P+Q$中的元素为:6,7,11;综上所述,组成$P+Q$中的元素为:1,2,6,3,4,8,7,11共8个.故选B.

【答案】 B

【点评】 本题应用元素分析法,即解题前先分析元素所具有的形式,属性如何,解题后检验元素是否满足它的三性(确定性、互异性、无序性).元素分析法能使我们解题达到最优化.

1.1.2 集合间的基本关系

课标三维目标

1. 理解集合之间的包含关系与相等关系，能识别给定集合的子集和真子集，能准确地使用相关的术语和符号.
2. 会使用 Venn 图、数轴表示集合间的关系，体会 Venn 图在分析理解集合问题中的作用.
3. 掌握子集和空集的性质，并能在解题中灵活运用，了解集合的子集个数的求法.

解题依据

1 知识·能力聚焦

1. 基本概念

(1)子集

对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 的元素，我们说集合 A 包含于集合 B，或说集合 B 包含集合 A，记作：$A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$).

这时我们也说集合 A 是集合 B 的子集.

需要注意的几点：

①"A 是 B 的子集"的含义是：集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 中的元素，即由任意 $x\in A$ 能推出 $x\in B$.

②当 A 不是 B 的子集时，我们记作"$A\nsubseteq B$"(或 $B\nsupseteq A$).

③任何一个集合是它本身的子集，因为对于任一个集合 A，它的每一个元素都属于本身，记作 $A\subseteq A$.

(2)集合相等

如果集合 A 的任何一个元素，都是集合 B 的元素，同时集合 B 的任何一个元素都是集合 A 的元素，我们就说集合 A 等于集合 B，记作 $A=B$.

需要理解以下两点：

①若 $A\subseteq B$，同时 $A\supseteq B$，则 $A=B$. 因为 $A\subseteq B$，所以 A 的元素都是 B 的元素；又因为 $B\subseteq A$，所以 B 的元素都是 A 的元素，这就是说，集合 A 与集合 B 的元素完全相同，因此，$A=B$.

②证明两个集合相等的方法：若 A、B 两个集合是元素较少的有限集，可用列举法将元素列举出来，说明两个集合的元素完全相同，从而 $A=B$；若 A、B 是无限集时，欲证 $A=B$，只需证 $A\subseteq B$ 与 $B\subseteq A$ 都成立即可. 即可设任意 $x_0\in A$，证明 $x_0\in B$，从而得出 $A\subseteq B$. 又设任意 $y_0\in B$，证明 $y_0\in A$，从而得到 $B\subseteq A$，进而证明得到 $A=B$.

③判断两集合是否相等可用列举法.

[例] 已知集合 $A=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{1}{2}k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{1}{4}k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$，判断集合 A 与集合 B 是否相等.

可用列举法解之.

即 $A=\left\{\cdots,\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4},\cdots\right\}$，

$B=\left\{\cdots,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4},\pi,\frac{5\pi}{4},\cdots\right\}$.

观察可知，$A\neq B$.

名题诠释

◈【例题1】 已知集合 $A=\{0,1,2\}$，$B=\{x|x\subseteq A\}$，求集合 B.

【分析】 由题目可获取以下主要信息：(1)集合 A 已知；(2)集合 B 中的元素是集合 A 的子集. 解答本题的关键是正确写出集合 A 的子集.

【解析】 集合 B 的元素是集合 A 的所有子集.

用列举法表示 $B=\{\varnothing,\{0\},\{1\},\{2\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\},\{0,1,2\}\}$.

【点评】 求集合的子集问题时，一般可以按照集合的元素个数进行分类，再依次找出每类中符合要求的集合. 集合子集个数规律为：含 n 个元素的集合有 2^n 个子集，其中空集和集合本身易漏掉.

◈【例题2】 下列各组中的两个集合相等的有(　　).

①$P=\{x|x=2n,n\in\mathbf{Z}\}$，$Q=\{x|x=2(n-1),n\in\mathbf{Z}\}$；

②$P=\{x|x=2n-1,n\in\mathbf{N}_+\}$，$Q=\{x|x=2n+1,n\in\mathbf{N}_+\}$；

③$P=\{x|x^2-x=0\}$，$Q=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{1+(-1)^n}{2},n\in\mathbf{Z}\right\}$.

A. ①②③　　B. ①③　　C. ②③　　D. ①②

【解析】 ①中对于 Q，$n\in\mathbf{Z}$，$\therefore n-1\in\mathbf{Z}$，$Q$ 亦表示偶数集，$\therefore P=Q$.

②中 P 是由 $1,3,5,\cdots$ 所有正奇数组成的集合，Q 是由 $3,5,\cdots$ 所有大于 1 的正奇数组成的集合，$1\notin Q$，$\therefore Q\subsetneqq P$.

③中 $P=\{0,1\}$，当 n 为奇数时，$x=\frac{1+(-1)^n}{2}=0$；当 n 为偶数时，$x=\frac{1+(-1)^n}{2}=1$，$\therefore Q=\{0,1\}$，$P=Q$.

【答案】 B

【点评】 判断两个集合相等有两种方法：

(1)看两个集合中元素是否完全相同，有两种方法：①将两个集合中元素一一列出，比较之；②看集合中的代表元素是否一致且代表元素满足的条件是否一致. 若均一致，则两集合相等.

(2)利用本节集合相等的定义证明 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$，则 $A\subseteq B$.

◈【例题3】 设集合 $A=\{2,8,a\}$，$B=\{2,a^2-3a+4\}$，且 $A\supsetneqq B$，求 a 的值.

(3)真子集

如果 $A\subseteq B$，且 $A\neq B$，就说集合 A 是集合 B 的真子集，记作 $A\subsetneqq B$. 它用 Venn 图表示如图 1－1－2－1.

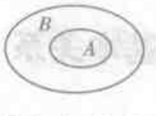

图 1－1－2－1

空集是任何非空集合的真子集.

子集包含真子集和等集两种情况.

(4)空集

不含有任何元素的集合称为空集，记作：$\varnothing$. 并规定：空集是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集.

[例] 写出集合 $\{a,b\}$ 的所有子集，并指出哪些是它的真子集.

[解] 所有子集：$\varnothing$，$\{a,b\}$，$\{a\}$，$\{b\}$；真子集：$\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$.

2 方法·技巧平台

2. 元素与集合、集合与集合之间的关系

元素与集合的关系是属于与不属于的关系，集合与集合之间的关系是包含、真包含、相等的关系，要按照定义仔细区别.

(1)$\in$ 与 $\subseteq$ 的区别：$\in$ 是表示元素与集合之间的关系的，因此有 $1\in\mathbf{N}$，$-1\notin\mathbf{N}$ 等；$\subseteq$ 是表示集合与集合之间的关系的，因此有 $\mathbf{N}\subseteq\mathbf{R}$，$\varnothing\subseteq\mathbf{R}$ 等.

(2)a 与 $\{a\}$ 的区别：一般地 a 表示一个元素，而 $\{a\}$ 表示只有一个元素的一个集合，因此有 $1\in\{1,2,3\}$，$0\in\{0\}$，$\{1\}\subseteq\{1,2,3\}$ 等，不能写成 $0=\{0\}$，$\{1\}\in\{1,2,3\}$，$1\subseteq\{1,2,3\}$ 等.

3. 有限集合的子集个数

当一个集合的元素个数很少时，我们可以写出它的全部子集，当然也就知道其子集的个数了.

[例] 列举集合 $\{1,2,3\}$ 的所有子集.

[解] 含有 0 个元素的子集有：$\varnothing$；

含有 1 个元素的子集有：$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$；

含有 2 个元素的子集有：$\{1,2\}$，$\{1,3\}$，$\{2,3\}$；

含有 3 个元素的子集有：$\{1,2,3\}$.

共有子集的个数为 8 个.

当元素个数较多时，一一写出子集不太现实，对于其子集的个数有如下结论：

有限集合的子集个数：

(1)n 个元素的集合有 2^n 个子集.

(2)n 个元素的集合有 2^n-1 个真子集.

(3)n 个元素的集合有 2^n-1 个非空子集.

(4)n 个元素的集合有 2^n-2 个非空真子集.

4. 子集的概念与性质在解题中的应用

(1)子集的概念是由讨论集合与集合间的关系引出的，两个集合 A 与 B 之间的关系如下：

$$\begin{cases}A\subseteq B\begin{cases}A=B\Leftrightarrow A\subseteq B\text{ 且 }B\subseteq A,\\ A\neq B\Rightarrow A\subsetneqq B;\end{cases}\\ A\nsubseteq B.\end{cases}$$

其中 $A\nsubseteq B$(或 $B\nsupseteq A$)表示集合 A 不包含于集合 B(或集合 B 不包含集合 A).

【解析】 因为 $A\subsetneqq B$，所以 $a^2-3a+4=8$ 或 $a^2-3a+4=a$.

由 $a^2-3a+4=8$，得 $a=4$ 或 $a=-1$；

由 $a^2-3a+4=a$，得 $a=2$.

经检验：当 $a=2$ 时集合 A、B 中元素有重复，与集合元素的互异性矛盾，所以符合题意的 a 的值为 -1、4.

【点评】 此类题的关键是利用子集的概念解题，但易错点是对 a 的值的检验，常被大家忽视.

【例题 4】 以下各组中两个对象是什么关系，用适当的符号表示出来. ①0 与 $\{0\}$；②0 与 $\varnothing$；③$\varnothing$ 与 $\{0\}$；④$\{0,1\}$ 与 $\{(0,1)\}$；⑤$\{(b,a)\}$ 与 $\{(a,b)\}$.

【解析】 ①$0\in\{0\}$；②$0\notin\varnothing$；

③$\varnothing$ 与 $\{0\}$ 都是集合，两者的关系是"包含与否"的关系.

$\therefore \varnothing\subsetneqq\{0\}$，也可 $\varnothing\subseteq\{0\}$.

④$\{0,1\}$ 是含两个元素 0,1 的集合；而 $\{(0,1)\}$ 是以有序数对为元素的集合，它只含一个元素. $\therefore \{0,1\}\neq\{(0,1)\}$.

⑤当 $a=b$ 时，$\{(a,b)\}=\{(b,a)\}$；

当 $a\neq b$ 时，$\{(a,b)\}\neq\{(b,a)\}$.

【例题 5】 (1)同时满足：①$M\subseteq\{1,2,3,4,5\}$；②$a\in M$，则 $6-a\in M$ 的非空集合 M 有(　　).

A. 16 个　　B. 15 个　　C. 7 个　　D. 6 个

(2)已知集合 M 满足 $\{1,2\}\subseteq M\subseteq\{1,2,3,4,5\}$，写出集合 M.

【解析】 (1)$a=3$ 时，$6-a=3$；$a=1$ 时，$6-a=5$；

$a=2$ 时，$6-a=4$；$a=4$ 时，$6-a=2$；$a=5$ 时，$6-a=1$，

$\therefore$ 非空集合 M 可能是：$\{3\}$，$\{1,5\}$，$\{2,4\}$，$\{1,3,5\}$，$\{2,3,4\}$，$\{1,2,4,5\}$，$\{1,2,3,4,5\}$ 共 7 个. 故应选 C.

(2)①当 M 中含有两个元素时，M 为 $\{1,2\}$；

②当 M 中含有三个元素时，M 为 $\{1,2,3\}$，$\{1,2,4\}$，$\{1,2,5\}$；

③当 M 中含有四个元素时，M 为 $\{1,2,3,4\}$，$\{1,2,3,5\}$，$\{1,2,4,5\}$；

④当 M 中含有五个元素时，M 为 $\{1,2,3,4,5\}$.

所以满足条件的集合 M 为 $\{1,2\}$，$\{1,2,3\}$，$\{1,2,4\}$，$\{1,2,5\}$，$\{1,2,3,4\}$，$\{1,2,3,5\}$，$\{1,2,4,5\}$，$\{1,2,3,4,5\}$.

【点评】 要求有限集的子集个数，先要明确它有几个元素；若将(2)改为"求集合 M 的个数"，则问题可化为求集合 $\{3,4,5\}$ 的子集个数，即 $2^3=8$ 个.

【例题 6】 已知集合 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant5\}$，$B=\{x|m+1\leqslant x\leqslant2m-1\}$，若 $B\subseteq A$，求实数 m 的取值范围.

【解析】 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant5\}$，$B=\{x|m+1\leqslant x\leqslant2m-1\}$，且 $B\subseteq A$.

(1)若 $B=\varnothing$，则 $m+1>2m-1$，解得 $m<2$，此时有 $B\subseteq A$；

(2)若 $B\neq\varnothing$，则 $m+1\leqslant2m-1$，即 $m\geqslant2$，

由 $B\subseteq A$ 得 $\begin{cases}m\geqslant2,\\ m+1\geqslant-2,\\ 2m-1\leqslant5,\end{cases}$ 解得 $2\leqslant m\leqslant3$.

由(1)(2)得 $m\leqslant3$.

$\therefore$ 实数 m 的取值范围是 $\{m|m\leqslant3\}$.

(2)子集具有以下性质：

①$A\subseteq A$，即任何一个集合都是它本身的子集.

②如果 $A\subseteq B$，$B\subseteq A$，那么 $A=B$.

③如果 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，那么 $A\subseteq C$.

④如果 $A\subsetneqq B$，$B\subsetneqq C$，那么 $A\subsetneqq C$.

(3)包含的定义也可以表述成：如果由任一 $x\in A$，可以推出 $x\in B$，那么 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$).

不包含的定义也可以表述成：两个集合 A 与 B，如果集合 A 中存在至少一个元素不是集合 B 的元素，那么 $A\nsubseteq B$(或 $B\nsupseteq A$).

(4)空集是任何集合的子集，即对于任一个集合 A，都有 $\varnothing\subseteq A$.

在解决诸如 $A\subseteq B$，或 $A\subsetneqq B$ 类问题时，必须优先考虑，$A=\varnothing$ 时是否满足题意.

[例] 已知集合 $A=\{x|x^2-2x-3=0\}$，$B=\{x|ax=1\}$，若 $B\subsetneqq A$. 求实数 a 构成的集合 M.

[解] $A=\{x|x^2-2x-3=0\}=\{-1,3\}$.

$\because B\subsetneqq A$，$\therefore ax=1$ 的解为 -1 或 3 或无解.

当 $ax=1$ 的解为 -1 时，由 $a\cdot(-1)=1$，得 $a=-1$；

当 $ax=1$ 的解为 3 时，由 $a\cdot 3=1$，得 $a=\frac{1}{3}$；

当 $ax=1$ 无解时，$a=0$.

综上所述，$a=-1$ 或 $\frac{1}{3}$ 或 0.

$\therefore M=\left\{-1,\frac{1}{3},0\right\}$.

3 创新·思维拓展

5. 数形结合在子集中的应用

用形来代数，形象而直观，因此数形结合的思想在数学中广泛应用，数轴是表示实数的，任何一个实数在数轴上均可用一个点来表示，反之，数轴上任何一点都代表一个实数. 在数轴上表示一个不等式的取值范围，形象而直观，因此也广泛用于求子集的问题中.

[例] 已知集合 $A=\{x|1\leqslant x<4\}$，$B=\{x|x<a\}$. 若 $A\subsetneqq B$，求实数 a 的取值范围.

[解] 由 $A\subsetneqq B$，确定 a 与 1、4 的大小关系，将集合 A、B 表示在数轴上(如图 1－1－2－2)，更容易发现三个点间的关系.(注意等号是否取得到)

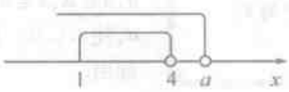

图 1－1－2－2

$\therefore a\geqslant 4$.

【点评】 首先要特别重视 $\varnothing$ 是任何集合的子集，其次要学会分类讨论的数学思想.

◈【例题7】 设集合 $A=\{x|x^2+4x=0,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x|x^2+2(a+1)x+a^2-1=0,x\in\mathbf{R}\}$，若 $B\subseteq A$，求实数 a 的值.

【分析】 要解决此题，应明确如下问题：(1) $B\subseteq A$ 包含 $B\subsetneqq A$ 和 $B=A$ 两种情况，解题时必须分类讨论；(2)一元二次方程根的讨论.

【解析】 $A=\{x|x^2+4x=0\}=\{-4,0\}$.

$\because B\subseteq A$，$\therefore$ 分 $B=A$，$B\subsetneqq A$ 两种情况讨论.

(1)当 $A=B$ 时，$B=\{-4,0\}$.

即 $-4,0$ 是方程 $x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$ 的两根，于是得 $a=1$.

(2)当 $B\subsetneqq A$ 时，

若 $B=\varnothing$，则 $\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)<0$，

解得 $a<-1$.

若 $B\neq\varnothing$，则 $B=\{-4\}$ 或 $\{0\}$，

$\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)=0$，解得 $a=-1$，

验证知 $B=\{0\}$ 满足条件.

综上可知，所求实数 a 的值为 $a=1$ 或 $a\leqslant -1$.

◈【例题8】 若不等式 $|x|<1$ 成立，不等式 $[x-(a+1)][x-(a+4)]<0$ 也成立，求 a 的取值范围.

【解析】 若设不等式 $|x|<1$ 的解集为 A，不等式 $[x-(a+1)][x-(a+4)]<0$ 的解集为 B，则有 $x\in A$ 时，$x\in B$，所以 A 是 B 的子集，可用集合间的包含关系求 a.

$A=\{x||x|<1\}=\{x|-1<x<1\}$，$B=\{x|[x-(a+1)][x-(a+4)]<0\}=\{x|a+1<x<a+4\}$.

依题意，有 $A\subseteq B$，在数轴上作出包含关系图形，如图 1－1－2－3，有 $\begin{cases}a+1\leqslant -1,\\ a+4\geqslant 1,\end{cases}$ 解得 $-3\leqslant a\leqslant -2$.

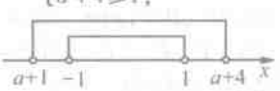

图 1－1－2－3

【点评】 本题构思新颖，将不等式问题转化到一个集合是另一个集合的子集关系上来，然后利用集合之间的包含关系来求解.

4 能力·题型设计

速效基础演练

1. 集合 $A=\{0,1,2\}$ 的子集的个数是(　　).

A. 16　　B. 8　　C. 7　　D. 4

2. 下列四个集合中，表示空集的是(　　).

A. $\{0\}$

B. $\{(x,y)|y^2=-x^2,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$

C. $\{x||x|=5,x\in\mathbf{Z},x\notin\mathbf{N}\}$

D. $\{x|2x^2+3x-2=0,x\in\mathbf{N}\}$

点击考例
测试要点3
[例题5]
测试要点2
测试要点1
[例题3]
测试要点1
测试要点4,5
[例题8]

3. 设 $M=\{x|x\leqslant\sqrt{10}\}$，$a=\sqrt{2}+\sqrt{3}$，则(　　).

A. $a\subsetneqq M$　　B. $a\notin M$

C. $\{a\}\in M$　　D. $\{a\}\subsetneqq M$

4. 已知集合 $A=\{-1,3,m\}$，$B=\{3,4\}$，若 $B\subseteq A$，则实数 $m=$________.

5. 已知集合 $M=\{x|5<x<10\}$，集合 $P=\{x|x<m+1\}$，且 $M\subseteq P$，则实数 m 的取值范围是________.

6. 如图 1－1－2－4 所示的 Venn 图中反映的是四边