$$\frac{I-S}{T}=(I-S)\div\sqrt{\frac{2(I-S)}{g}}=\frac{1}{2}$$

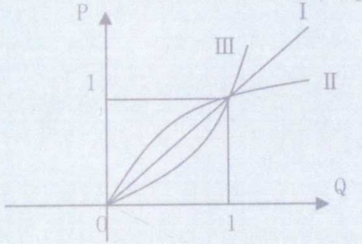
$$\int_0^T gte^{-Kt}dt=\frac{g}{K^2}(1-e^{-KT}-KTe^{-KT})$$

# 数学模型应用研究

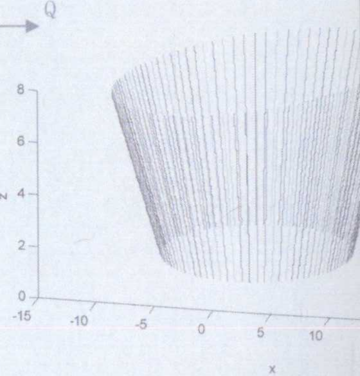
SHUXUE MOXING
YINGYONG YANJIU

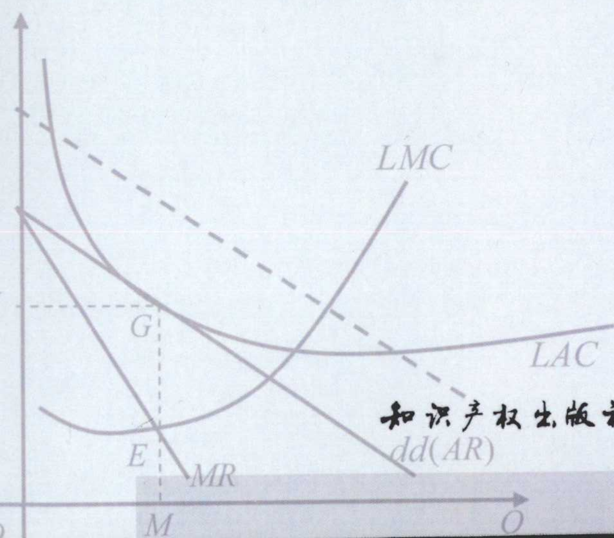
## ——实践与认识

齐松茹　杨圣宏◇著




图（3）




知识产权出版社

$$\frac{I-S}{T}=(I-S)\div\sqrt{\frac{2(I-S)}{g}}=$$

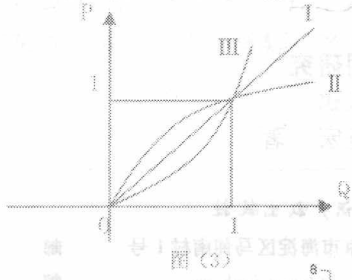
$$=\int_0^T gte^{-Kt}dt=\frac{g}{K^2}(1-e^{-KT}-KTe^{-KT})$$

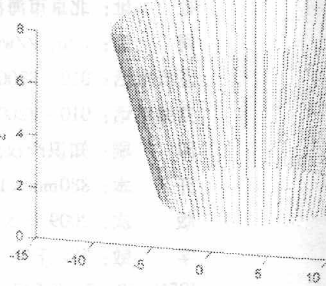
# 数学模型应用研究

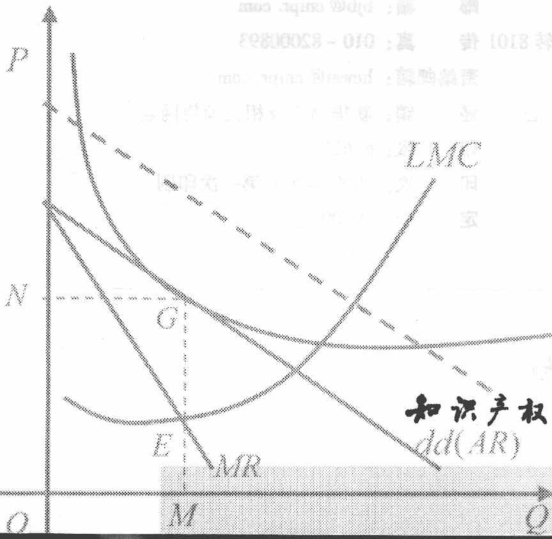
SHUXUE MOXING
YINGYONG YANJIU

## ——实践与认识

齐松茹　杨圣宏◇著




知识产权出版社

**内容提要**

本书是作者在数学模型应用研究、实践的基础上，以实践研究成果为案例，分析、研究数学模型应用的规律性著作。全书分为数学模型在经济学科的理论研究中的应用和数学模型在相关学科领域解决实际问题中的应用两篇。

本书可作为高等院校数学课程的教学改革及数学建模课程教学的教材或参考书。

**责任编辑**：何 薇　　**责任校对**：韩秀天
**封面设计**：Ddesign书装设计　　**责任出版**：卢运霞

**图书在版编目（CIP）数据**

数学模型应用研究：实践与认识／齐松茹，杨圣宏著．北京：知识产权出版社，2009.5

ISBN 978－7－80247－686－8

Ⅰ．数…　Ⅱ．①齐…②杨…　Ⅲ．数学模型－研究　Ⅳ．O141.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 049771 号

**数学模型应用研究**
**——实践与认识**
齐松茹　杨圣宏　著

---

出版发行：知识产权出版社
社　　址：北京市海淀区马甸南村 1 号　　邮　　编：100088
网　　址：http：//www.ipph.cn　　邮　　箱：bjb@cnipr.com
发行电话：010－82000893　82000860 转 8101　　传　　真：010－82000893
责编电话：010－82000860 转 8107　　责编邮箱：hewei@cnipr.com
印　　刷：知识产权出版社电子制印中心　　经　　销：新华书店及相关销售网点
开　　本：880mm×1230mm　1/32　　印　　张：6.625
版　　次：2009 年 5 月第一版　　印　　次：2009 年 5 月第一次印刷
字　　数：182 千字　　定　　价：19.00 元
ISBN 978－7－80247－686－8/O·004

---

# 序

随着科技进步和社会发展，数学这门历史悠久的学科得到了日益广泛的应用，把数学和实际应用问题联系起来的纽带，就是数学模型。目前在科学研究、工程技术、经济管理乃至日常生活的各个领域，人们都会发现数学模型不可低估的重要作用。经过多年的教学实践和对建模问题的深入研究，深圳职业技术学院的齐松茹、杨圣宏两位老师撰写的《数学模型应用研究——实践与认识》就是关于数学模型和有关数学建模问题的论著，有益于读者应用数学模型的技术与方法解决实际问题。

这本著作突出了两大特点：数学模型在经济学科领域理论研究中的应用和利用数学知识和计算机技术描述实际现象、处理并解决实际应用问题。作者以他们将数学模型在经济学科领域理论研究中应用发表的论文为案例，揭示数学模型在经济学科领域理论研究中应用的方法和规律，对经济学科领域理论研究有促进作用。本著作利用数学模型解决实际应用问题时，能分类指导，在几个比较重要的领域里，列举了许多经作者研究发表了的使用数学技术和方法解决实际问题的案例，由浅入深地阐述了应用数学知识、数学建模、数值计算和数据处理的能力解决实际问题的规律。

在高职院校开设数学建模课，是一种崭新的探索和尝试，既要贯彻“以应用为目的，以基本够用为标准”的原则，以满足高等职业教育实践性、应用性强的特点，又要提倡学生自己来发现问题、分析问题和解决问题，让学生经历提出问题、解决问题的建模过程。但是，目前在市场上能够结合高职院校实际情况的教材并不多见，通过编写不同风格、不同层次的数学建模教材，对发展我国

的数学建模数学，尤其是高职院校的数学建模教学改革是不无裨益的。

本著作可作为数学专业和经济专业的科技人员及师生进行科研和教学的参考书，也可作为一本突出高职院校特色的数学建模教材，其中的案例来自于作者及其合作者实践经验的积淀和研究成果的奉献，故本书的实例突显了在工程技术、经济预测与经济政策制订以及卫生、体育等公共事业管理等方面的特色。全书内容广泛，将数学建模的技巧、方法和大量的应用实例融为一体，内容生动，通俗易懂。各实例独立成篇，结构严谨，内容完整，覆盖面广，分析详尽，实用性强，便于教学。

该书对于在广大高职以及青年学生中普及“数学技术和方法”，使其在欣赏、学习和建立数学模型的过程中体会应用数学方法，在整体上促进数学的科普教育进课堂，推动以数学技术和方法为代表的新一代创新思维等方面，我认为是一本难得的好著作，故乐于荐之。

郝志峰

于广州大学城、广东工业大学

2009年3月20日

# 前　言

应用数学模型解决学科领域中的理论问题和实际问题，已成为人们对科研对象获得更深刻的认识，取得进一步成果的重要手段。但数学模型的应用有什么规律，怎样将数学模型应用到各学科领域并取得成果，是各学科领域科研人员和实际工作人员迫切希望解决的问题。

在进行数学模型应用研究时，我们对上述问题进行了认真思考。在进行数学模型应用研究实践的基础上，选择部分成果为案例，结合这些案例分析数学模型应用的规律。现将我们进行数学模型应用研究的实践与认识著成此书，敬献给读者，以达到抛砖引玉、共同提高、成果共享的目的。

我们认为数学模型的应用可分为在相关学科领域的理论研究中的应用和在相关学科领域解决实际问题中的应用两类。

（一）*在相关学科领域的理论研究中的应用*

一个学科只有较好地把数学引进该学科领域，才是比较成熟的学科。我们先选择虽然较早地引进了数学，但数学应用的程度不如工程技术等学科领域的经济学科作为研究对象，来说明数学模型在相关学科领域的理论研究中应用的规律。

数学模型在经济学科的理论研究中的应用具有如下规律。

（1）关键步骤。

①发现疑点、提出数学问题；

②分析条件、建立数学模型；

③解答模型、说明经济意义。

（2）操作方法。从数学的角度来审视经济学科的相关理论，

可从如下方面进行考察：

①概念、定义的合理性；

②定理、公式的科学性；

③方法的适用性；

④结论的精确性。

在审视考察的过程中，提出数学问题、作出数学解答，说明经济意义。

（二）在相关学科领域解决实际问题中的应用

数学模型在相关学科领域解决实际问题时，由于实际问题已提出，数学模型应用的规律在于：

（1）分析、揭示实际问题的数学本质；

（2）选择、建立实际问题的数学模型；

（3）解答、说明模型结论的实际意义。

我们从如下三方面来说明数学模型在相关学科领域解决实际问题中应用的规律：

（1）在工程技术上的应用；

（2）在经济预测与制订经济政策上的应用；

（3）在卫生、体育等事业的管理上的应用。

我们还认识到：要搞好数学模型的应用工作，必须破除对数学模型应用的神秘感。只要掌握了微积分、线性代数、概率论与数理统计和运筹学等数学知识，并能运用数学软件进行计算，一般工程技术、经济管理等领域的数学模型应用问题总能解决。

人类对客观世界的认识是不断深化的，从定性分析到定量分析、从近似到精确……在人类对客观世界的认识过程中，数学模型的应用正发挥着并将进一步发挥着越来越重要的作用。我们相信对数学模型的应用研究将得到蓬勃发展，特别在将计算机信息科学引入数学模型的应用研究后，数学模型的应用研究将发展成为科学研究的一个重要领域。

限于水平，疏漏之处难免，敬请指正！本书写作过程中，得到

多位专家学者，特别是参与了部分数学模型应用研究实践的唐玉兰、雷田礼、杨丽娟、孟香惠、唐群、杨全、杨化、彭建新、廖燕玲等专家教授的关心，我们表示衷心感谢！

# 目　　录

# 第一篇　数学模型在经济学科理论研究中的应用

一个学科只有较好地把数学引进该学科领域，才是比较成熟的学科。经济学科虽然较早地引进了数学，但数学应用的深入程度不如工程技术等学科领域。从数学的角度来审视经济学科的相关理论：发现疑点、提出数学问题；分析条件、建立数学模型；解答模型、说明经济意义，对促进经济学科理论研究的发展是非常必要的。

具体操作时，可从数学的角度对如下方面进行考察：

（1）概念、定义的合理性；

（2）定理、公式的科学性；

（3）方法的适用性；

（4）结论的精确性。

在审视考察的过程中，提出数学问题、作出数学解答、说明经济意义，从而解决经济领域理论研究中的问题。

## 第一章　关于概念、定义的合理性

经济学科中的不少概念和定义，不但有其经济意义，而且有较深刻的数学背景，只有揭示了这些概念和定义的数学背景，才能理解这些概念和定义的合理性。

案例1中讨论的微观经济学中垄断竞争市场长期均衡的经济学概念，就有这种均衡状态存在性的问题。其数学背景是垄断竞争市场上长期平均成本曲线、需求曲线、平均收益曲线等诸线共点与诸

点共线的问题。类似地，案例 4 中讨论的微观经济学中垄断市场短期均衡的经济学概念，也有这种均衡状态存在性的问题。其数学背景是垄断市场上短期平均成本曲线、需求曲线、平均收益曲线等诸线共点与诸点共线的问题。案例 1 和案例 4 对这种存在性的问题给出了数学证明。

案例 2 讨论管理会计中固定资产经济寿命的定义，经济学中固定资产的经济寿命定义为固定资产年均成本最低的使用年限，这里的年均成本最低涉及数学的极值问题。而固定资产的经济寿命的直观意义应是从其开始使用，到经济上最有利的更新固定资产使之恢复到初始状态时刻的使用时间。案例 2 用数学方法证明了这两者的一致性，从而说明了固定资产的经济寿命定义的合理性。

案例 3 讨论财务管理中企业最佳资本结构的定义，财务管理中将企业最佳资本结构定义为能使企业加权平均资本成本最低，同时企业价值最大的资本结构。案例 3 证明了企业加权平均资本成本最低与企业价值最大的一致性，从而说明了企业最佳资本结构定义的合理性。

## 案例 1　关于垄断竞争市场长期均衡存在性的数学证明

**摘要：** 本案例通过平均收益、边际收益、长期平均成本、长期边际成本间关系的一系列命题的数学证明，证明了垄断竞争市场长期均衡的存在性。

微观经济学研究了垄断竞争市场的长期均衡。在短期中，每一个垄断竞争的企业都是垄断者，它以自己的产品差别在一部分消费者中形成垄断地位，在短期内有超额利润。在长期中，垄断竞争市场存在激烈的竞争，各企业可以仿制别人有特色的产品，可以创造自己更有特色的产品，也可以通过广告来创造消费者的需求，形成自己的垄断地位。竞争的结果，使短期内有超额利润的各种有差别的产品的价格下降，从而需求曲线向下移动。这时，企业根据长期

边际成本等于边际收益的原则（即 $LMC=MR$）来决定产量。当在这个产量点上，长期平均成本恰好等于平均收益（即 $LAC=AR$）时，垄断竞争市场就实现了长期均衡。

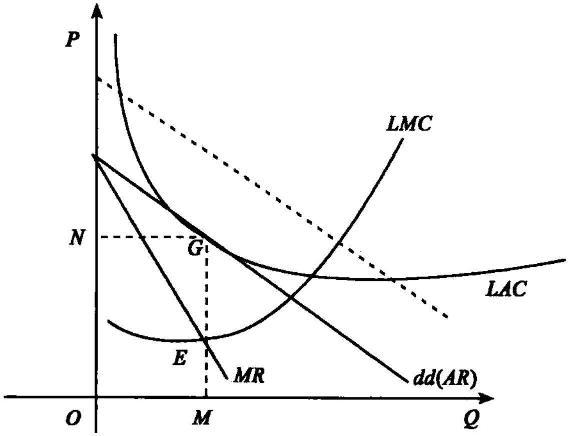



**图 1－1　垄断竞争市场的长期均衡**

如图 1－1，横坐标 $Q$ 表示产量，纵坐标 $P$ 表示单位产品的金额，$LAC$ 为长期平均成本曲线，$LMC$ 为长期边际成本曲线，$dd$ 为需求曲线，它与平均收益曲线 $AR$ 重合，$MR$ 为边际收益曲线。当垄断竞争市场实现长期均衡时，长期边际成本曲线 $LMC$ 与边际收益曲线 $MR$ 的交点 $E$，决定了产量 $OM$，由 $M$ 作平行于纵轴的直线，与长期平均成本曲线 $LAC$ 和平均收益曲线 $AR$ 恰好交于同一点 $G$。问题是这种诸线共点的情况是否存在？即垄断竞争市场的长期均衡是否存在？本案例通过下列数学命题的证明，来证明垄断竞争市场长期均衡的存在性。

**命题 I**　垄断竞争市场上，$AR \geq MR$（当 $Q=1$ 时，等式成立）即 $Q=1$ 时边际收入曲线 $MR$ 与平均收入曲线 $AR$ 相交，$Q>1$ 时，边际收入曲线 $MR$ 在平均收入曲线 $AR$ 的下方。

**证明**　当 $Q=1$ 时，$MR=AR=p$（价格）

当 $Q>1$ 时，由于平均收入曲线 $AR$ 与需求曲线 $dd$ 重合，而需求曲线 $dd$ 向右下方倾斜，所以 $AR(Q)$ 的导数为负，即

$$\frac{\mathrm{d}AR(Q)}{\mathrm{d}Q}<0$$

又总收益 $TR=Q\times AR(Q)$，边际收益为总收益的导数，即

$$MR=\frac{\mathrm{d}(TR)}{\mathrm{d}Q}=\frac{\mathrm{d}(Q\times AR(Q))}{\mathrm{d}Q}=AR(Q)+Q\times\frac{\mathrm{d}AR(Q)}{\mathrm{d}Q}$$

$\because$ 当 Q >1 时, $Q\times\frac{\mathrm{d}AR(Q)}{\mathrm{d}Q}<0$

$\therefore\ MR<AR$

**命题Ⅱ** 长期边际成本曲线 $LMC$ 通过长期平均成本曲线 $LAC$ 的最低点，且在该点左边 $LMC<LAC$，在该点右边 $LMC>LAC$。

**证明** 设产量为 $Q$ 时，长期总成本为 $C$（$Q$），平均成本 $LAC=\frac{C(Q)}{Q}$，长期边际成本 $LMC=\frac{\mathrm{d}C(Q)}{\mathrm{d}Q}$。

由边际产量递减规律，$LAC$ 曲线为“$U$”形曲线，当长期平均成本 $LAC$ 取最小值时

$$\frac{\mathrm{d}LAC(Q)}{\mathrm{d}Q}=\frac{Q\frac{\mathrm{d}C(Q)}{\mathrm{d}Q}-C(Q)}{Q^2}=0$$

即

$$Q\frac{\mathrm{d}C(Q)}{\mathrm{d}Q}-C(Q)=0$$

$$\frac{\mathrm{d}C(Q)}{\mathrm{d}Q}=\frac{C(Q)}{Q}$$

设满足此方程的驻点 $Q=Q_0$，故 $LMC(Q_0)=\frac{C(Q_0)}{Q_0}=LAC(Q_0)$

即长期边际成本曲线 $LMC$ 通过长期平均成本曲线 $LAC$ 的最低点（$Q_0$,$LAC(Q_0)$），且由于 $LAC$ 曲线为“$U$”形曲线，当 $Q<Q_0$ 时，

$$\frac{\mathrm{d}LAC(Q)}{\mathrm{d}Q}=\frac{Q\frac{\mathrm{d}C(Q)}{\mathrm{d}Q}-C(Q)}{Q^2}<0,$$

即 $Q\frac{\mathrm{d}C(Q)}{\mathrm{d}Q}-C(Q)<0 \quad \frac{\mathrm{d}C(Q)}{\mathrm{d}Q}<\frac{C(Q)}{Q}$

$\therefore \quad LMC(Q)<LAC(Q)$

同理，当 $Q>Q_0$ 时，$LMC(Q)>LAC(Q)$

**命题Ⅲ**　对于命题Ⅱ的驻点 $Q_0$，存在点 $Q^*\in[1,Q_0]$，使 $AR(Q^*)-MR(Q^*)=LAC(Q^*)-LMC(Q^*)$。

**证明**　设 $G(Q)=[AR(Q)-MR(Q)]-[LAC(Q)-LMC(Q)]$ 由于 $AR(Q)$、$MR(Q)$、$LAC(Q)$、$LMC(Q)$ 均为 $Q$ 的连续函数，所以 $G(Q)$ 为闭区间 $[1,Q_0]$ 的连续函数，又

$$G(1)=0-[LAC(1)-LMC(1)]<0$$

$$G(Q_0)=[AR(Q_0)-MR(Q_0)]-0>0$$

由闭区间上连续函数的零值定理，存在点 $Q^*\in[1,Q_0]$，使 $G(Q^*)=0$

即　$AR(Q^*)-MR(Q^*)=LAC(Q^*)-LMC(Q^*)$

**命题Ⅳ**　由于垄断竞争状况的变化，需求曲线上下平移，设 $dd^*(Q)=dd(Q)+b$，即 $AR^*(Q)=AR(Q)+b$，（$b$ 为常数），则对应的边际收益曲线也上下平移，且

$$MR^*(Q)=MR(Q)+b$$

**证明**

$$\begin{aligned}MR^*(Q)&=\frac{\mathrm{d}(Q\cdot AR^*(Q))}{\mathrm{d}Q}\\&=Q\frac{\mathrm{d}AR^*(Q)}{\mathrm{d}Q}+AR^*(Q)\\&=Q\frac{\mathrm{d}[AR(Q)+b]}{\mathrm{d}Q}+AR(Q)+b\\&=Q\frac{\mathrm{d}AR(Q)}{\mathrm{d}Q}+AR(Q)+b\\&=MR(Q)+b\end{aligned}$$

**命题Ⅴ**　由于垄断竞争状况的变化，对于命题Ⅲ中驻点 $Q^*$，当命题Ⅳ中常数 $b=LAC(Q^*)-AR(Q^*)$ 时，即 $dd^*(Q^*)=AR^*(Q^*)=LAC(Q^*)$ 时，有 $MR^*(Q^*)=LMC(Q^*)$ 成立。

**证明** 由于

$$AR^*(Q^*) = AR(Q^*) + b = LAC(Q^*)$$

由命题Ⅳ、命题Ⅲ，

$$\begin{aligned} MR^*(Q^*) &= MR(Q^*) + b \\ &= MR(Q^*) + LAC(Q^*) - AR(Q^*) \\ &= LMC(Q^*) \end{aligned}$$

命题Ⅴ说明，当长期边际成本曲线 $LMC$ 和由于垄断竞争状况变化而存在的某条边际收入曲线 $MR^*$ 相交于点 $E$，确定产量 $Q^*$ 时，过点 $Q^*$ 平行于纵坐标轴的直线与长期平均成本曲线 $LAC$ 及对应的需求曲线 $dd^*$（$AR^*$）共点即证得垄断竞争市场长期均衡的存在性。

**例** 若垄断竞争市场上，某产品的长期总成本函数为 $LTC(Q)=\frac{1}{16}Q^2+\sqrt{Q}+1$，该产品的需求函数为 $p=b-\frac{1}{16}Q$ 式中，$Q$ 为产（销）量，$b$ 为随市场供需状况变化的参数，则垄断竞争市场长期均衡的存在性，可计算如下：

长期平均成本 $LAC(Q) = \frac{1}{16}Q + \frac{1}{\sqrt{Q}} + \frac{1}{Q}$

长期边际成本 $LMC(Q) = \frac{1}{8}Q + \frac{1}{2\sqrt{Q}}$

总收益 $TR(Q) = pQ = bQ - \frac{1}{16}Q^2$

平均收益 $AR(Q) = b - \frac{1}{16}Q$

边际收益 $MR(Q) = b - \frac{1}{8}Q$

若 $LAC(Q) - LMC(Q) = AR(Q) - MR(Q)$

即 $(\frac{1}{16}Q + \frac{1}{\sqrt{Q}} + \frac{1}{Q}) - (\frac{1}{8}Q + \frac{1}{2\sqrt{Q}}) = (b - \frac{1}{16}Q) - (b - \frac{1}{8}Q)$

整理，得 $\frac{1}{2\sqrt{Q}}+\frac{1}{Q}=\frac{1}{8}Q$

$$\frac{1}{8}Q^2=\frac{1}{2}\sqrt{Q}+1$$

显然，此方程有解 $Q^*=4$

若生产厂商按边际收入等于边际成本决策，在 $Q^*=4$ 时 $MR(4)=LMC(4)$

即 $b-\frac{1}{8}\times 4=\frac{1}{8}\times 4+\frac{1}{2\sqrt{4}}$，

得 $b=\frac{5}{4}$

所以当市场供需变化，使需求函数为 $p=\frac{5}{4}-\frac{1}{16}Q$ 时，生产厂商在 $Q=4$ 处实现了垄断竞争市场的均衡。

### 案例2 关于固定资产经济寿命定义的合理性

在会计和企业管理教材中，都将固定资产的经济寿命定义为固定资产年均成本最低的使用年限，该定义的合理性必须进一步论证。一般地，随着固定资产使用年限的增加，其年均资产成本逐渐减少，而年均劣势成本却逐渐增加，到一定时期，固定资产应予更新。固定资产的经济寿命的直观意义应是从其开始使用，到经济上最有利的更新固定资产使之恢复到初始状态时止的使用时间。何时更新固定资产最有利呢？由于更新固定资产须在原固定资产残值的基础上追加资产成本，当追加的资产成本的年均值（即年均资产成本）被年均劣势成本抵消时，更新固定资产在经济上最有利。所以，固定资产的经济寿命应是从固定资产开始使用，到更新固定资产使之恢复到初始状态所追加的年均资产成本被年均劣势成本抵消时止的使用时间。论证固定资产经济寿命定义的合理性，即证明固定资产年均成本最低的时刻，与更新固定资产使之恢复到初始状