

逼近論讲义

Н. И. 阿赫叶惹尔

科学出版社

通 近 論 講 義

И. И. 阿赫叶惹尔 著

程民德 关肇直 譯

吳文达 陈永和

科 学 出 版 社

1957年9月

Н. И. Ахиезер
ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ АППРОКСИМАЦИИ

Государственное Издательство
Технико-Теоретически Литературы
Москва Ленинград
1947

內 容 簡 介

本書以近代函分析的精神來說明函数逼近論的主題,把存在性定理与唯一性定理建立在一般函数空間的廣泛基礎上(第一章、第六章),本書內容中最值得注意的是 1) П. Л. 切比謝夫定理的推廣与相似的定理(就空間 C 和 L 而論),給出了用一类具有多項式的某些性質的函数來做函数的最佳逼近的判別法(第二章), 2) Н. И. 阿赫叶惹尔、М. Г. 克萊因、У. 法佛尔特、В. 納吉等关于函数的調和逼近中的最佳逼近問題(第五章)。

逼 近 論 講 義

原著者	[苏] Н. И. 阿赫叶惹尔
翻譯者	程民德 关肇直 吳文达 陈永和
出版者	科 学 出 版 社 北京朝陽門大街117号 北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号
印刷者	中 国 科 学 院 印 刷 厂
总經售	新 华 书 店

1957 年 9 月第 一 版
1959 年 11 月第三次印刷
(京) 2,804—4,603

书号: 0885 字数: 254,000
开本: 850×1168 1/32
印张: 10 1/2

定价: 1.90 元

序

這本書是從我在哈爾科夫大學 1937—1939 年的講課講義發展出來的。1940 年，這本講義根據手稿印了 75 份。我仍然保留了原來的書名，但是這本書並不能看成是 1940 年版本的第 2 版，因為書的大部分是重新寫過的，而且書的體積增加了兩倍半。

我不來講書的內容，因為目錄中會給出，只指出我並不想包羅一切，例如在復區域上的逼近問題在這本書中就沒有加以討論。

С. И. 別恩斯坦院士對這本書感到興趣，讀了原稿並對我作了若干指示。我利用這個機會，再一次表示我對他的謝意。

對我的朋友 М. Г. 克萊因，我表示特別的感謝，我和他的若干談話也反映在這本書中。

最後，我愉快地感謝 Л. А. 若葉柯夫，他仔細地看了原稿，並告我若干改進。

阿赫葉惹爾 (Н. Ахнезер)

目 錄

第一章 綫性賦范空間中的逼近問題

1. 逼近論基本問題的提出	(1)
2. 度量空間	(1)
3. 綫性賦范空間	(2)
4. 綫性賦范空間的例	(3)
5. 霍爾澤與閔可夫斯基不等式	(5)
6. 綫性賦范空間進一步的例子	(7)
7. 希爾伯特空間	(8)
8. 綫性賦范空間中逼近的基本定理	(10)
9. 嚴格賦范空間	(12)
10. 空間 L^p 中的例	(13)
11. 幾何解釋	(14)
12. 關於可分空間及完備空間的概念	(15)
13. 在空間 H 中的逼近定理	(16)
14. 例	(20)
15. 再論空間 H 中的逼近問題	(23)
16. H 中的正交就范向量組	(25)
17. 向量組的正交化	(26)
18. 無窮正交就范組	(28)
19. 不可分空間的例	(32)
20. 維爾斯脫拉斯第一定理	(32)
21. 維爾斯脫拉斯第二定理	(35)
22. 空間 C 的可分性	(37)
23. 空間 L^p 的可分性	(37)
24. 維爾斯脫拉斯定理在空間 L^p 上的推廣	(40)
25. 空間 L^p 的完備性	(41)

26. 在 L^2 中完全正交就范組的例	(43)
27. 羅茲定理	(47)
28. 綫性沉函數	(50)
29. F. 黎斯定理	(51)
30. 在任意綫性賦范空間中向量集合封閉性的判別法	(58)

第二章 II. J. 切比謝夫的理論

31. 問題的提出	(55)
32. 推廣的瓦賴-波松定理	(56)
33. 存在定理	(57)
34. II. J. 切比謝夫定理	(59)
35. 特殊情形	(62)
36. 与零最小偏差的 II. J. 切比謝夫多項式	(62)
37. II. J. 切比謝夫定理的進一步的例子	(64)
38. 应用瓦賴-波松定理的例	(65)
39. 应用一般 II. J. 切比謝夫定理的例	(67)
40. 轉到週期函數	(70)
41. 例	(72)
42. 維爾斯脫拉斯函數	(72)
43. A. 哈尔問題	(73)
44. A. 哈尔条件必要性的証明	(74)
45. A. 哈尔条件充分性的証明	(75)
46. 例	(79)
47. II. J. 切比謝夫函數組	(80)
48. II. J. 切比謝夫定理的推廣	(81)
49. 关于一个在度量空間 L 中逼近連續函數的問題	(84)
50. A. A. 馬爾科夫定理	(89)
51. 特殊情形	(93)

第三章 調和分析初步

52. 关于福里叶級數的一些簡單事實	(97)
53. 有界變差函數的福里叶級數	(101)

54. 福里叶級数的巴塞佛等式	(105)
55. 福里叶級数的例	(106)
56. 三角積分	(109)
57. 黎曼-勒貝格定理	(111)
58. 普蘭散利理論	(112)
59. 華脫生定理	(114)
60. 普蘭散利定理	(116)
61. 費叶尔定理	(118)
62. 帶有費叶尔型核的積分运算符	(121)
63. 楊-哈台定理	(125)
64. 費叶尔型核的例	(126)
65. 可積函数的福里叶變換	(128)
66. 二个函数的摺合	(131)
67. B. A. 史捷克洛夫函数	(132)
68. 重單調函数	(134)
69. 共軛函数	(135)

第四章 指数型超越整函数的某些極界性質

70. 指数型整函数	(140)
71. 波雷尔變換	(142)
72. 維納尔-配萊定理	(144)
73. 在实軸上有界的指数型整函数	(147)
74. C. H. 別恩斯坦不等式	(150)
75. 萊維登多項式	(156)
76. 費叶尔-黎斯定理及它的擴充	(162)
77. 將連續函数表成福里叶-斯底尔吉斯積分形式的判別法	(164)

第五章 函数的最佳調和逼近問題

78. 本章的對象	(169)
79. 連續模	(170)
80. 在 $L^p(p \geq 1)$ 空間中的推廣	(172)
81. 例	(175)

82. 对于福里叶系数的若干估計	(179)
83. 关于 B. A. 史捷克洛夫函数	(183)
84. 两个引理	(185)
85. 調和逼近的根本問題	(186)
86. B. 納吉判別法	(193)
87. 可微函数的最佳調和逼近	(197)
88. 对週期函数的直接研究	(205)
89. D. 傑克遜第二定理	(210)
90. 推廣了的費叶尔方法	(212)
91. C. H. 別恩斯坦定理	(217)
92. И. И. 普里瓦洛夫定理	(221)
93. C. H. 別恩斯坦定理在 L^p ($p \geq 1$) 空間中的推廣	(222)
94. 解析函数的最佳調和逼近	(226)
95. 前節中所得結果的另一种形式	(230)
96. C. H. 別恩斯坦逆定理	(233)

第六章 維納尔逼近定理

97. 維納尔問題	(236)
98. 維納尔条件的必要性	(236)
99. 一些定义及表示式	(237)
100. 輔助命題	(239)
101. 維納尔-萊維定理	(243)
102. 維納尔条件充分性的証明	(244)
103. 維納尔的一般陶倍尔定理	(246)
104. 弱減函数	(247)
105. 关于術語的附註	(250)
106. 依开哈拉定理	(250)
107. 卡尔萊馬的陶倍尔定理	(254)

各种补充与問題

A. 極值的簡單問題与封閉性的某些判別法	(256)
B. G. 賽干的一个定理和它的应用	(270)

C. 封閉函数序列的又一些例子	(279)
D. 卡拉皆屋独利-費叶尔問題及其联系的問題	(282)
E. E. И. 左洛塔留夫的問題及其有关問題	(293)
F. 最簡單的解析函数的最佳調和逼近	(303)
註 釋	(310)
索 引	(322)

第一章

綫性賦范空間中的逼近問題

1. 逼近論基本問題的提出 逼近論中的基本問題,可述之如下:在任意維空間中某點集 $\mathfrak{P}$ 上,已知點 $P \in \mathfrak{P}$ 的兩個函數 $f(P)$ 與 $F(P; A_1, A_2, \dots, A_n)$, 其中第二個函數還依賴於某些參數 $A_1, A_2, \dots, A_n$; 要求決定這些參數,使函數 $F(P; A_1, A_2, \dots, A_n)$ 在 $\mathfrak{P}$ 上與 $f(P)$ 的偏差最小. 當然,這時應當說明 F 離 f 之偏差應作如何理解,或更明確地說,什麼是 F 與 f 之間的距離.

例如,假如討論的是有界函數,則作為兩個函數之距離,可以取它們之差的絕對值在 $\mathfrak{P}$ 上的上確界. 在這個距離的定義下,有許多對於三維空間中的點成立的关系式,對於 $\mathfrak{P}$ 上一切有界函數的全体仍然成立.

這個情況,在數學中當討論其他函數類或很多其他的集合(集合)時,也常常要碰到,這就引導到形成關於度量空間的重要概念.

2. 度量空間 由某些元素 $x, y, z, \dots$ 組成的集合 E 叫做度量空間^[1], 而這些元素本身就叫做空間的點, 假如對於每兩個元素 x, y , 有某個非負數 $D[x, y]$ 與它們對應, 這數叫做點 x, y 之間的距離, 並滿足下列條件:

A. $D[x, x] = 0$,

B. $D[x, y] = D[y, x] > 0$ (如 $x \neq y$),

C. $D[x, z] \leq D[x, y] + D[y, z]$ (三角形不等式).

例如,一切數(一般指複數)列

$$x = \{x_1, x_2, \dots\} = \{x_k\}, \quad y = \{y_1, y_2, \dots\} = \{y_k\}, \dots$$

1) 在方括号中的數,係指在書後所引文獻的號碼.

的集合就組成度量空間,如果把 $x=y$ 了解成 $x_k=y_k (k=1,2,\dots)$, 并借助公式

$$D[x, y] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}$$

來定义距离;这时,条件 C 的成立,可由下列容易証明的不等式

$$\frac{a+b}{1+a+b} \leq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} \quad (a \geq 0, b \geq 0)$$

推出.

3. 綫性賦范空間^[1] 在度量空間之中,特別重要的是所謂綫性賦范空間.

元素 $x, y, z, \dots$ 的集合 E 叫做綫性賦范空間,而這些元素本身就叫做點或向量,如果:

1) 在 E 中定义了一个运算,叫做加法,記成 $+$, 对于这个运算, E 是交換羣;羣 E 的零元素記成 0 ;

2) 定义了集合 E 中的元素与数(实数或复数) $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ 相乘,并且

$$\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y,$$

$$(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x,$$

$$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x,$$

$$1 \cdot x = x,$$

$$0 \cdot x = 0;$$

3) 对于每个元素 $x \in E$, 有某非負数 $\|x\|$ 与之对应,这数叫做元素 x 的范数,并满足下列条件:

$$\|x\| = 0 \text{ 必須且只須 } x = 0,$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|,$$

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

向量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 叫做綫性無关,如果由关系式

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$$

可得等式

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

如果令 $D[x, y] = \|x - y\|$, 其中 $x - y = x + (-1)y$, 則綫性賦范空間成為度量空間。

4. 綫性賦范空間的例¹⁾

空間 C 在任意維度的通常空間中某有界閉集 $\mathfrak{P}$ 上, 點 $P \in \mathfrak{P}$ 的一切連續函數 $x = x(P)$ 的總體, 是一個綫性賦范空間(空間 C), 如果規定

$$x = y$$

的意義是 $x(P) \equiv y(P)$, 加法與乘法以通常意義來了解, 而范數由下列等式

$$\|x\| = \|x\|_C = \max_{P \in \mathfrak{P}} |x(P)|$$

定義, 在 $\mathfrak{P}$ 為數軸上有限區間的情形, 空間 C 具有特別重要的意義。因為借變換

$$t = At' + B$$

之助, 可以將區間²⁾ $[a, b]$ 變成任何有限區間, 所以平常只取區間 $[0, 1]$ 或 $[-1, 1]$ 。

當只討論週期函數時, 通常取區間 $[-\pi, \pi]$ 或其它長度為 2π 的某一區間, 並且把兩個端點認為是同一個點。

利用變換

$$u = \operatorname{tg} \frac{t}{2} \quad (-\pi \leq t \leq \pi)$$

可以把連續的週期函數的空間轉化成在整個實軸上連續的函數 $x = x(u)$, 並且

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} x(u), \quad \lim_{u \rightarrow \infty} x(u)$$

¹⁾ 如果不特別聲明, 一切數, 函數, 序列, 一般都是指複的。

²⁾ 方括號總是表示閉區間, 即包含其二端點的區間。

存在且为相等的空間。

这个空間記成 C_∞ 。

在討論空間 C_∞ 时, 点 $\pm\infty$ 看成同一个点。

同样, 由区間 $[0, 1]$ 上一切連續(不一定是周期的)函数的空間 $C(0, 1)$ 出發, 可以借助变数变换变成閉区間 $[0, \infty]$ 与 $[-\infty, \infty]$ 上的連續函数空間 $C(0, \infty)$ 与 $C(-\infty, \infty)$ 。

空間 $C(-\infty, \infty)$ 为滿足下列条件的一切連續函数 $x(t)$ ($-\infty < t < \infty$) 的总体:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$$

存在, 当然这两个極限可能不同, 这个情况, 就是 $C(-\infty, \infty)$ 与 C_∞ 的区别。

空間 L^p ($p \geq 1$) 用 L^p 指(有限或無窮)区間¹⁾ (a, b) 上一切可測且其絕對值的 p 次幂依勒貝格意义为可積的函数的总体, 这时加法与数乘法依通常意义來了解, 而两个元素 $x = x(t)$, $y = y(t) \in L^p$ 認為是恆等的, 如果在 (a, b) 上等式 $x(t) = y(t)$ 几乎处处成立, 至于范数則由下列公式确定:

$$\|x\| = \|x\|_p = \left\{ \int_a^b |x(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

假如遇到必須註明所討論的区間时, 則用 $L^p(a, b)$ 代替 L^p . L^1 常簡單地記成 L .

現在來証明 L^p 是綫性賦范空間。

既然两个可測函数的和还是可測函数, 又有下列顯然的不等式:

$$|\alpha + \beta|^p \leq 2^p (|\alpha|^p + |\beta|^p)^2,$$

所以由 $x, y \in L^p$, 可得 $x + y \in L^p$.

¹⁾ 可以用数軸上或任意維数通常空間中的任何可測集合(其測度是有限的或無限的均可)代替区間, 作为函数的定义域。

²⁾ 注意: 不等式

$$|\alpha + \beta|^p \leq 2^{p-1} (|\alpha|^p + |\beta|^p) \quad (p \geq 1)$$

的証明, 只要求出在条件 $A + B = 1$, $A \geq 0$, $B \geq 0$ 下, $A^p + B^p$ 的極小就夠了。

零元素即几乎处处为零的函数。

假如 $x \in L^p$, α 是任意的数, 則 $\alpha x \in L^p$.

如此, 剩下的就只要証明不等式

$$\left\{ \int_a^b |x(t) + y(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{ \int_a^b |x(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \int_a^b |y(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}},$$

这个不等式就是闵可夫斯基(Minkowski)不等式。

5. 霍尔澤(Hölder)与闵可夫斯基不等式^[2] 設 $\alpha, \beta \geq 0$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (則 $q > 1$), 討論

方程为

$$y = x^{p-1}$$

的曲綫 OAB , 这个方程也可寫成

$$x = y^{q-1}.$$

由圖 1¹⁾ 中顯然可知: 面積 S 与 T 之和不小于 $\alpha\beta$, 而等于 $\alpha\beta$ 恰在 A, B 两点重合时成立, 即当 $\alpha^p = \beta^q$

时; 所以

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}. \quad (1)$$

注意 $p=2$ (亦即 $q=2$) 时, 得到的这个不等式就是初等的不等式

$$2\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2.$$

現設 $u(t) \in L^p$, $v(t) \in L^q$. 再設

$$\alpha = \frac{|u(t)|}{\|u\|_p}, \quad \beta = \frac{|v(t)|}{\|v\|_q}.$$

并引用不等式(1); 我們得到

¹⁾ 这个圖相当于 $p > 2$, $\beta > \alpha^{p-1}$ 的情形。

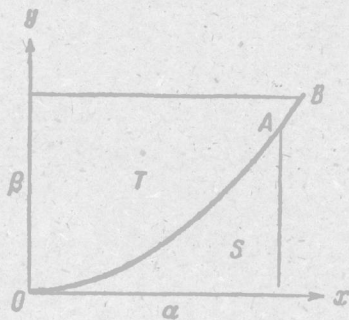


圖 1

$$\frac{|u(t)v(t)|}{\|u\|_p\|v\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|u(t)|^p}{\{\|u\|_p\}^p} + \frac{1}{q} \frac{|v(t)|^q}{\{\|v\|_q\}^q}.$$

因为不等式的右端是可積的,故其左端也是可積的,并且其積分不超过右端的積分,即不超过

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

我們得到霍爾譚不等式:

$$\int_a^b |u(t)v(t)| dt \leq \left\{ \int_a^b |u(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \cdot \left\{ \int_a^b |v(t)|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}}. \quad (2)$$

在这个不等式中,不难看出等号成立必須且只須在 (a, b) 上下面等式几乎处处成立:

$$|v(t)|^q = C|u(t)|^p.$$

在 $p=q=2$ 的情形,不等式(2)通常叫做希瓦茲 (Schwarz) 不等式,但是更正确地应叫做布亞科夫斯基 (Буняковский) 不等式.

为了証明闵可夫斯基不等式,首先注意由

$$|x(t)| + |y(t)| \in L^p \quad (p > 1)$$

可推出

$$\{|x(t)| + |y(t)|\}^{p-1} \in L^q,$$

其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

引用霍爾譚不等式于下面等式

$$(|x| + |y|)^p = |x| \cdot (|x| + |y|)^{p-1} + |y| \cdot (|x| + |y|)^{p-1}$$

右端的每一項,我們得到

$$\begin{aligned} \int_a^b (|x| + |y|)^p dt &\leq \left\{ \int_a^b (|x| + |y|)^{p-1} dt \right\}^{\frac{1}{q}} \left\{ \left[\int_a^b |x|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} + \right. \\ &\quad \left. + \left[\int_a^b |y|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \right\}, \end{aligned}$$

由此得到当 $p > 1$ 时的閔可夫斯基不等式. 至于 $p = 1$ 时, 这个不等式的成立是顯然的.

不难看出, 在閔可夫斯基不等式(当 $p > 1$ 时)中, 等号成立当且僅当几乎处处有 $x(t) = Cy(t)$ 时, 其中常数 $C \geq 0$.

注意, 同样可得对于級数的霍尔譚与閔可夫斯基不等式, 即

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k \beta_k| \leq \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|^q \right\}^{\frac{1}{q}} \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p > 1 \right),$$

$$\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k + \beta_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (p \geq 1).$$

而且不难看出, 这些不等式都是上述已証明了的对于積分的霍尔譚与閔可夫斯基不等式的特殊情形.

今后我們常將应用所謂对于積分的推廣了的閔可夫斯基不等式

$$\left\{ \int_a^b \left| \int_c^d \varphi(x, y) dy \right|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \int_c^d \left\{ \int_a^b |\varphi(x, y)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} dy \quad (p \geq 1).$$

这个式子可以借助平常積分論中常用的, 由只取有限多个值的函数(起先是只取两个值的), 轉移到矩形区域 $R(a < x < b, c < y < d)$ 上的任意可測的且对上述不等式右端有意义的函数 $\varphi(x, y)$ 來証明^[3].

当 $p = 1$ 时, 这个不等式的特殊情形即引導到福比尼(Fubini)定理^[3], 即断言: 如果

$$\int_c^d \left\{ \int_a^b |\varphi(x, y)| dx \right\} dy < \infty,$$

則

$$\int_R \varphi(P) dP = \int_a^b \left\{ \int_c^d \varphi(x, y) dy \right\} dx = \int_c^d \left\{ \int_a^b \varphi(x, y) dx \right\} dy.$$

6. 綫性賦范空間進一步的例子

空間 m 与 c 一切有界的数列

$$x = \{x_k\}, \quad y = \{y_k\}, \dots$$

的集合 m , 及一切收斂的数列

$$x = \{x_k\}, \quad y = \{y_k\}, \dots$$

的集合 c 都是綫性賦范空間, 如果令

$$x + y = \{x_k + y_k\},$$

$$\alpha x = \{\alpha x_k\},$$

$$\|x\| = \sup_k |x_k|.$$

空間 l^p ($p \geq 1$) 所有使級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p, \dots$$

收斂的数列

$$x = \{x_k\}, \quad y = \{y_k\}, \dots$$

組成的集合 l^p 也是綫性賦范空間, 如果令

$$\|x\| = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}},$$

这可以用对于級数的閔可夫斯基不等式來証明。

7. 希尔伯脫空間^[4] 希尔伯脫(Hilbert)空間(空間 H)是指綫性空間(即滿足 § 3 中前两条件), 在其中对于每两个向量 x, y , 有一(复)数 (x, y) 与之对应, 这个数叫做向量的內積, 并滿足下列条件¹⁾:

- a) $(y, x) = \overline{(x, y)},$
- b) $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 (x_1, y) + \alpha_2 (x_2, y),$
- c) $(x, x) \geq 0,$
- d) $(x, x) = 0$ 必須且只須 $x = 0.$

如果 $(x, y) = 0$, 向量 x, y 就叫做是正交的。

容易举出具体的例子, 滿足我們用以公理化地定义希尔伯脫

1) 在数上加一橫線即指此数的共軛数。