全国高等教育科学“十五”规划重点研究课题

高等学校经济数学基础教程 · 江苏省高等学校精品教材

微积分

（第二版）

张从军　王育全
李　辉　刘玉华　编著

博学 · 经济数学系列

复旦大學出版社
www.fudanpress.com.cn

全国高等教育科学“十五”规划重点研究课题

高等学校经济数学基础教程·江苏省高等学校精品教材

微积分（第二版）

张从军　王育全
李　辉　刘玉华　编著

博学·经济数学系列

复旦大學出版社
www.fudanpress.com.cn

图书在版编目(CIP)数据

微积分/张从军等编著. —2版. —上海:复旦大学出版社,2009.7
(博学·经济数学系列)
高等学校经济数学基础教程
ISBN 978-7-309-06722-4

Ⅰ. 微… Ⅱ. 张… Ⅲ. 微积分-高等学校-教材 Ⅳ. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 109300 号

微积分(第二版)
张从军 王育全 李 辉 刘玉华 编著

出版发行 复旦大学出版社 上海市国权路 579 号 邮编 200433
86-21-65642857(门市零售)
86-21-65100562(团体订购) 86-21-65109143(外埠邮购)
fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com

责任编辑 范仁梅
出 品 人 贺圣遂

印 刷 上海复文印刷厂
开 本 787×960 1/16
印 张 25.25
字 数 467 千
版 次 2009 年 7 月第二版第一次印刷
印 数 1—6 000

书 号 ISBN 978-7-309-06722-4/O·423
定 价 38.00 元

内容提要

本书是“高等学校经济数学基础教程”之一，是财经类各专业本科一年级微积分课程的精品教材. 书中除了介绍通常高等数学中的微积分内容外，还特别介绍了它们的经济应用，并增加了相应的数学软件及数学建模的基本方法.

本书主要内容包括经济函数、经济变化趋势的数学描述、经济变量的变化率、简单优化问题、“积零为整”的数学方法、离散经济变量的无限求和、方程类经济数学模型等各章，并配有适量习题. 书后附有数学与经济的关系、三次数学危机产生的原因和结果、诺贝尔经济学奖简介等3个附录.

本书贯穿问题教学法的基本思想，对许多数学概念，先从提出经济问题入手，再引入数学概念，介绍数学工具，最后解决所提出的问题，从而使学生了解应用背景，提高学习的积极性；书中详细介绍相应的数学软件，为学生将来的研究工作和就业奠定基础；穿插于全书的数学建模的基本思想和方法，引导学生学以致用，学用结合. 因此本书可最大限度地适应财经类各专业学习该课程和后续课程的需要，以及报考研究生的需要和将来从事与财经有关的实际工作的需要.

本书适合作为高等学校财经类各专业微积分课程的教材，也可供自学选用和经济工作者及有关教师参考.

再 版 前 言

本教材是专为经济管理类相关专业作为数学基础课程编写的,自教材出版以来,得到了许多院系、教师和广大学生的充分肯定,并被评为江苏省精品教材.经过多年使用,我们收到了许多读者的宝贵意见,同时也发现了不少需要修改与完善之处.

我们一直认为,编写此类微积分教材不是一劳永逸、一蹴而就的事,既要保持相对的连续性和稳定性,又要紧紧围绕人才培养的目标体系和课程体系,不断吸收最新的教育思想和有关工具,不断更新教学理念和内容,逐步修改、日臻完善.

为了满足广大学生的实际使用需要,更好地兼顾教材内容的思想性与工具性、科学性与可读性、先进性与适用性,更有利于提高学生的数学素养和应用能力,我们需要对教材内容作进一步的精雕细琢.

由我们主持承担的教育部高等理工教育数学教学研究与改革课题(教高司2007-143 号)、江苏省高等教育教改立项研究课题(苏教高〔2007〕18 号)的研究内容之一,就是如何打造精品教材,这同样要求我们不断学习,不断思考,不断探索.

借该教材再版的机会,我们改进了有关内容的表述,调整了某些结构顺序,充实了一定量的例题和习题,特别是进一步体现了经济管理专业使用的特色.

值此再版机会,我们希望再次表达谢意.感谢各相关院系对我们的支持和鼓励,感谢使用该教材的教师和读者给我们提出的宝贵意见,感谢关心该系列教材不断完善的有关校领导和教务部门、复旦大学出版社,特别是该教材的责任编辑、理科学科总监范仁梅女士.

仍诚恳期望有关专家、学者不吝赐教,诚恳期望使用该教材的教师和同学们,提出并反馈宝贵意见.

编者

于南京财经大学

2009 年 5 月 6 日

前　　言

随着社会经济的迅猛发展，数学在经济活动和经济研究中的作用日益凸显；随着数学的理论和方法越来越广泛地应用到自然科学、社会科学和工程技术的各个领域，对高等学校财经类各专业人才的数学素养要求越来越高. 作为经济数学基础课程之一的微积分课程，在提高财经类专业人才的数学素养方面，起着至关重要的基础性作用. 这门课程的思想和方法，是人类文明发展史上理性智慧的结晶，它不仅提供了解决实际问题的有力数学工具，同时还给学生提供一种思维的训练，帮助学生提高作为复合型、创造型、应用型人才所必需的文化素质和修养.

怎样使微积分课程充分发挥上述作用，怎样使微积分课程更趋符合培养目标的课程体系，怎样兼顾微积分课程的理论性与应用性、思想性与工具性，怎样突出微积分课程的财经类专业特色，现有的微积分教材虽然很多，但要处理好以上问题，仍需认认真真地思考与探索，仍有大量的工作要做. 作为我们主持承担的全国高等教育科学"十五"规划重点研究课题的研究内容之一，我们编写了现在的这本微积分教材，在编写思想、体系安排、内容取舍、教学方法等方面按照上述要求作了一些尝试.

我们特别注重了以下几点：

1. 最大限度地适应财经类各专业学习该课程和后续课程的需要，以及报考研究生和将来从事与财经有关的实际工作的需要.

2. 贯彻问题教学法的基本思想，对许多数学概念，先从提出经济问题入手，再引入数学概念，介绍数学工具，最后解决所提出的问题，使学生了解应用背景，提高学习的积极性.

3. 详细介绍相应的数学软件，为学生将来的研究工作和就业奠定基础.

4. 穿插数学建模的基本思想和方法，引导学生学以致用，学用结合.

本书由张从军教授提出编写思想和编写提纲、列出章节目录、编写附录部分，最后对全书进行修改、补充、统稿、定稿. 刘玉华副教授编写了第一至第三章，王育全教授编写了第四、第五章，李辉副教授编写了第六、第七章以及全书的软件部分内容.

复旦大学数学科学学院童裕孙教授审阅了该书的编写提纲和书稿，南京大学数学系丁南庆教授、何炳生教授，东南大学数学系陈建龙教授、管平教授，南京航空航天大学理学院倪勤教授、戴华教授等都审阅了有关内容并提出了宝贵意见，对本书的编写给予了大力支持和鼓励. 南京财经大学应用数学系史平博士阅读了全部书稿并提出了一些有益的建议，一些微积分任课教师在教学中试用了本书. 编者在此向他们表示衷心感谢！

我们还要感谢南京财经大学的校领导和教学管理部门的负责人，他们对本书的编写工作给予了许多指导和帮助；感谢复旦大学出版社，特别是科技编辑室主任范仁梅女士，他们不辞劳苦，数次往返于上海与南京之间，对该书的出版给予了大力支持.

本书在编写过程中，参考了大量的相关教材和资料，选用了其中的有关内容和例题、习题，在此谨向有关编者、作者一并表示谢意.

编写一本教材似乎不难，但编写一本适用的教材绝非易事. 编写此类微积分教材更不是一劳永逸、一蹴而就的事. 因此，既要保持相对的连续性和稳定性，又要紧紧围绕人才培养的目标体系、课程体系，吸收最新的有关教学科研成果，不断修改完善. 作为一项教学研究课题，我们还在探索之中，诚恳期望有关专家、学者不吝赐教，诚恳期望使用该教材的教师和学生，提出并反馈宝贵意见.

yysxx@njue.edu.cn

编 者

于南京财经大学

2005 年 1 月 6 日

目　　录

第一章 经济函数

函数是研究经济学的重要工具，也是微积分学的主要研究对象.函数的基本知识在中学数学中已有介绍，本章在此基础上进一步讨论函数的性质，并对常见的一些经济函数作出分析.

由于经济变量一般在实数范围内取值，故本书涉及的函数均在实数范围内讨论，此类函数也称为实函数.

如无特别说明，本书中全体实数的集合为 $\mathbf{R}$，全体整数的集合为 $\mathbf{Z}$，全体自然数的集合为 $\mathbf{N}$.

称集合 $(a, b)=\{x \mid a<x<b\}$ 为开区间，集合 $[a, b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 为闭区间，$(a, b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}$ 和 $[a, b)=\{x \mid a\leqslant x<b\}$ 为半开半闭区间.类似地，有

$$(a, +\infty)=\{x \mid a<x<+\infty\},$$

$$(-\infty, b)=\{x \mid -\infty<x<b\},$$

$$(-\infty, +\infty)=\{x \mid -\infty<x<+\infty\},$$

等等.

在今后的讨论中，有时需要考虑点 x_0 附近的所有点构成的集合，即开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$，其中 δ 是一个正数，称其为点 x_0 的**邻域**，记作 $U_\delta(x_0)$. x_0 称为该邻域的**中心**，δ 称为**半径**.称开区间 $(x_0-\delta, x_0)$ 为点 x_0 的**左邻域**，$(x_0, x_0+\delta)$ 为点 x_0 的**右邻域**，$(x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta)$ 为点 x_0 的**去心邻域**（或**空心邻域**），记作 $U_\delta^*(x_0)$.

§1.1 经济变量关系

无论是对经济现象的观察，还是对经济主体行为的预测，都离不开和经济量打交道.在经济理论或经济模型中，为了便于分析，常把经济量分为常量与变量.

常量是在某段时间内，某种情况下不发生变化的量，一般用 $a, b, c, \cdots$ 表示；**变量**是在某段时间内，某种情况下会发生变化的量，一般用 x, y, z 或 P，

Q, R, …表示.

例如,商店里某种商品的价格 P_0(元/件)在一段时间内保持不变,在这段时间内,商品的日销售量为 Q(件),则该商品的日销售额为 $R = P_0Q$(元). 这里价格 P_0 为常量,销售量 Q 及销售额 R 为变量.

有少数特殊的量,如 π, e,某人的生日等等,在任何条件下都是不变的,称为**绝对常量**. 除去绝对常量,在某一过程中的常量在另一过程中可能成为变量. 如前面例子中商品的价格过一段时间会调整,那它又成为一个变量.

从哲学的角度来讲,常量是处于静止状态的变量.

经济学中存在大量的经济变量之间及经济变量与时间之间的关系问题,例如,投入与产出之间的关系,成本与利润之间的关系,价格与产量之间的关系等等. 在假定的理想状态下,两个经济变量之间常会具有某种确定的关系,如前面提到的商品销售量 Q 与销售额 R 之间的关系,这里给定一个销售量 Q,就得到一个确定的销售额 $R = P_0Q$, 两者之间的这种关系在数学上称为函数关系. 下面给出函数的定义.

定义 1.1 设 x, y 为两个变量,x 的取值范围为非空实数集 D, f 为一个**对应规则**. 若对于每一个 $x \in D$,都能由对应规则 f 唯一确定一个实数值 y 与之对应,则称 f 为定义在实数集 D 上的一个**函数**. x 称为**自变量**,y 称为**因变量**,D 称为函数 f 的**定义域**.

如果 $x_0 \in D$, 则称函数 f 在点 x_0 处**有定义**,否则称函数 f 在点 x_0 处**无定义**. 如果实数集 $I \subset D$, 称函数 f 在集合 I 上有定义. 对于每个 $x_0 \in D$, 因变量 y 的对应取值 y_0 称为函数 f 在点 x_0 处的**函数值**,记为 $y_0 = f(x_0)$, 全体函数值所成的集合称为函数的**值域**,记为 Z,即

$$Z = \{y \mid y = f(x),\ x \in D\}.$$

在前例中,若商店因库容所限,每天的最大销售量为 1 000 件,价格为每件 10 元,则销售额函数的定义域 $D = \{0, 1, 2, \cdots, 1\,000\}$,值域 $Z = \{0, 10, 20, \cdots, 10\,000\}$. Q 与 R 之间的对应规则由公式 $R = 10Q$ 表示.

按函数的定义,函数的实质是指定义域 D 上的对应规则 f,定义域与对应规则也称为函数的二要素. 只要几个函数的定义域与对应规则相同,均可认为是同一函数. 如 $y = 1 + x^2$、$x = 1 + y^2$ 及 $s = 1 + t^2$ 均为同一函数;而 $y = x$ 与 $y = \frac{x^2}{x}$ 不是同一函数,因为前者的定义域为 $\mathbf{R}$,而后者定义域为 $x \neq 0$.

由于在数学上通常通过函数值 $f(x)$的变化来研究函数 f 的性质,故习惯上也称 $f(x)$为 x 的函数,或 y 是 x 的函数.

下面再介绍一个函数的例子.

例 1.1 在 100 千米长的铁路线 AB 旁的 C 处有一工厂，与铁路的垂直距离为 20 千米，由铁路 B 站向工厂提供原料. 公路与铁路每吨千米的货物运价比为 5∶3. 为节约运费，在铁路的 D 处修一货物转运站. 设 AD 距离为 x 千米，沿 CD 修一公路，如图 1-1 所示. 试将每吨货物的总运费 y 表示成 x 的函数.

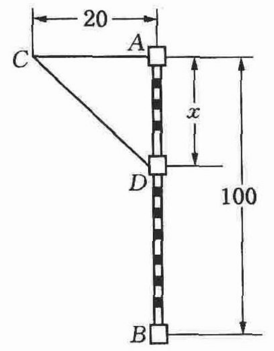


图 1-1

解 设公路上每吨千米货物运价为 a 元，那么铁路每吨千米的货物运价为 $\frac{3}{5}a$ 元，由图 1-1 可知

$$|CD|=\sqrt{x^2+400},$$

则有

$$y=\frac{3}{5}a(100-x)+a\sqrt{x^2+400}\quad(0\leqslant x\leqslant 100).$$

§1.2 函数的表示法与基本特性

一、函数的表示法

函数的表示法有解析法、表格法和图形法等.

1. 解析法

如果函数的对应规则由一个数学解析式表示，则称这种表示函数的方法为**解析法**(或**公式法**). 如上节最后的例子中，函数就是用解析法表示的函数.

2. 表格法

实际应用中，常把自变量的不同取值与对应的函数值列于一张表格中，对应规则由表格所确定，这种表示函数的方法称为**表格法**.

例 1.2 根据国家统计局公布的统计资料，我国 2000—2004 年国民生产总值(GDP)如表 1-1 所示.

表 1-1

年　份 t(年)	2000	2001	2002	2003	2004
总产值 GDP(亿美元)	10 808	11 590	12 371	13 720	15 020

表 1-1 描述的是我国国民生产总值在 2000—2004 年这 5 年间的变化情况，对任何年份 $t\in\{2000, 2001, 2002, 2003, 2004\}$，按表 1-1 所示的对应规则可唯一地确定该年的国民生产总值，即 GDP 是年份 t 的函数.

统计部门的各种统计报表、银行利息表、还贷表、保险公司的收益表、保险合同的价值表等均可认为是表格法表示的函数. 数学上的各种函数值表也是用表

格法表示的函数.

3. 图示法

经济学上经常用图形来直观地描述经济变量之间的函数关系,这种表示函数的方法称为**图示法**.

例 1.3 图 1-2 描述了某一生产线的生产效率 t 与生产线上工人数量 x 之间的关系.

对于给定的工人数量 x_0,由图 1-2 可得唯一确定的生产效率 t_0 与之对应,故生产效率 t 是工人数量 x 的函数,定义域为$[0, X]$中的所有整数.

图示法使函数的变化直观,表格法便于求函数值,而解析法便于运算和分析,函数的 3 种表示法各有千秋,常将它们结合使用.

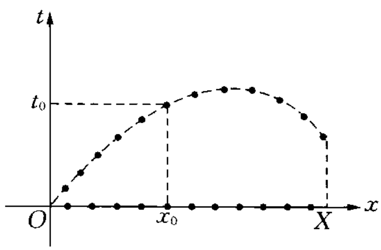


图 1-2

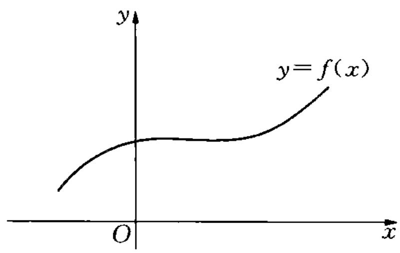


图 1-3

设有函数 $y = f(x)$ $(x \in D)$, 对每个 $x \in D$, 有唯一确定的函数值 $y(= f(x))$ 与之对应. 数对(x, y)就确定了平面直角坐标系中的一个点 $P(x, y)$, 平面点集 $\{(x, y) \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数 $y = f(x)$ 的**图形**(见图 1-3).

一次函数 $y = ax + b$ 的图形是一条直线,故一次函数也称为**线性函数**,它是最基本的经济函数类型之一.

二、函数的基本特性

1. 函数的奇偶性

定义 1.2 设函数 $f(x)$的定义域为 D,若对任意的 $x \in D$, 恒有

(1) $f(-x) = f(x)$, 则称函数 $f(x)$为**偶函数**;

(2) $f(-x) = -f(x)$, 则称函数 $f(x)$为**奇函数**.

由定义可知,奇函数、偶函数的定义域 D 必定关于原点对称.

例 1.4 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x) = \dfrac{1}{2}(2^x + 2^{-x})$;

(2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1} + \sin x$;

(3) $f(x)=\lg(\sqrt{x^2+1}+x)$.

解　(1) 因为

$$f(-x)=\frac{1}{2}[2^{-x}+2^{-(-x)}]=\frac{1}{2}(2^x+2^{-x})=f(x),$$

故 $f(x)=\frac{1}{2}(2^x+2^{-x})$ 为偶函数.

(2) 因为

$$f(-x)=\frac{1}{(-x)^2+1}+\sin(-x)=\frac{1}{x^2+1}-\sin x,$$

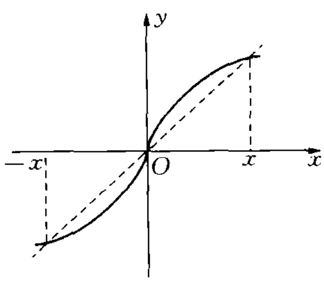
所以 $f(-x)\neq f(x)$,且 $f(-x)\neq -f(x)$,故 $f(x)=\frac{1}{x^2+1}+\sin x$ 为非奇非偶函数.

(3) 因为

$$\begin{aligned}f(-x)&=\lg[\sqrt{(-x)^2+1}-x]=\lg(\sqrt{x^2+1}-x)\\&=\lg\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=-\lg(\sqrt{x^2+1}+x)\\&=-f(x),\end{aligned}$$

所以 $f(x)=\lg(\sqrt{x^2+1}+x)$ 为奇函数.

奇函数的图形关于坐标原点对称(如图 1-4(a)所示);偶函数的图形关于 y 轴对称(如图 1-4(b)所示).



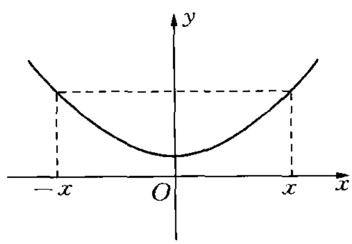


图 1-4

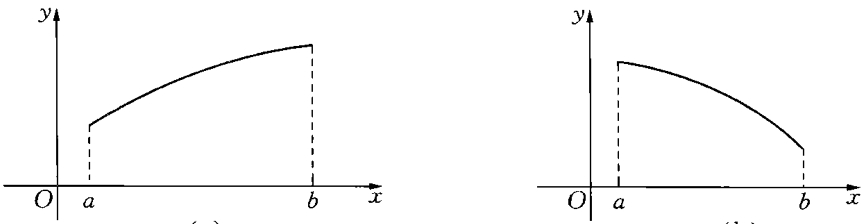
2. 函数的单调性

定义 1.3　设函数 $f(x)$在某区间 I 上有定义,若对于任意的 $x_1, x_2\in I$, $x_1<x_2$, 恒有

(1) $f(x_1) < f(x_2)$，则称函数 $f(x)$在 I 上**单调增加**；

(2) $f(x_1) > f(x_2)$，则称函数 $f(x)$在 I 上**单调减少**.

在定义 1.3 中，称 I 为函数的**单调区间**，若 I 为函数 $f(x)$的定义域，则称 $f(x)$为**单调函数**. 图 1-5(a)与图 1-5(b)中所示的函数，在所给的区间$[a, b]$上分别为单调增加函数与单调减少函数.



(a)　　　(b)

图 1-5

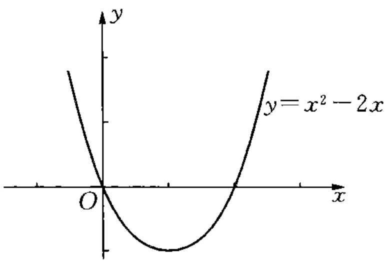


图 1-6

例 1.5　函数 $f(x) = x^2 - 2x$ 在区间 $(-\infty, 1]$上单调减少；在区间$[1, +\infty)$上单调增加，但在其定义域$(-\infty, +\infty)$内，$f(x) = x^2 - x$ 不是单调函数(见图 1-6).

3. 有界性

定义 1.4　设函数 $f(x)$在集合 I 上有定义，若存在常数 $M > 0$，使得对任意的 $x \in I$，恒有

$$|f(x)| \leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$在 I 上**有界**，否则称 $f(x)$在 I 上**无界**.

例如 $f(x) = \frac{1}{x}$，在区间$(1, +\infty)$内有界，因为对任意的 $x \in (1, +\infty)$，均有 $\left|\frac{1}{x}\right| < 1$；但 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, +\infty)$内无界，这是因为无论 M 有多大，总存在 $x \in (0, +\infty)$，使$\frac{1}{x} > M$.

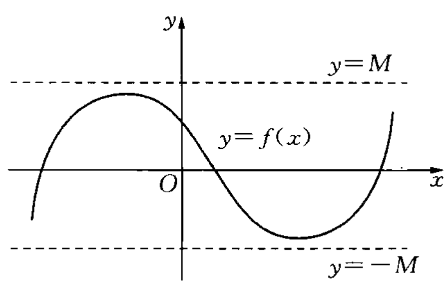


图 1-7

若函数 $f(x)$在定义域 D 上有界，则称 $f(x)$为**有界函数**，如正弦函数 $f(x) = \sin x$ 为有界函数，满足 $|\sin x| \leqslant 1$ $(-\infty < x < +\infty)$. 如图 1-7 所示，有界函

数的图形总能夹在两条直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间.

4. 函数的周期性

定义 1.5　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在正常数 T，使得对任意的 $x\in D$，恒有

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**，满足上式的最小正数 T_0 称为 $f(x)$ 的**周期**.

例如，三角函数 $\sin x$ 与 $\cos x$ 都是周期为 2π 的周期函数，$\tan x$ 与 $\cot x$ 都是周期为 π 的周期函数；函数 $a\sin(kx+b)$ $(a\neq 0,\ k>0)$ 的周期为 $\frac{2\pi}{k}$.

若 $f(x)$ 是周期为 T_0 的周期函数，则在长度为 T_0 的两个相邻区间上，函数图形有相同的形状.

例 1.6　某年度季节性商品的销售量在 1 月 1 日最低至 6 000，在 7 月 1 日最高至 9 000，销售量 Q 在此两值之间依正弦曲线改变，求 Q 作为时间 t 的函数表达式.

解　设 $Q=a\sin(kt+b)+c$，其中 t 以年初以来的月为单位计量. 因为周期 $T=12$ 个月，即 $\frac{2\pi}{k}=12$，从而 $k=\frac{\pi}{6}$；又因为振幅为 $9\,000-6\,000=3\,000$，故 $a=1\,500,\ c=7\,500$；当 $t=0$ 时，$Q=6\,000$ 为最小值，可取 $b=-\frac{\pi}{2}$，则所求函数关系为

$$Q=1\,500\sin\left(\frac{\pi}{6}t-\frac{\pi}{2}\right)+7\,500.$$

§1.3　复合函数与反函数

一、复合函数

一家生产空调室外机支架的小企业一年内员工人数和薪酬情况保持稳定，月产量 Q(副)是投入的资金 k(元)的函数

$$Q=\frac{k}{20}-200\ (4\,000\leqslant k\leqslant 10\,000),$$

每月投入的资金 k 是月份 t 的函数

$$k=-\frac{500}{3}t^2+2\,000t+4\,000\ (t\in\{0,1,\cdots,12\}),$$

那么月产量 Q 可以替换成

$$\begin{aligned}Q&=\frac{1}{20}\left(-\frac{500}{3}t^2+2\,000t+4\,000\right)-200\\&=-\frac{25}{3}t^2+100t\ (t\in\{0,1,\cdots,12\}),\end{aligned}$$