世纪独立学院系列规划教材

# 微积分（经济管理）

彭红军　张伟　李媛　等编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

21世纪独立学院系列规划教材

# 微积分（经济管理）

彭红军　张　伟　李　媛　石澄贤
张小美　黄秀琴　高安力　编

机械工业出版社

本书根据高等学校经济管理类专业微积分课程的教学大纲组织编写，突出由浅入深、循序渐进的编写思想，全书内容和难度适中、表述通俗、注重数学知识的应用.

教材每节开始前先提出问题，引发学生思考，然后引出本节内容；节后配有习题．各章末都配有两套自测题．书末附有习题和自测题答案.

本书的主要内容有函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、向量与空间解析几何初步、多元函数微分学、二重积分、微分方程与差分方程、无穷级数、经济管理中常用数学模型及软件.

本书可作为独立学院、民办高校、成人高校的经济管理类和文科专业的教材.

**图书在版编目(CIP)数据**

微积分：经济管理/彭红军等编．—北京：机械工业出版社，2009.9
(21世纪独立学院系列规划教材)
ISBN 978-7-111-28310-2

Ⅰ.微…　Ⅱ.彭…　Ⅲ.微积分—高等学校—教材　Ⅳ.O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第164095号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号　邮政编码100037)
责任编辑：韩效杰　版式设计：霍永明　责任校对：李秋荣
封面设计：赵颖喆　责任印制：乔　宇
北京机工印刷厂印刷(三河市南杨庄国丰装订厂装订)
2009年10月第1版第1次印刷
169mm×239mm・26.5印张・516千字
标准书号：ISBN 978-7-111-28310-2
定价：39.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务
社服务中心：(010)88361066
销 售 一 部：(010)68326294
销 售 二 部：(010)88379649
读者服务部：(010)68993821

网络服务
门户网：http://www.cmpbook.com
教材网：http://www.cmpedu.com

# 前　言

独立学院、民办高校已经成为高等教育的重要组成部分. 此类高校大多定位于以培养创新应用型本科人才,但是独立学院、民办高校的基础课教育,往往照搬公立大学成熟的课程设置、教学计划和教材,导致了独立学院、民办高校的基础课教育与应用性人才培养目标偏离,课程设置脱离专业实际、学生实际和就业需求. 如何通过基础课改革,强化学生实践能力与创新能力的培养,对于独立学院、民办高校提升办学质量和形成培养特色具有重要意义.

编写经济管理专业的"微积分"教材,是我们推动独立学院、民办高校、成人高校教育教学改革的一项积极尝试. 本书编者都是独立学院、民办高校教学第一线的数学教师,在长期的教学过程中积累了丰富的教学经验. 本书适用于独立学院、民办高校等经济管理类专业和文科专业的学生,编写上具有以下特点:

(1) 本书具有经济管理应用性特点. 本书根据高等学校经济管理类专业微积分课程的教学大纲组织编写,紧密结合经济管理专业特点,把数学知识在经济管理中的应用融合到教学中. 书中专门介绍了经济管理中的常用函数的建立与意义,边际分析与弹性分析,极值与最值问题,定积分、微分方程在经济管理中的应用,以及经济管理中常用的最小二乘法和差分方程. 教材最后一章介绍了经济管理中的常用数学建模方法与软件,激发学生进一步学习和应用数学思想和工具的兴趣.

(2) 本书编写上突出由浅入深、循序渐进的特点. 第一章专门介绍"函数",回顾介绍初等数学的重要内容,为引入微积分学奠定基础;教材每节开始前都有一段引言,提出问题,引发学生思考,然后引出本节内容.

(3) 本书具有内容和难度适中的特点. 考虑到学生的数学基础,对于一些高等数学中难度较大且超出教学基本要求,而经济管理专业中应用不多的知识,不予编入;对于一些经济管理专业学生必须学会的数学知识,在例题、习题等编写中,尽量做到难度适度.

(4) 本书具有通俗性特点. 对于一些数学定义、定理、方法,尽量用通俗易懂的语言加以描述,如复合函数求导的"剥壳法",多元复合函数求导的"链式法则",分部积分法的"反对幂三指"方法等等;一些数学定义、定理、方法,用示意图的形式加以描述,通俗直观.

(5) 本书编写上突出精讲多练的特点. 本书各节都配有一定量的习题,每章结束,都有两套自测题,学生可以通过练习和自测检验学习效果.

书中带有“ * ”的部分内容，是为了照顾内容体系的完整性而编入，教学过程中作为选讲内容.

感谢中国矿业大学徐海学院对本书的编写工作给予的大力支持；感谢机械工业出版社李永联主任和江苏工业大学吴建成老师，是他们在做了大量调研工作后，牵头组织了独立学院、民办高校基础课教材的编写工作，并对本书的编写提出了许多宝贵的意见和建议；感谢中国矿业大学徐海学院张倩老师对本书的编写提出了意见和建议；感谢中国矿业大学李晓飞、余俊两名研究生试做了全部习题，并对全书进行了校对.

由于我们水平有限，对教材编写的内容和难度的理解和掌握存在一定的局限性，书中定有不妥甚至错误之处，恳请读者批评指正.

编　者

# 目　　录

# 第一章 函 数

微积分是高等数学的基本内容，是研究自然和社会规律的重要工具，它不仅在经济领域中有着直接的应用，而且也是学习其他经济数学知识的基础．微积分的主要研究对象是函数，本章我们将在中学已有知识的基础上，复习和介绍函数及其相关知识，并做适当延伸.

## 第一节 集合、区间、邻域

引 很多学生普遍对高等数学有一种畏惧感，或说对学好高等数学的自信心不够强，那么，高等数学的学习是不是高深莫测呢？学习高等数学需要哪些预备知识呢？本节介绍常量与变量、集合、绝对值、区间与邻域及其相关知识.

### 一、常量与变量

在观察自然现象或研究科技问题的过程中，会遇到各种不同的量；有的量不变化，始终保持一定的数值，这种量称为**常量**；有的量不断变化着，可以取不同的数值，这种量称为**变量**.

常量可以看成变量的特例.

通常用字母 $x,y,z,t$ 等表示变量；用字母 $a,b,c$ 或 $x_0,y_0,z_0$ 等表示常量.

### 二、集合

具有某种共同属性的事物的全体称为**集合**．集合中的事物称为这个集合的**元素**.

例如，某厂生产的所有产品构成一个集合，其中每个产品是这个集合的元素．再如，全体实数构成集合，称为**实数集**，每一个实数就是实数集中的元素．

习惯上，用大写字母如 $A,B,C$ 等表示集合，用小写字母如 $a,b,c,x,y,t$ 等表示集合的元素．通常用 $\mathbf{R}$ 表示实数集，用 $\mathbf{Q}$ 表示有理数集，用 $\mathbf{Z}$ 表示整数集，用 $\mathbf{N}$ 表示自然数集.

给定一个集合 $A$，如果 $a$ 是集合 $A$ 的元素，则记作 $a\in A$，读作"$a$ 属于 $A$"；如果 $a$ 不是集合 $A$ 的元素，则记作 $a\notin A$（或 $a\,\overline{\in}\,A$），读作"$a$ 不属于 $A$".

集合的表示方法有两种：一种是**列举法**又称**穷举法**，就是在花括号内把集合中所有的元素一一列举出来，元素之间用逗号隔开.

如自然数集 $\mathbf{N}$ 可以记作

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots\}.$$

另一种方法是**描述法**，就是在花括号内，左边写出集合的一个代表元素，右边写出该集合的元素所具有的性质，中间用竖线“|”分开．如以 $x$ 表示集合 $A$ 的元素，则记作

$$A=\{x\mid x\text{ 所具有的性质}\}.$$

**例如**　满足不等式 $1<x<3$ 的一切实数构成的集合可以表示成

$$A=\{x\mid 1<x<3\}.$$

不含有任何元素的集合称为**空集**．记作 $\varnothing$.

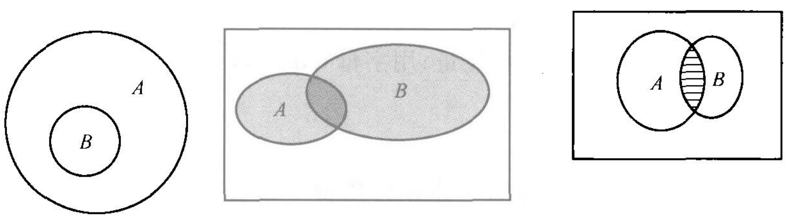
例如，集合 $\{x\mid x>3$ 且 $x<2\}=\varnothing$.

如果集合 $B$ 的元素都是集合 $A$ 的元素，称集合 $B$ 是集合 $A$ 的**子集**；记作 $B\subset A$，或 $A\supset B$. 如图 1-1a 所示.

如果 $A\supset B$ 且 $B\supset A$，则称集合 $A$ 和集合 $B$ **相等**，记作 $A=B$. 表示集合 $A$ 和集合 $B$ 中元素完全相同.

$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$ 表示所有属于集合 $A$ 或属于集合 $B$ 的元素共同构成的一个新集合，称为集合 $A$ 和集合 $B$ 的**并集**，简称**并**. 如图 1-1b 阴影部分所示.

$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$ 表示所有属于集合 $A$ 且属于集合 $B$ 的元素共同构成的一个新集合，称为集合 $A$ 和集合 $B$ 的**交集**，简称**交**．如图 1-1c 阴影部分所示.




a)　　b)　　c)

图　1-1

**例 1**　设 $A=\{x\mid -1<x\leqslant 3\}$，$B=\{x\mid 2<x\leqslant 6\}$，则

$$A\cup B=\{x\mid -1<x\leqslant 6\},$$

$$A\cap B=\{x\mid 2<x\leqslant 3\}.$$

## 三、绝对值

设 $a\in\mathbf{R}$，符号 $|a|$ 表示 $a$ 的**绝对值**，定义

$$|a|=\begin{cases} a, 当 a\geqslant 0, \\ -a, 当 a<0. \end{cases}$$

在几何上，$|a|$表示点 $a$ 至原点 $O$ 的距离；例如点$-1$ 和点 1 至原点的距离都是 1，$|-1|=1$，$|1|=1$. 由算术根的意义可知

$$|a|=\sqrt{a^2}.$$

可见，永远有$|a|\geqslant 0$.

绝对值具有下述性质：

1. $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$；
2. $|a|\leqslant b$（$b$ 是常数，且 $b>0$）等价于$-b\leqslant a\leqslant b$；
   $|a|\geqslant b$（$b$ 是常数，且 $b>0$）等价于 $a\leqslant -b$ 与 $a\geqslant b$；
3. $|ab|=|a||b|$；
4. $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}(b\neq 0)$；
5. $|a+b|\leqslant |a|+|b|$；$|a-b|\geqslant |a|-|b|$.

下面仅证性质(5).

**证** (5)由性质(1)知

$$-|a|\leqslant a\leqslant |a|,\ -|b|\leqslant b\leqslant |b|,$$

两式相加，得

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant |a|+|b|,$$

所以由性质(2)可知，上式等价于

$$|a+b|\leqslant |a|+|b|,$$

又

$$|a|=|(a-b)+b|\leqslant |a-b|+|b|,$$

移项即得

$$|a-b|\geqslant |a|-|b|.$$

## 四、区间与邻域

区间是一类常用的数集. 设有实数 $a$ 和 $b$，且 $a<b$，数集$\{x|a<x<b\}$称为**开区间**，简记作$(a,b)$，即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}.$$

$a$ 和 $b$ 称为开区间$(a,b)$的端点，这里 $a\notin(a,b)$，$b\notin(a,b)$. 数集$\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$称为**闭区间**，简记作$[a,b]$，即

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}.$$

$a$ 和 $b$ 也称为闭区间$[a,b]$的端点，这里 $a\in(a,b)$，$b\in(a,b)$.

类似还有

$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\},$$

$$[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}.$$

$(a,b]$和$[a,b)$都称为**半开区间**.

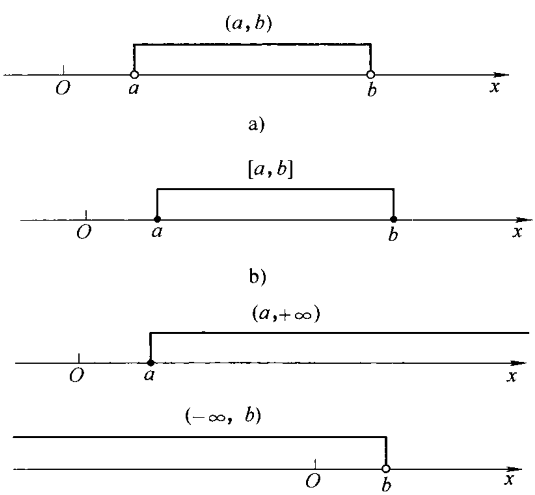
以上这些区间都称为**有限区间**，区间长度为$b-a$，从数轴上看，这些有限区间是长度为有限的线段．如图 1-2a)、b)所示.

此外还有所谓**无限区间**，引进记号$+\infty$(读作正无穷大)和$-\infty$(读作负无穷大). 例如

$$[a,+\infty) = \{x \mid x \geqslant a\},$$
$$(-\infty,b) = \{x \mid x < b\}.$$

这两个无限区间在数轴上如图 1-2c)所示.

全体实数的集合 **R** 也可记作$(-\infty, +\infty)$，它也是无限区间.




c)

图 1-2

如果不需要指明所讨论区间是否包含端点，以及是有限区间还是无限区间，我们就简单地称之为“区间”，且常用 $I$ 表示.

邻域也是经常用到的一个概念. 开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$称为点 $x_0$ 的 $\delta$ **邻域**，通常简记作 $U(x_0,\delta)$，即

$$U(x_0,\delta) = \{x \mid x_0-\delta < x < x_0+\delta\}.$$

在数轴上，$U(x_0,\delta)$ 表示以点 $x_0$ 为对称中心，以 $\delta$ 为半径画出的开区间，如图 1-3 所示.

由于$(x_0-\delta,x_0+\delta)$相当于$|x-x_0|<\delta$，因此

$$U(x_0,\delta) = \{x \mid |x-x_0| < \delta\}.$$

常用的还有点 $x_0$ 的空心邻域$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$，此时将点 $x_0$ 排除在外，记作 $\mathring{U}(x_0,\delta)$，即

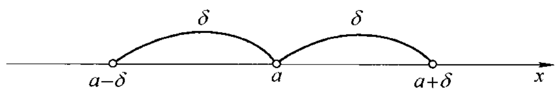



图　1-3

$$\mathring{U}(x_0,\delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}.$$

这里 $0<|x-x_0|$ 就表示 $x \neq x_0$.

## 习　题　1.1

1. 已知 $A=\{0,2,4,6,9\}$, $B=\{-3,-2,-1,0,1,2,4\}$，求 $A\cap B$, $A\cup B$.
2. 已知 $A=\{x|x\geqslant -1\}$, $B=\{x|x<3\}$，求 $A\cap B$, $A\cup B$.
3. 把集合 $A=\{x||x-3|\leqslant 2\}$ 用区间记号表示出来.
4. 用集合表示出 $U(2,1)$, $U(-1,2)$.
5. 用区间表示出 $U(2,1)$, $U(-1,2)$.

## 第二节　函　数

**引**　在同一个问题中常会涉及几个变量，这些变量并不是孤立地变化着，而是相互有一定的依赖关系. 变量之间的这种关系抽象为数学概念就是函数的概念. 本节将介绍函数的概念及函数的几种简单性态.

### 一、函数的概念

现在，先让我们考察两个例子.

**例 1**　当圆的半径 $r$ 变化时，圆的周长 $l$ 也跟着变化. 这两个变量之间的关系为

$$l = 2\pi r,\ 0 < r < +\infty.$$

其中，$\pi$ 是圆周率，是常量. 当半径 $r$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内任意取定一个数值时，由上式可以确定圆的周长 $l$ 的相应数值.

**例 2**　在某地乘坐出租车，3 公里之内付 7 元，3 公里以上，按每公里 1.4 元计价. 设变量 $x,y$ 分别表示某乘客的里程与应付的车费，则

当 $0<x\leqslant 3$ 时，$y=7$；

当 $x>3$ 时，$y=7+1.4(x-3)=1.4x+2.8$，

即
$$y = \begin{cases} 7, & 0 < x \leqslant 3, \\ 1.4x + 2.8, & x > 3. \end{cases}$$

当里程 $x$ 在区间$(0,+\infty)$内任意取定一个数值时，由上式可以确定乘客应付的车费 $y$.

抽去上面两个例子中所考虑的量的实际意义，它们都描述了两个变量之间的依赖关系. 这种依赖关系给出了一种对应法则，根据这一法则，当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时，另一个变量就有确定的值与之对应．两个变量之间的这种对应关系正是函数概念的实质.

**定义 1**　给定两个实数集 $D$ 和 $M$，若有对应法则 $f$，使得对 $D$ 内每一个数 $x$，都有确定的一个数 $y\in M$ 与它相对应，则称 $f$ 是定义在数集 $D$ 上的**函数**，记作

$$f:D\to M,\text{或 } y=f(x),x\in D.$$

数集 $D$ 称为函数 $f$ 的**定义域**，数 $x$ 所对应的数 $y$，称为 $f$ 在点 $x$ 的**函数值**，当 $x$ 取遍 $D$ 的各个数值时，对应的函数值全体组成的数集

$$W=\{y\mid y=f(x),x\in D\}(\subset M)\text{ 称为函数 } f \text{ 的}\textbf{值域}.$$

习惯上，我们称此函数关系中的 $x$ 为**自变量**，$y$ 为**因变量**.

关于函数定义的几点说明：

(1) 函数 $y=f(x)$中表示对应法则的记号 $f$ 也可以改用其他字母，例如"$\varphi$"、"$\psi$"、"$F$"，等等．这时函数就记作 $y=\varphi(x)$，$y=\psi(x)$，$y=F(x)$，等等．有时也可直接记作 $y=y(x)$.

(2) 定义域 $D$ 和对应法则 $f$ 是确定函数的两个主要因素．因此，某两个函数相同，是指它们有相同的定义域和对应法则.

两个相同的函数，其对应法则的表达形式可能不同，如函数 $y=|x|$，$x\in\mathbf{R}$ 和 $y=\sqrt{x^2}$，$x\in\mathbf{R}$，是两个相同的函数，但其对应法则的表达形式不同.

两个相同的函数，其变量的表示符号也可能不同，如函数 $y=\sin x$，$x\in\mathbf{R}$ 和 $u=\sin v$，$v\in\mathbf{R}$，是两个相同的函数，但其自变量和因变量采用了不同的表示符号.

(3) 在函数定义中，对每一个 $x\in D$，若只有唯一的一个 $y$ 值与它对应，则这样定义的函数称为**单值函数**；若同一个 $x$ 值可以对应多于一个的 $y$ 值，则称这种函数为**多值函数**．例如函数 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$是多值函数. 在本书范围内，若没有特殊说明，指得都是单值函数.

(4) 在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的．如例 1、例 2 中，定义域均为 $D=(0,+\infty)$. 又如在经济活动中，商品总价值 $R$ 与商品量 $Q$ 之间的函数关系 $R=PQ$（$P$ 为单价），其定义域应是正数集合，自变量 $Q$ 不能取负数.

在数学中，有时不需要考虑函数的实际意义，只是抽象地研究用算式表达的函数．这时我们约定：函数的定义域是使算式有意义的自变量所能取的一切实数值．例如下列情况：

1) 分母不得为零；

2）偶次方根的被开方式必须大于或等于零；

3）对数的真数部分必须大于零，底数部分必须大于零且不等于 1；

4）反正（余）弦函数，其自变量的绝对值不能大于 1.

这样，求函数的定义域往往归结为解不等式或不等式组．在高等数学中，定义域通常用区间表示.

**例 3** 求函数 $y=\dfrac{2}{3x+1}$ 的定义域.

**解** 因为分母不能为零，所以 $3x+1\neq 0$，即 $x\neq -\dfrac{1}{3}$，于是所求定义域为 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{3},+\infty\right)$.

**例 4** 求函数 $y=\sqrt{9-x^2}+\ln(x-1)$ 的定义域.

**解** 要使函数有意义，必须满足

$$\begin{cases} 9-x^2\geqslant 0, \\ x-1>0, \end{cases}$$

解得 $-3\leqslant x\leqslant 3$ 且 $x>1$，于是得所求定义域为 $(1,3]$.

**例 5** 设 $f(x)=x^2-3x+1$，求 $f(-1)$，$f(1)$，$f(f(x))$.

**解** $f(-1)=(-1)^2-3(-1)+1=5$；

$f(1)=1^2-3\times 1+1=-1$；

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= (f(x))^2-3f(x)+1 \\ &= (x^2-3x+1)^2-3(x^2-3x+1)+1 \\ &= x^4-6x^3+8x^2+3x-1. \end{aligned}$$

## 二、函数的表示法

常用的函数的表示法有三种，即解析法（或称公式法）、列表法和图示法.

（1）**解析法**（或称**公式法**）. 用代数式表达一个函数关系的方法称为解析法，如：

$$y=3x^2-2;\quad y=\frac{1}{x}-\sqrt{x^2-2};\quad R=0.5Q.$$

有些问题中，两个变量之间的关系无法只用一个数学式子表达，需用两个或两个以上的式子才能表达完整，如例 2. 像这类在其定义域内，自变量取不同的值时，不能用一个统一的代数式表示，而需用两个或两个以上的式子表示的函数，称为**分段函数**.

如果函数的对应法则可以用自变量 $x$ 的代数式明显表示，形如 $y=f(x)$，这样的函数称为**显函数**，例如 $y=x^2$ 是显函数；如果函数的对应法则由一个二元方程确定，形如 $F(x,y)=0$，则这样的由方程 $F(x,y)=0$ 确定的函数称为**隐函数**，例如方程 $x^2+y=4$ 和方程 $e^{xy}-xy=0$ 分别确定了一个隐函数 $y=y(x)$.

把一个隐函数化为显函数，叫做隐函数的显化，如由方程 $x^2+y=4$ 可以解出函数 $y=4-x^2$，但是由方程 $e^{xy}-xy=0$ 确定的隐函数不能显化，解不出函数 $y=y(x)$，这说明由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数不一定都能显化.

（2）**列表法**. 用一个表格来表达一个函数关系的方法称为列表法，如：

表 1-1

| 月份 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 销售额 $Q$(万元) | 11 | 12.5 | 9.0 | 8.5 | 8 | 8.7 |
| 利润 $R$(万元) | 2.0 | 2.6 | 1.6 | 1.2 | 1.0 | 1.4 |

表示某商店上半年的销售额与所获得的利润之间的函数关系．常用的对数表、三角函数表等都是以列表法来表示函数的.

（3）**图示法**. 在平面直角坐标系中，取自变量 $x$ 在横坐标轴上变化，对应的因变量 $y$ 在纵坐标轴上变化，则平面点集

$$\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$的**图形**. 用函数的图形表示函数的方法称为图示法.

在实际应用中，必须从实际出发，选用适当的函数表示方法或者综合使用上述三种方法.

**例 6** 确定分段函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2, -1\leqslant x\leqslant 1;\\ 2x, 1<x\leqslant 3.\end{cases}$$

的定义域并作出函数的图形.

**解** 易知，函数的定义域为$[-1,3]$，其图形如图 1-4 所示.

**例 7** 设 $x$ 为任一实数，不超过 $x$ 的最大整数称为 $x$ 的**最大整数**，记作$[x]$. 例如：$[0.5]=0$，$[-0.5]=-1$，$[-3.2]=-4$. 若把 $x$ 看作自变量，则函数

$$y=[x]$$

称为**取整函数**. 它的定义域是$(-\infty,+\infty)$，值域是全体整数. 函数的图形如图 1-5 所示，这种图形称为**阶梯曲线**.

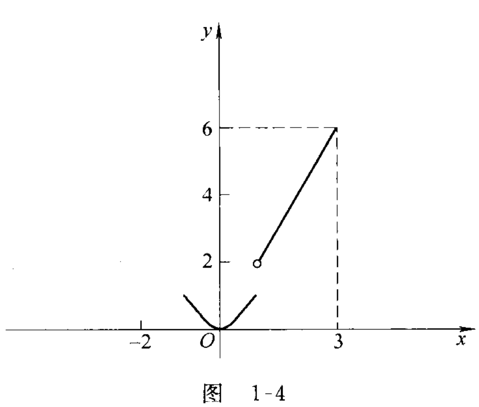



图 1-4

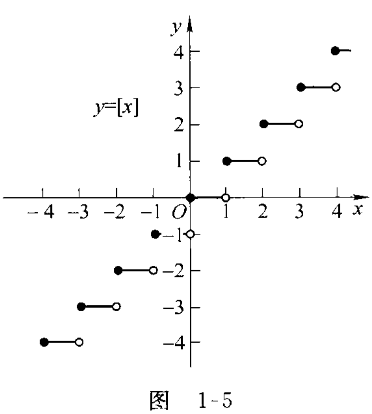



图 1-5

**例 8** 函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, x\geqslant 0,\\ -x, x<0\end{cases}$$

称为**绝对值函数**. 其定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$[0,+\infty)$. 函数图形如图 1-6 所示.

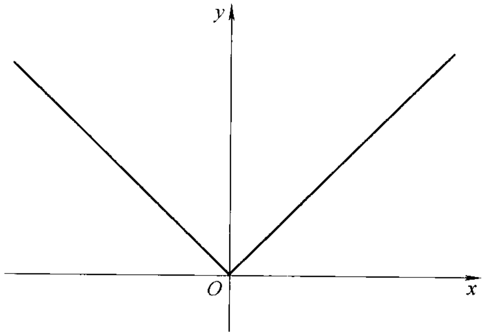



图 1-6

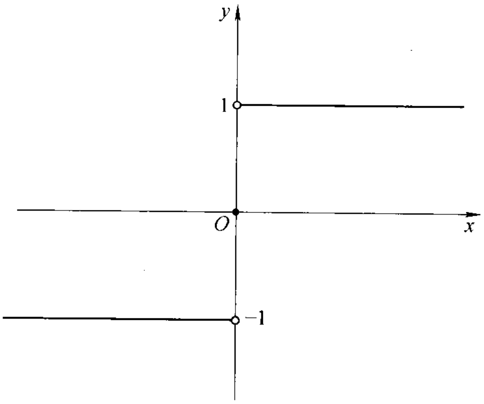



图 1-7

**例 9** 函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, x>0,\\ 0, x=0,\\ -1, x<0\end{cases}$$

称为**符号函数**,其定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$\{-1,0,1\}$. 函数图形如图 1-7 所示.

## 三、函数的几种简单性态

研究函数的各种性态是高等数学的重要内容之一,这里将介绍今后会经常遇到的函数的几种简单性态,以后还会陆续学习函数的其他性态.

**1. 函数的有界性**

**定义 2** 设有函数 $y=f(x)$,$x\in I$,若存在数 $K_1$,对于任意的 $x\in I$,都有

$$f(x)\leqslant K_1$$

则称函数 $y=f(x)$在 $I$ 上**有上界**,数 $K_1$ 称为函数 $y=f(x)$在 $I$ 上的一个上界. 若存在数 $K_2$,对于任意的 $x\in I$,都有

$$f(x)\geqslant K_2$$

则称函数 $y=f(x)$在 $I$ 上**有下界**,数 $K_2$ 称为函数 $y=f(x)$在 $I$ 上的一个下界. 若存在正数 $M$,使得

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称函数 $f(x)$在 $I$ 上**有界**或称 $f(x)$为 $I$ 上的**有界函数**. 否则，如果这样的正数 $M$ 不存在，就称函数 $f(x)$在 $I$ 上**无界**，此时函数 $f(x)$为 $I$ 上的**无界函数**.

**例 10** 函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$的定义域 $D=[-1,1]$，因为对于任意的数 $x\in D$，都有 $|f(x)|\leqslant 1$，所以函数 $f(x)$在其定义域 $D$ 内是有界的.

**例 11** 设有函数 $f(x)=x^2-1$，分别讨论它在区间$[-4,3]$与$[0,+\infty)$上的有界性.

**解** 当 $x\in[-4,3]$时，有 $|f(x)|=|x^2-1|\leqslant 15$，所以函数 $f(x)$在区间$[-4,3]$上有界；当 $x\in[0,+\infty)$时，函数 $f(x)$有下界，例如 $-1$ 就是它的一个下界，但是没有上界，这样就不存在正数 $M$，使得 $|f(x)|=|x^2-1|\leqslant M$ 对于$[0,+\infty)$上的一切数都成立，所以函数 $f(x)$在$[0,+\infty)$上无界.

由例 11 可以看出，函数的有界性是相对于指定区间而言的．同时容易证明，函数 $f(x)$在区间 $I$ 上有界的充分必要条件是它在区间 $I$ 上既有上界又有下界.

**2. 函数的单调性**

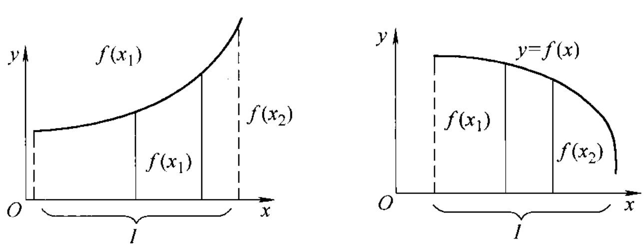
**定义 3** 设有函数 $y=f(x)$，$x\in I$，若对于任意的数 $x_1<x_2\in I$，都有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$在区间 $I$ 上是**单调增加**的，如图 1-8a 所示；若对于任意的数 $x_1<x_2\in I$，都有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$在区间 $I$ 上是**单调减少**的，如图 1-8b 所示. 单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.




a) b)

图 1-8

例如，函数 $f(x)=x^3$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的，如图 1-9 所示. 而函数 $f(x)=x^2$ 在区间$[0,+\infty)$上是单调增加的，在区间$(-\infty,0]$上是单调减少的，在区间$(-\infty,+\infty)$内函数 $f(x)=x^2$ 不是单调的，如图 1-10 所示.

**3. 函数的奇偶性**

**定义 4** 设函数 $f(x)$的定义域 $D$ 是关于原点对称的区间（则若 $x\in D$，必有 $-x\in D$），如果对于任一数 $x\in D$，恒有

$$f(-x)=f(x)$$