

汽车控制理论基础 及应用

何渝生 编

重庆大学出版社

U46
31

~~U46~~
~~6~~
17

汽车控制理论基础及应用

何渝生 编

重庆大学出版社

内 容 简 介

本书从汽车工程的要求出发,深入浅出地介绍了现代控制理论的基础知识,并将它具体应用到汽车悬架系统和汽车防抱死制动系统等的控制中。全书共分六章,包括现代控制理论基础、最优控制、最优控制理论在悬架设计中的应用、现代控制理论在汽车防抱制动系统中的应用、随机最优控制和振动与噪声的主动控制。书后附有习题,供教师和学生选用。

本书可作为高等学校汽车、拖拉机、工程机械及其它车辆专业的教材,也可供从事汽车工程的技术人员及大专院校有关专业的师生参考。

汽车控制理论基础及应用

何渝生 编

责任编辑 梁涛

*

重庆大学出版社出版发行

新华书店经销

重庆通信学院印刷厂印刷

*

开本:787×1092 1/16 印张:8.25 字数:206 千

1995年1月第1版 1995年1月第1次印刷

印数:1—3000

ISBN 7-5624-0986-2/U·13 定价:7.00元

(川)新登字020号

前 言

近十多年来,由于计算机的发展和高质量控制的需要,使现代控制理论得到了很大发展,受到了广大科学工作者和工程技术人员的重视。目前,它不仅成功地应用于宇航、航空、航海等领域,而且也在各工业部门和汽车行业中得到了广泛的应用。现代控制理论已广泛应用于现代汽车设计工作中,是设计和研究汽车振动、噪声的主动控制、汽车主动悬架、汽车防抱制动系统及汽车自动变速等的基础。随着汽车工业的发展和电子技术在汽车中广泛的应用,汽车行业的技术人员必须掌握一定的现代控制理论知识,在1990—1992年召开的3次全国汽车拖拉机教学指导委员会上,不少委员都建议在汽车专业开设控制理论课程,但苦于没有足够的教学资料和教材,因此至今开出控制理论课程的学校还不多。虽然编者早在1987年就开始讲授《现代控制理论在汽车工程中应用》的选修课,并于1988年1月和1993年2月编印过两本讲义,但总感到资料缺乏,赶不上控制理论在汽车工程中应用迅速发展的速度。由于至今国内尚无这方面的教材,为了满足汽车专业30学时左右讲课的需要,我们试编了这本书,作为学习这门课程的主要参考书。

在本书的编写过程中,严格按照专业的要求,力求做到少而精,由浅入深,循序渐近,突出基本概念和基本理论,尽量避免繁而冗长的推导和使用较深的数学。

本书的最大特点是密切结合汽车专业,全书共分六章,前两章是汽车中必须要牵涉到的一些现代控制理论基础,第三、四两章介绍现代控制理论在汽车上两个很重要的应用方面,第五章介绍内容较深的随机控制问题。第六章振动与噪声的主动控制由美国威斯康星大学博士研究生何康渝编写。

在本书出版之际,我要衷心地感谢我的老师,美国威斯康星大学(University of Wisconsin-Madison)教授 T. C. Huang,当编者于1985—1987年在美国访问期间,在科学方法和思想上得到他很大的帮助,特别是1994年再次访问时,他为我创造了很多讨论的机会,这对编成此书起了很大的作用。

最后还要感谢重工车辆工程学院汽车教研室和重庆大学汽车动力学研究室的支持。

由于编者水平有限,书中的缺点和错误在所难免,诚恳地希望读者和同行批评指正。

编者

1995年1月于重庆

目 录

第一章 现代控制理论基础.....	1
第一节 控制系统的基本概念.....	1
第二节 古典控制理论和现代控制理论.....	4
第三节 状态变量及状态方程.....	6
第四节 线性状态方程的解	16
第五节 线性系统的可控性与可观测性	25
第二章 最优控制	31
第一节 概述	31
第二节 最优控制问题的提法和数学模型	31
第三节 求解最优控制问题的变分法及庞脱里雅金原理	35
第四节 具有二次型性能指标的线性系统的最优控制	41
第三章 最优控制理论在汽车悬挂设计中的应用	48
第一节 汽车悬挂的减振与控制	48
第二节 汽车悬挂的减振性能	48
第三节 两自由度汽车主动悬架和被动悬架的减振特性	51
第四节 线性最优控制理论在二自由度汽车主动悬架设计中的应用	54
第五节 汽车空间模型的主动控制	57
第六节 主动悬架及半主动悬架的应用	60
第四章 现代控制理论在汽车防抱制动系统中的应用	63
第一节 汽车防抱制动系统的结构原理	63
第二节 汽车防抱制动系统的控制方法	65
第三节 现代控制理论在汽车防抱制动系统中的应用	68
第四节 控制规律的计算实例及系统设计	71
第五章 随机最优控制	74
第一节 概述	74
第二节 离散随机最优控制	74
第三节 连续系统的随机控制	77
第四节 汽车自动驾驶系统的控制	80
第五节 准最优化方法——最优控制理论在减振中的应用	83
第六节 单自由度与二自由度系统的减振分析	86
第七节 状态估计和卡尔曼滤波	90
第六章 振动与噪声的主动控制	96
第一节 振动的主动控制概论	96
第二节 振动的主动控制方法	97

第三节	连续系统振动的主动控制.....	104
第四节	噪声的主动控制简介.....	110
第五节	主动控制技术在汽车工程中的应用和进展.....	112
习题		115
参考文献		125

第一章 现代控制理论基础

在科学技术的发展过程中,自动控制起着重要的作用,它已成为机械制造业和其它工业生产过程中非常重要和不可缺少的组成部分。应用控制理论不但可使工程设计人员获得动态系统的最优性能,还可提高产品质量,降低生产成本,提高劳动生产率,并能使人们从繁重的体力劳动和重复的手工劳动中解放出来。因此,广大的工程技术人员有必要掌握一定的自动控制方面的知识,特别是近年来控制理论在汽车工程中的应用已逐渐增多,它将成为研究汽车和改进其使用性能的重要工具和方法,为此本书将首先介绍控制理论方面的基本知识。



图 1-1 开环控制系统框图

第一节 控制系统的基本概念

在控制理论中所研究的系统,都可定义为由若干元件所组成,用来完成某种给定任务的一种组合。若某系统在输入或干扰的作用下,能将输出量保持在希望的数值上时,则会将这种系统称为自动调节系统。应该指出:系统的概念不仅限于物理系统,它可以扩充到任何动态现象,例如在经济、运输、人口增长和生态学等方面所遇到的一些现象。因此“系统”这个概念应当理解为包括物理学、生态学和经济现象中的系统。若系统的输出量对系统的控制作用没有影响,则此系统称为开环系统,其输入量与输出量的关系如图 1-1 所示。与开环系统相反,凡是系统输出信号对控制作用能有直接影响的系统都叫做闭环系统。它是一种能对输出量与参考输入量进行比较,并力图保持两者之间的既定关系的反馈控制系统。图 1-2 是闭环控制系统的输出量和输入量之间关系的方框图。

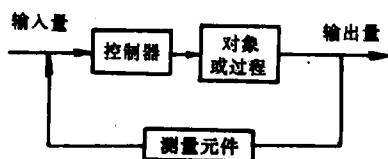


图 1-2 闭环控制系统框图

它是一种能对输出量与参考输入量进行比较,并力图保持两者之间的既定关系的反馈控制系统。图 1-2 是闭环控制系统的输出量和输入量之间关系的方框图。

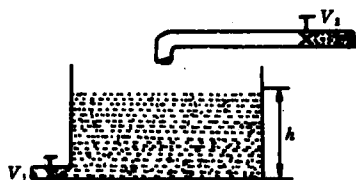


图 1-3 贮槽液面控制系统



图 1-4 贮槽液面控制系统方块图

开环控制系统是一种最简单的控制装置,广泛存在于日常生活与工程实际中,例如如图 1-3、图 1-4 所示的液面控制系统便是一个开环控制系统,无论通过阀 V_1 的出口流量如何变化,都希望贮液槽的液面 h 保持在一定高度范围内,这可通过人工随时调节阀 V_2 以控制输入的流量来完成,由于通过阀 V_1 的输出流量不能控制通过阀 V_2 的输入流量,以保证液面的高度,即输入量与输出量无关,因此它是一个开环系统,如果在此系统中加入一个测量控制装置,将输入与输出联系起来就变成一个闭环系统,如图 1-5 所示,在此系统中

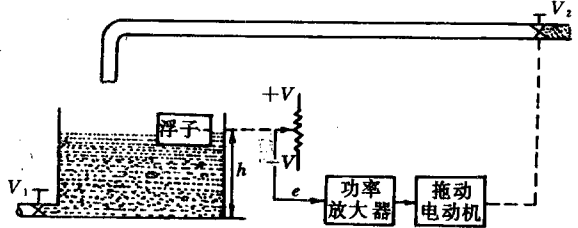


图 1-5 贮槽液面自动控制系统

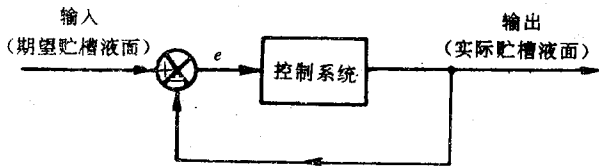


图 1-6 闭环控制系统方块图

若贮槽液面稍有变化,就会立即产生一个误差电压 e ,经放大后作用于调节阀 V_2 的拖动电机来控制流入的流量以保持液面的高度。图 1-7 是一种柴油发动机角速度闭环控制系统。根据发动机希望的转速调准好离心调速器的预紧弹簧,使调速器的飞锤和供油阀保持在一定的位置,如果发动机的转速降低,则调速器的离心力下降,从而使供油增加,发动机转速将随之增大,直至上升到希望的转速为止。相反,当发动机转速增大到超过希望的转速值时,调速器的离心力便会增大,通过杠杆和油路系统使供油量减少,使发动机的转速随之下降,直至下降到希望的转速为止。

汽车可以视为由若干部件组成的物理系统,如果把环境、汽车和驾驶员看作一个统一的整体,便构成一个闭环系统,在此系统中,驾驶员操纵的方向盘使汽车转向,同时驾驶员通过眼睛、手和身体等感知来测量汽车的转向效果,并经过头脑比较和判断来修正方向盘的操纵,显然这是一个通过驾驶员把输出反馈到输入,而构成的一个人工闭环系统,如图 1-8 所示,其中,驾驶员是“感受”、“测量”元件和“判断”、“指令”元件,汽车是被控或调节对象,行驶方向则是调节的参数,假如在上述系统中不计驾驶员的反馈作用,则应把汽车作为开环系统来分析,此时改变汽车运动状态的输入量(或称干扰)主要来自驾驶员操纵方向盘使前轮转向,空气动力作用(如横向风)和路面不平 3 个方面。如图 1-9 所示,驾驶员操纵方向盘的方式可以是给方向盘一个角位移或给方向盘作用一个力矩,在汽车工程中,前者称为位置控制,后者称为力控制。可以看出,这种汽车开环系统的特点是系统的输出参数对输入控制没有影响,其输入量与输出量的关系取决于系统的动力学特性。

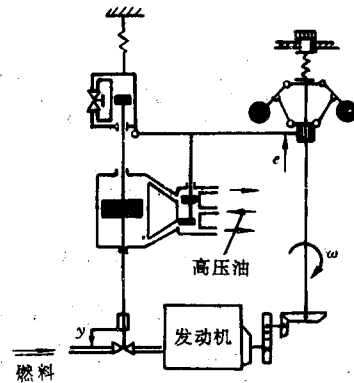


图 1-7 发动机角速度闭环控制系统

作为汽车控制系统的另一个例子,可研究由一人驾驶汽车对速度的控制,驾驶员根据环境选定一合适的速度作为行驶时的参考速度。驾驶员观察速度计可看出汽车实际速度的大小,如

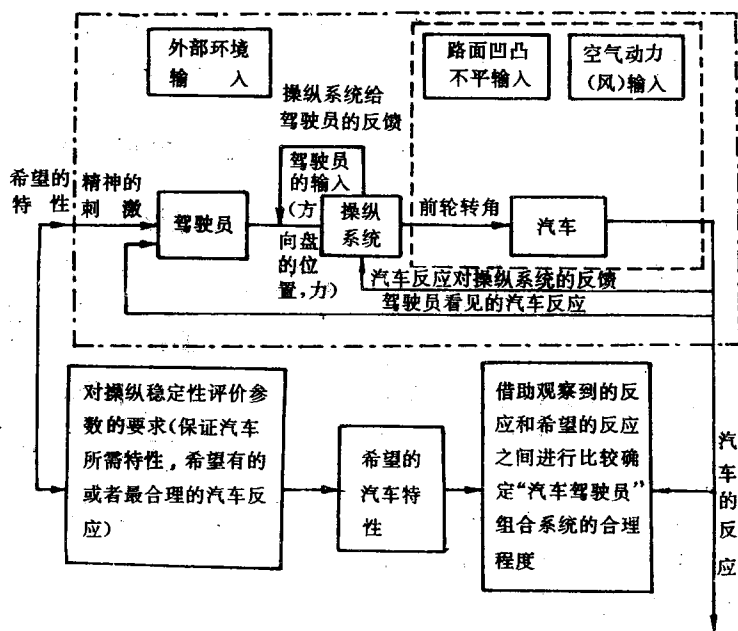


图 1-8 “汽车—驾驶员”组合闭环

果汽车行驶得太慢,他就踩下油门,使汽车速度提高;如果实际速度太高,他就释放对油门的压力而使汽车速度放慢。这就是有驾驶人员的反馈控制系统。这里的驾驶人员可以很容易地由一个机械的、电的或类似的设备来代替。用一个发电机产生正比于速度的电压来代替驾驶员观察速度表,此电压可以与对应的所希望的速度的参考电压相比较。电压差可以作为偏差信号调节油门,根据需要来增大或减小速度。

采用按时基控制的交通管制系统也是一种开环控制系统。但是如果在城市交通拥挤的地方,对等待通行信号的汽车数量进行不断的测量,并将这种信息传递到发出通行信号的中心控制计算机,则这种系统就变成了闭环控制系统。

通过以上的实例可以看出,一个闭环的控制系统一般应包括被控对象、检测装置、控制装置、和执行机构等 4 个部分。闭环自动控制系统的特点是利用输入信息与反馈至输入处的信号之间的偏差,对系统的输出进行控制。其过程是检测装置将检测到的输出信号加以处理,然后通过反馈回路送入控制装置或比较装置,并与输入信息进行比较,其偏差就是控制装置或比较装置的输出,用它来控制被控制对象,使输出满足预定的要求。

闭环系统的优点是采用了反馈,因而使系统响应对外界干扰和内部系统参数变化很不敏感,这样对于给定的控制对象,就可采用不太精密的和成本比较低的元件来构成精确的控制系统。相反,开环控制系统就不能做到这一点。但是,在闭环控制系统中往往会出现极重要的稳

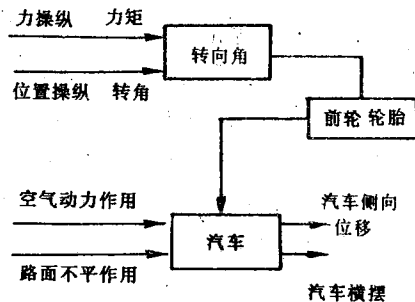


图 1-9 作为开环系统的汽车简图

定性问题。这是因为闭环系统很容易引起过调,从而造成系统产生等幅振荡或变幅振荡,而对于开环系统来说,稳定性则不是一个重要问题,因此从稳定性的观点出发,建造一个开环控制系统比较容易。综上所述,可以看出:当系统输入量预先知道,且不存在任何扰动时,则可采用开环系统;只有当存在着无法预计的扰动及系统中元件参数存在着无法预计的变化时,则应采用闭环系统。

以上是根据反馈情况将系统分为开环系统和闭环系统,另外还可按输出的变化规律将系统分为:

(1)自动调节系统 在外界干扰作用下,系统的输出仍能基本保持为常量的系统。

(2)随动系统 在外界条件作用下,系统的输出能相应于输入在广阔范围内按任意规律变化的系统。例如,炮瞄雷达系统就是随动系统。飞机的位置是输入,高射炮的指向是输出,高射炮随飞机位置的变动而变动。

(3)程序控制系统 在外界条件作用下,系统的输出按预定程序变化的系统,例如,数控机床进给系统就是程序控制系统,显然程序控制系统可以是开环控制系统,也可以是闭环控制系统。

最后还应指出:根据描述系统的数学方程和输入信号的类型,可将系统分为如图 1-10 所示的类型,图中虚线表示存在同一层次上相似的分类。

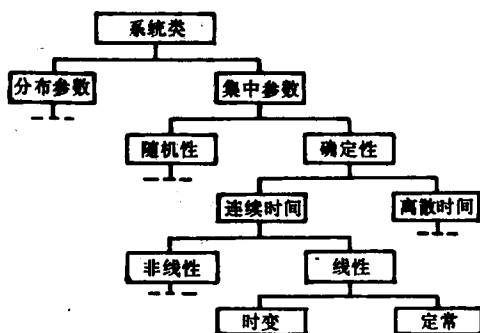


图 1-10 系统分类图

第二节 古典控制理论和现代控制理论

研究控制理论的主要目的是设计一个满足既定性能要求的最优控制系统。显然所设计的控制系统必须是稳定的或有适当的相对稳定性外,还必须使控制系统的输出误差减小到零或某一小的容许值,对于具有反馈的闭环系统来说,就需要设计一个控制器来根据输出、输入和干扰的大小,产生一定的控制信号来控制系统的输出。为了确定最优控制信号,必须规定一些性能指标,这些指标实际上是系统对理想性能偏离大小的度量,在整个工作时间内,控制信号变化的规律叫做控制规律。从数学的观点来看,控制问题不过是在各种工程及经济上的约束条件下,确定最优控制规律,使得给定的性能指标减小到最小。

在很多情况下,控制系统的设计可按以下的步骤进行:

(1)在开始设计时,首先应熟悉技术要求或性能指标,了解给定对象和元件的动态特性,若有可能应采用综合方法来建立系统的数学模型。

(2)根据数学模型,采用数学方法进行设计,求出控制问题的数学解答。

(3)将数学模型排到计算上。对设计出来的系统在各种信号和扰动作用下的响应进行计算,若不满意,必须进行再设计和相应的分析,这样反复进行,直到满意为止。

(4)根据设计的控制系统,建造系统的样机,它以适当的精度代替系统的数学模型,最后还

应根据建成的样机进行实验,看是否满足性能要求,否则,应对样机进行修改或重新进行设计和试验,直到样机满足要求为止。

控制理论的发展大致可以分为两个阶段。第一个阶段是本世纪 30 年代以波德(Bode)和奈奎斯特(Nyquist)为首发展起来的以频率特性方法为代表的古典控制理论。第二个阶段是本世纪 60 年代以贝尔曼(Bellman)和卡尔曼(Kalman)为首发展的以状态空间方法为代表的现代控制理论。

目前,虽然古典控制理论应用得比较广泛,但是古典控制理论有它的局限性,因此,对于线性的多输入多输出系统,如用古典控制论中的传递函数来描述,其表达式将会是众多和浩繁的。另外,对于非线性系统与时变系统就更无法应用传递函数来研究了。在应用古典控制理论分析时,需要较多地采用图解法或利用诺模图的方法进行作图和试凑。这种方法在一定程度上决定于使用者的经验,不易得到最优控制。此外,古典控制论中的频域方法比较曲折和复杂,特别是对于高阶系统的各种指标或传递函数本身的计算是相当麻烦的。由于技术的进步,使得控制的性能向更高的目标前进。这不仅意味着处理更复杂、更大规模的系统成为可能,而且也意味着对系统高性能的追求。古典控制理论中的超调、过渡时间等的性能指标被诸如最快时间、最少能量等的最优运行指标所代替,而且最优控制本身在许多场合便意味着使用非线性时变的控制策略,即使原系统本身是线性和定常的。这些要求和问题促进了现代控制理论的产生和发展。现代控制理论和古典控制理论不论在数学模型上,应用范围上,或是在研究方法上都有很大不同。它不仅适用于单输入单输出系统,也适用于多输入多输出系统。而且这些系统既可以是线性的,也可以是非线性的;可以是定常的,也可以是时变的。它不像古典控制理论那样仅着眼于系统的外部联系,而且还注意到系统的内部状态,以及内部和外部状态之间的相互联系,它把系统的内部状态、外部状态均作为变量来处理,并由此建立起系统在状态空间中的表达式(一种比传递函数更为完整的表达式)。现代控制理论便是以这种表达式作为数学模型,采用一种对于控制过程来说比较直接的时域法进行系统分析研究,因此,有可能针对由时域给出的性能指标来实现系统的最优控制。但是现代控制理论并不排斥经典控制理论的一些特点,在对动态系统进行分析时,古典控制理论与现代控制理论,可以互相补充,相辅组成。但是现代控制理论确有许多古典控制理论所不及的优点,目前还正以日新月异的面貌向前发展。

在现代控制理论中,采用一阶线性或非线性的状态微分方程组的形式来描述系统。由于应用了向量和矩阵等数学工具,因而大大简化了数学表达方法。对于在古典控制理论中,既要作大量计算,又比较难于解决的非线性和时变等系统,在现代控制理论中便可迎刃而解。

应用状态空间法对系统进行分析,主要借助于计算机解出状态方程,根据状态方程的解来对系统作出评估,由于不需经过任何变换,在时域内直接求解和分析,因而这种方法较为直观。时域内的一些指标,可按定义根据时间历程的具体数据直接计算出来。如果采取人机对话方式,将系统有关参数的不同值分别送入计算机,根据计算结果就可对各种参数的影响作出评估。

在现代控制理论中,可以在严密的理论基础上,比较方便地得出满足一定性能指标的最优控制系统,或者得到满足一定性能指标的系统最优参数值。对于系统中一些不易直接测量的状态变量,还可采用观测器来重新构造这些变量,给系统的分析和品质改善的实现带来不少方便。

现代控制理论主要包括两个方面的内容:其一是控制对象的研究即系统理论;其二是

规律的研究,即最优估计与最优控制。

系统理论是现代控制理论的基础,其任务是研究动态系统的数学描述和内在属性。对动态系统的数学描述,主要使用状态空间法;关于动态系统的内在属性主要是指可控性、可观测性、可辨识性和稳定性等。除系统识别外,在现代控制理论中还要研究确定性最优控制、最优估计、随机控制,自适应控制等内容。

确定性最优控制问题是指控制对象的数学模型完全已知,在不考虑系统和测量的随机噪声情况下的最优控制问题,在这方面已产生了许多理论和方法如变分法、庞脱里雅金原理及动态规划法等解析方法,以及最速下降法、牛顿-康托罗维奇法等数值分析法。另外,要实现闭环最优控制,必须获取控制对象的全部状态变量,但在实际上,由于存在明显噪声和系统噪声干扰,往往不能得到全部状态变量。故必须研究状态最优估计问题,即从混有噪声,且在不足的测量信息中对状态向量进行估计,其常用的方法有:最小二乘法、卡尔曼滤波法、维纳滤波法等。在确定性最优控制问题的基础上,当考虑随机干扰信号,且结合状态最优估计就得到随机控制问题。当控制对象的数学模型未知时,为了进行最优控制,必须研究系统的结构辨识和参数估计问题。这种伴随着噪声干扰的控制问题又称最优自适应控制问题。显然它是最优控制、最优估计和最优控制问题的综合。另外,在现代控制理论最新研究的问题中还有微分对策、分布参数控制理论、大系统理论等方面的内容。

最后应该指出:现代控制理论作为一种具有普通意义的理论,它不限于使用在某一个工业技术领域中,它有自己的体系和理论上的严密性和客观性。同时,它又是为各专业服务,为各专业所应用的,控制理论基础和专业技术结合起来,使专业得到更新的理论工具,推动专业技术工作的更加深入,从而使各专业技术的潜力充分发挥出来。近20年来,现代控制理论在汽车工程中得到了广泛的应用就说明了这一问题。目前现代控制理论已在汽车的主动悬架系统,自动变速系统,自动防抱系统和汽车自动驾驶系统等方面已经有了不少成功的应用实例。随着汽车技术发展的需要,将有更多的汽车部件应用现代控制理论的方法来分析和设计,以便提高汽车产品的性能,满足人们日益增长的要求,因此,在研究现代控制理论在汽车工程中的应用之前,有必要介绍一些必要的现代控制理论的基础知识。

第三节 状态变量及状态方程

在古典控制理论中,常采用传递函数作为系统的数学模型,这种数学模型主要所表达的是系统的输入和输出关系,它所描述的只是系统的端部特性,但具有相同端部特性的系统,其结构特性可并非总是一样的,因此用传递函数作为系统的描述有时是不完整的。而且只知端部状态对于充分了解一个系统的运动状况,掌握系统的全体性质往往也是不够的。例如,有一列车在外力作用下作直线运动。若要想说明该列车在某一时刻 t_0 时的状态,光知道列车在 t_0 时的位置 $s(t_0)$,而不同时知道列车在此时刻的速度 $v(t_0)$,则还是不明确的。因为,位置相同,速度不同的列车所代表的运动状况并不一样。而本书将要介绍的现代控制理论中,则是采用状态方程和输出方程来描述系统的动态行为,这种系统的状态和状态空间表达式,不仅可以表示系统输入和输出间的外部关系,而且还能表示出系统内部全部状态和特性,不会因系统输入、输出的数目的增多而增加其在形式上的复杂性。另外,这种表达式还特别适合应用数字计算机进行计

算和分析,有很多突出的优点,因此状态空间分析是一种能更全面描述系统性能的一种较好的方法。

一、基本概念

状态本身并不是一个新的概念,在很长的时间内早已存在于古典动力学中,所谓系统的状态是指能完全描述系统的一个最少变量组,这里所谓的完全描述,其意义为当给定 $t=t_0$ 时刻的这组变量值和 $t \geq t_0$ 时的输入函数,那么在 $t > t_0$ 的任何时刻系统的行为便能完全确定,也就是说系统在 $t \geq t_0$ 时的状态,是由 t_0 时的状态和 $t \geq t_0$ 时的输入唯一确定,而与 t_0 时刻以前的状态和输出无关。

系统的状态变量是指能完全描述系统行为的最少变量组中的每一个变量,在一般情况下它是时间的函数,如果以最少的几个变量 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 可以完全描述系统,那么 $x_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, n$) 便是其中一个状态变量。在液压系统和机械系统中常采用系统中各点的流量、压力、位移、速度、加速度以及它们的导数来作为状态变量;在电学系统中,常以电压、电流、电荷、磁通等以及它们的导数来作为状态变量;在一般情况下,状态变量的选择,需要根据系统的具体情况来确定,但在实用中,多是选择容易测量的量作为状态变量。应该指出:虽然系统的输出变量可以是某一个状态变量,但输出变量与状态变量却是两个完全不同的概念,状态变量是描述系统行为的信息,而输出变量则是人们希望从系统中获得的响应。

系统的状态向量是以系统的一组状态变量 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, 为分量所构成的向量,并记为

$$X(t) = \{x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t)\}^T \quad (1-1)$$

当给定了 $t \geq t_0$ 时的输入 $u(t)$ 和起始时刻的状态 $X(t_0)$, 则状态向量 $X(t)$ 就能唯一地确定任何 $t \geq t_0$ 时系统的状态。如果把 n 个状态变量分别作为 n 维空间的坐标轴,则此空间称为 n 维状态空间,于是系统的任一状态,便可用状态空间中的一个相点来表示。

现代控制理论研究的控制系统,其变量为如图 1-11 所表示的 3 种类型,其中输出变量 $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$ 与控制系统的要求直接有关,输入变量 $u_1(t), u_2(t), \dots, u_l(t)$ 则是给系统的行为予以不同的影响,而状态变量 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 则反应系统内部的时域特征和输入、输出变量相关联,只要弄清这 3 个变量的变化及其相互的关系,就可以掌握系统的各种特性。

由状态变量的定义可知,系统在某时刻 t 的状态是由 $t=t_0$ 时刻的初始状态向量 $X(t_0)$ 和 t_0 到 t 时刻加在系统上的输入向量 $u(t_0, t)$ 所唯一确定,于是可表示为如下的函数关系

$$X(t) = F\{X(t_0), U(t_0, t)\} \quad (1-2)$$

式中 $X(t_0)$ —— 初始状态向量, $X(t_0) = \{x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)\}^T$;

$U(t_0, t)$ —— 从 t_0 到 t 的输入向量, $U(t_0, t) = \{u_1(t_0, t), u_2(t_0, t), \dots, u_l(t_0, t)\}^T$;

$F\{\}$ —— 表示一个单值向量函数。

类似的可写出在 t 时刻的输出向量 $Y(t) = \{y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)\}^T$ 与输入向量及状态向量的关系

$$Y(t) = G\{X(t_0), U(t_0, t)\} \quad (1-3)$$

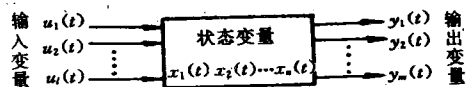


图 1-11 多输入、输出系统

式(1-2)和式(1-3)分别称为系统的状态方程与输出方程。

在一般情况下,控制系统的状态变量在暂态过程中是随时间变化的。因此描述系统状态的方程不是代数方程而应是微分方程,所以状态方程和输出方程常分别表示如下

$$\dot{X}(t) = F[X(t), U(t)] \quad (1-4)$$

$$Y(t) = G[X(t), U(t)] \quad (1-5)$$

若所论系统是线性时变系统,则其状态方程和输出方程将变为如下线性变系数微分方程

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)U(t) \quad (1-6)$$

$$Y(t) = C(t)X(t) + D(t)U(t) \quad (1-7)$$

式中的 $A(t)$ 是 $n \times n$ 阶矩阵,称为系统矩阵; $B(t)$ 是 $n \times l$ 阶矩阵,称为控制矩阵; $C(t)$ 是 $m \times n$ 阶矩阵,称为输出矩阵; $D(t)$ 是 $m \times l$ 阶矩阵,称为传递矩阵。这些矩阵中的各元素都是时间的函数。状态方程式(1-6)和(1-7)可用图 1-12 所示的方框图来表示。在方框图中的方框内是矩

阵符号或积分符号,各方框的输入和输出箭头上标明了相应的各种变量。

当所论线性系统的特性不随时间变化时,则此线性定常系统的状态方程和输出方程将变成常系数微分方程组和代数方程组,即

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \quad (1-8)$$

$$Y(t) = CX(t) + DU(t) \quad (1-9)$$

图 1-12 由(1-6)和(1-7)式定义的系统方框图

其中 A 、 B 、 C 、 D 分别为 $n \times n$ 、 $n \times l$ 、 $m \times n$ 及 $m \times l$ 阶常数矩阵。从以上的表达式可知:系统的状态方程式是表示系统构造和性质的微分式,而输出方程则只是一种变量的变换式。

为了加深对状态变量和状态方程的理解,下面介绍两个实例。

在图 1-13 所示的网络中,若已知电路中的初始电流 $i_L(t_0)$ 和电容上的初始电压 $u_c(t_0)$,则网络在任意时刻的状态都能唯一地被确定,故 $i_L(t_0)$ 和 $u_c(t_0)$ 可作为这一系统在 t_0 时刻的状态。由电学理论可知,在控制电压 $u(t)$ 作用下,只需要知道 i_L 和 u_c 就能够完全描述图 1-13 所示网络系统的行为, i_L 、 u_c 就可作此系统的状态变量,当然也可以选择 u_R 和 u_c 为状态变量。由此可见,状态变量不是唯一的,但应指出,同一系统的一组状态变量必为另一组状态变量的线性组合。

当选择 i_L 和 u_c 作为状态变量时,图 1-13 所示的系统的运动微分方程为

$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = u \quad (1-10)$$

$$\text{令} \quad \begin{cases} X_1 = i_L = C \frac{du_c}{dt} \\ X_2 = u_c \end{cases}$$

则可将式(1-10)写为

$$L\dot{X}_1 + RX_1 + X_2 = u$$

整理后得

$$\dot{X}_1 = -\frac{R}{L}X_1 - \frac{1}{L} \cdot X_2 + \frac{1}{L}u \quad (1-11)$$

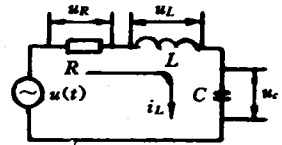


图 1-13 RLC 网络

$$X_2 = \frac{1}{C} X_1 \quad (1-12)$$

因此,就把一个二阶微分方程变成了关于两个状态变量 $X_1=i_L$ 和 $X_2=u_c$ 的两个一阶微分方程,方程式(1-11)和式(1-12)可以合并写为矩阵的形式,即

$$\begin{Bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1/L \\ 0 \end{Bmatrix} u \quad (1-13)$$

这一方程称为系统的状态方程。

系统的输出为

$$y = u_c = X_2$$

也可写成矩阵的形式

$$y = \{0 \quad 1\} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \quad (1-14)$$

这个方程称为系统的输出方程,它与系统的状态方程一起称为系统的动力学方程,它可以完全描述系统。系统的这种数学模型称为状态空间描述。此系统的动力学方程式(1-13)和式(1-14)一般都表示为如下简单的形式

$$\dot{X} = AX + Bu \quad (1-15)$$

$$Y = CX \quad (1-16)$$

这里

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \begin{Bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{Bmatrix} & X &= \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} & A &= \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{Bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{Bmatrix} & C &= \{0 \quad 1\} \end{aligned}$$

作为机械系统的例子,下面来求图 1-14 所示的具有被动悬挂的单自由度汽车的状态方程。

由牛顿第二定律可建立车体的运动微分方程

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -K(x - x_0) - C(\dot{x} - \dot{x}_0) \\ \ddot{x} &= \frac{K}{m}(x_0 - x) + \frac{C}{m}(\dot{x}_0 - \dot{x}) \end{aligned} \quad (1-17)$$

选择车体的绝对速度 $\dot{x}$ 和相对位移 $x_0 - x$ 为状态变量,并令

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - x & x_2 &= \dot{x} & \dot{x}_0 &= v_0 \\ \dot{x}_1 &= \dot{x}_0 - \dot{x} = -x_2 + v_0 \end{aligned} \quad (1-18)$$

则

因此式(1-17)可写成

$$\dot{x}_2 = \frac{K}{m} x_1 + \frac{C}{m} \dot{x}_0 - \frac{C}{m} x_2 \quad (1-19)$$

由式(1-18)和式(1-19)可得

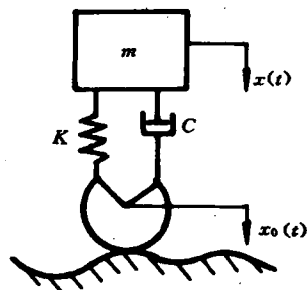


图 1-14 单自由度汽车模型

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{K}{m} & -\frac{C}{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1 \\ C/m \end{Bmatrix} v_0$$

这就是所求的状态方程。

二、状态方程的建立

众所周知,一般系统的动态行为常可用系统的运动微分方程式来表示,而系统的运动微分方程式又可以根据系统的物理本质来写出。在力学和其他学科中已对如何建立系统的运动微分方程式作了比较详尽的讨论,在此只介绍如何根据系统的运动微分方程来写出系统状态方程的问题。

1. 微分方程式作用函数不含导数的情况

设系统的数学模型为 n 阶常微分方程

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0y = b_0u \quad (1-20)$$

式中 u 和 y 是系统的输入变量和输出变量。根据常微分方程理论,若知道 $t=0$ 时的 $y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$ 和 $t \geq 0$ 时的输入 $u(t)$, 就可完全确定系统的未来行为, 因此可选择 $y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t)$ 为 n 个状态变量, 即可令

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \dot{y}(t) \\ &\vdots \\ x_n(t) &= y^{(n-1)}(t) \end{aligned}$$

于是方程式(1-20)可以改写为 n 个一阶微分方程组

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= -a_0x_1 - a_1x_2 - \cdots - a_{n-1}x_n + b_0u \end{aligned} \quad (1-21)$$

引入状态向量 X 及其微分

$$X = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{Bmatrix} \quad X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}$$

则可由式(1-21)写出公式(1-22)所描述系统的状态方程及输出方程, 则

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + Bu \\ Y &= CX \end{aligned} \quad (1-22)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & & -a_{n-1} \end{bmatrix}_{n \times n} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad (1-23)$$

$$C = \{1 \ 0 \ \cdots 0\}_{1 \times n} \quad (1-24)$$

从上面的方程可以看出,一个 n 阶常微分方程,当选择输出函数 $y(t)$ 及 1 到 $(n-1)$ 阶导数为 n 个状态变量后,便可得到 n 个一阶方程,从而组成一个 n 维状态方程。

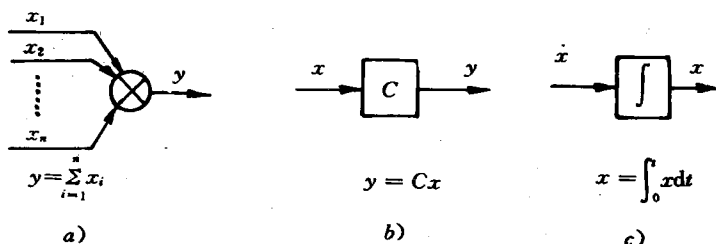


图1-15 框图表示符

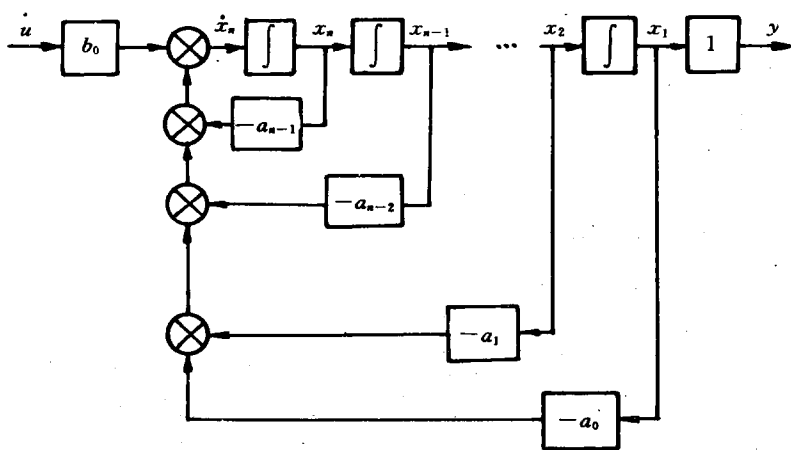


图1-16 式(1-21)状态方程框图

状态方程和输出方程可直观而清晰地用状态方框图来表示,如图2-15所示。图中1-15a)表示相加,图1-15b)表示相乘,图1-15c)中 $\int$ 表示积分。于是公式(1-22)可用状态方程框图1-16来表示。

〔例1-1〕 设系统的微分方程式为

$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 41y = 6u$$

试求此系统的状态方程。

〔解〕 此系统的输出变量和输入变量为 y 和 u 。选择 y 及其 1、2 阶导数为状态变量: $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = \dot{y}(t)$, $x_3(t) = \ddot{y}(t)$, 由式(1-21)、(1-22)、(1-23)、(1-24)可写出此系统的状态方程和输出方程