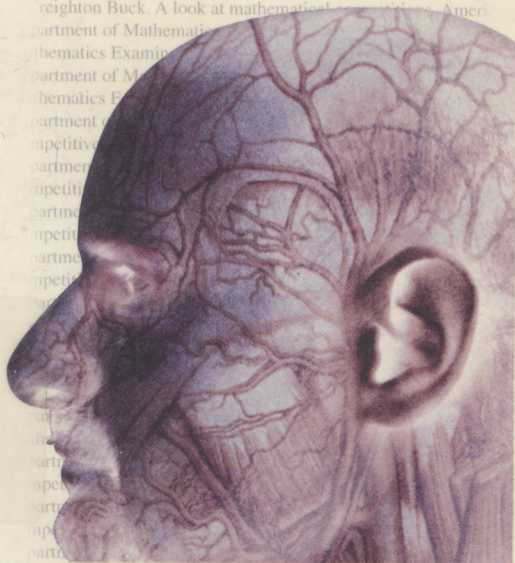


● 英汉对照科普读物 ●

Mathematics, Brain's Exercise:  
The Stanford Mathematics Problem Book

数学锻炼大脑：  
斯坦福入学数学试题与解答

[美] G. 波利亚 J. 基尔帕特里克 著  
陆柱家 译



科学普及出版社

**英汉对照科普读物**

**Mathematics, Brain's Exercise:**  
**The Stanford Mathematics Problem Book**

**数学锻炼大脑：**  
**斯坦福入学数学试题与解答**

[美] G.波利亚 J.基尔帕特里克 著  
陆柱家 译

科学普及出版社  
·北 京·

## 图书在版编目(CIP)数据

数学锻炼大脑:斯坦福入学数学试题与解答/(美)波利亚,(美)基尔帕斯里克著;陆柱家译. —北京:科学普及出版社,2003.9

(英汉对照科普读物)

ISBN 7-110-05616-3

I. 数... II. ①波... ②基... ③陆...  
III. 数学课—高等学校—入学考试,美国—解题 IV. G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 087657 号  
Copyright © 1974 by Teachers College, Columbia University

著作权合同登记号 图字:01-2003-5116 号

科学普及出版社出版

北京市海淀区中关村南大街 16 号 邮政编码:100081

电话:62179148 62173865

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

北京市卫顺印刷厂印刷

\*

开本:787 毫米×960 毫米 1/32 印张:8.625 字数:100 千字

2003 年 9 月第 1 版 2003 年 9 月第 1 次印刷

印数:1-4000 册 定价:12.60 元

作者 [美]G.波利亚  
J.基尔帕特里克  
译者 陆柱家

策划编辑 肖 叶  
责任编辑 谭建新 马冠英  
责任校对 张林娜  
封面设计 王 喆  
责任印制 王 沛

## 译者序



当我收到这本书的作者之一 J. 基尔帕特里克教授寄来的英文原版的复印件，并粗略浏览了一遍之后，我的第一个念头是：它是 G. 波利亚 (George Pólya) 的世界名著《How to Solve It》(《怎样解题》<sup>[17]</sup>) 基本思想的某种具体体现，特别是其中的第三部分 (提示部分)，更是“波利亚模式”的精髓——“怎样解题表”的直接应用。因而随即萌发了第二个念头：把这本书翻译出来，供我国广大的教育工作者 (不仅是数学老师，也不仅是中学老师) 以及更广大的学生，特别是中学生、自学青年和各类成人学校的学生阅读。

众所周知，数学是一门讲求严格的科学，是演绎科学。但它的另外一个特点却往往被教数学的人和学数学的人所忽视 (不言而喻，该负责的应为前者)，这个特点即为，当它还未获得结论时，它更像实验性的归纳科学。这正是数学老师应该利用

各种方式去告诉学生们的。应该使学生们产生“这个解答是如何想出来的？”这样的问题，也应该告诉学生们你是怎样想出解答来的，从而引导学生自己去想出其他各种各样问题的解答。这样，学生们除了学到知识外，还锻炼了分析问题和解决问题的能力，同时也可使有些人认为“枯燥”的数学变得“活”起来而充满情趣。如果此译本能在这方面对读者有所帮助，那么译者把该书介绍给我国读者的意图就达到了。

为了使广大读者对该书的水准和作用有清晰的了解，简要地介绍一下该书的第一作者 G. 波利亚将不无益处。

G. 波利亚，1887 年 12 月 13 日出生于匈牙利布达佩斯的一个律师家庭。1912 年在布达佩斯的 Eotvos Loránd 大学获得数学博士学位之后，他逐渐成为一个闻名世界的著名数学家和优秀的数学教育家。他的科学活动超过 75 年之久，直至 1985 年 9 月 7 日在美国加州 Palo Alto（斯坦福大学所在地）去世。1940 年他移居美国。在数学的许多领域中，诸如复变函数、数论、概率论、组合学、几何以及应用数学，他都作出了重大的贡献，其合作者中不乏当代最伟大的数学家。他一生中所写的论

## 译者序

文（包括与他人合作的）超过 250 篇，美国麻省理工学院出版社于 20 世纪 70~80 年代出版了他的研究论文全集（共四册）。对于数学教育，波利亚从 40 年代起就投之以巨大的热情，在这之前他即已进行了长期的认真研究。从那时起他的几部有关数学教育的著作陆续出版。在他的诸多著作（包括数学理论方面的专著在内）中<sup>①</sup>，他最为得意的是《怎样解题》一书。至 1983 年，此书被译成 17 种文字，销售量几乎达到 100 万册。他在数学教育方面的其他著作，被译成 6 种文字的《Mathematics and Plausible Reasoning》<sup>[18,19]</sup>、被译成 8 种文字的《Mathematical Discovery》<sup>[20,21]</sup>，以及我们手中的这本 G. 波利亚与 J. 基尔帕特里克合著的书，在数学教育界引起了极大的兴趣。波利亚的这几部书已成为数学教育方面的经典著作。对于斯坦福大学的选拔考试，波利亚自始至终是积极支持者和热情参与者，并认为中止这项计划“是个错误”。

波利亚花了极大的精力研究启发术（heuristics），他的教学方式被称为“波利亚模式”。Descartes（笛卡儿）、Leibniz（莱布尼茨）、

---

① 中国翻译出版了波利亚所著几乎所有的书。

Helmholtz (亥姆霍兹)、Poincaré (庞加莱) 和 Hadamard (阿达马) 等历史上的大数学家是启发术的先驱者, 而波利亚则是当今启发术最杰出的代表. 学生们欣赏波利亚引人入胜的教学——这种风格的教学基于帮助学生自己去发现教师将要教的东西这一想法, 启发式教学使他们获益匪浅.

由于 G. 波利亚对数学的诸多重要贡献, 他于 1963 年获得美国数学会的杰出贡献奖. 1968 年, 波利亚的系列影集《Let Us Teach Guessing!》(《让我们教猜想!》) 在教育影片图书馆协会的第 10 届年度电影节上获数学物理组的“蓝带奖”.

波利亚是美国国家科学院和美国艺术与科学学院的院士, 匈牙利科学院的荣誉院士, 伦敦数学会、瑞士数学会以及美国工业数学与应用数学学会的荣誉会员, 法国巴黎科学院的通讯院士. 巴黎科学院有非常严格的制度, 只有在一个院士去世后, 他的席位才能由他人递补. 波利亚的席位的第一个拥有者是牛顿. 波利亚还被众多的大学授予名誉学位.

该书的第二部分内容, 作为斯坦福大学每年挑选有特殊数学才能学生的试题, 也为在中学生和教师中以至在全社会激起对数学的兴趣, 是经过精心

## 译者序

设计安排的。其内容未超出我国现行的中学教学大纲。然而，这些问题与教科书中“正规”习题的“味道”迥然不同。这里需要灵活运用所学到的知识，需要创造性，而不是机械地搬套成法。因此，无论教师（包括学生家长），还是学生，都能从这本书中得到他们应该能够得到的东西。为了更好地体会“波利亚模式”，《怎样解题》书中的“怎样解题表”被翻译出来作为这本小册子的附录。读者可以看到，在问题集的提示部分中下划波纹线的句子正是来自“怎样解题表”。读者在做题之前不妨认真读一下附录，看看对自己会有些什么启发、帮助。对于教师，不妨再深入一步去阅读 G. 波利亚的几部名著<sup>[17~21]</sup>。

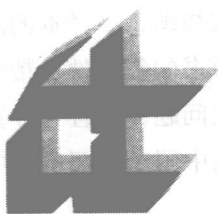
译者借此机会感谢本书的原出版单位——美国哥伦比亚大学教师学院的教师学院出版社（Teachers College Press, Teachers College, Columbia University），他们为本书译成中文出版提供了无偿的版权许可。同样，也要感谢美国普林斯顿大学出版社（Princeton University Press）无偿地同意把波利亚的名著《How to Solve It》中的“怎样解题表”作为本书中译本的附录，从而使中译本锦上添花，有源可溯。译者特别要感谢本书的作者之一 J. 基

## 译者序

尔帕特里克教授。没有他的热诚相助，中译本的出版是不可能的。他给译者寄来原书的复印件，帮助与上述两个出版社联系解决版权问题，并且十分真诚而慷慨地表示希望译本得以在中国出版而不从中索取任何酬金。

最后，译者要感谢科学普及出版社对本书的出版给予了热情的支持，感谢编辑和校对对译本作了认真的审改工作，使本书得以面世并增色不少。

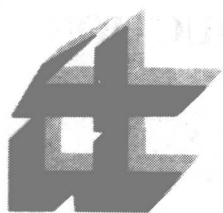
译者



# Contents

---

|                              |         |
|------------------------------|---------|
| Part One: Introduction ..... | ( 1 )   |
| Part Two: Problems .....     | ( 17 )  |
| Part Three: Hints .....      | ( 79 )  |
| Part Four: Solutions .....   | ( 121 ) |



# 目 录

---

|               |       |
|---------------|-------|
| 第一部分 序言 ..... | ( 2 ) |
| 第二部分 问题 ..... | (18)  |
| 第三部分 提示 ..... | (80)  |
| 第四部分 解答 ..... | (122) |
| 附录 怎样解题 ..... | (257) |
| 参考文献 .....    | (261) |

# Part One INTRODUCTION



For twenty years, from 1946 to 1965, the Department of Mathematics at Stanford University conducted a competitive examination for high school seniors. The immediate and principal purpose of the examination was to identify, among each year's high school graduates, singularly capable students and attract them to Stanford. The broader purpose was to stimulate interest in mathematics among high school students and teachers generally, as well as the public.

The examination was modeled on the Eötvös Competition [see 23], <sup>①</sup> which was organized in Hungary in 1894 and which, in turn, appears to have been suggested by similar competitions in England and France. Gabor Szegő, chairman of the Stanford Department of Mathematics in 1946 and winner of the Eötvös

---

① Numbered references are on pages 261 – 264

# 第一部分 序言



从 1946 年到 1965 年的 20 年时间内,斯坦福大学数学系每年为中学高年级学生举办一次选拔考试.考试的主要目的,是从每年的高中毕业生中挑选有特殊才能的学生,并把他们吸引到斯坦福大学来.而更广泛的目的则为在中学学生和教师中,以及在全社会激起对数学的兴趣.

斯坦福选拔考试模仿厄特沃什(Eötvös)竞赛<sup>[23]</sup><sup>①</sup>,匈牙利于 1894 年组织了后者,而后,在英国和法国也有了类似的竞赛.1946 年斯坦福大学数学系主任和 1912 年厄特沃什竞赛的优胜

---

① 参考文献序号,见 261~264 页.

Competition in 1912, initiated the Stanford examination.

The examination was established in the belief that an early manifestation of mathematical ability is a definite indication of exceptional intelligence and suitability for intellectual leadership in any field of endeavor. Furthermore, mathematical ability can be tested at a comparatively early age because it is manifested "not so much by the amount of accumulated knowledge as by the originality of mind displayed in the game of grappling with difficult though elementary problems [2, p. 406]."

As Buck [1] noted some years ago in reviewing mathematical competitions, an examination can be designed, broadly speaking, to test either achievement or aptitude. The Stanford University Competitive Examination in Mathematics was of the latter type. It emphasized

originality and insight rather than routine competence . . . A typical question might call for specific knowledge within the reach of those being tested, but would call for the employment of this in unusual ways requiring a high degree of ingenuity. The question may in fact introduce certain concepts which are quite unfamiliar

者,加博尔·舍贵(Gabor Szegö),创办了斯坦福选拔考试。

选拔考试是基于下述信念而举办的:数学才能的早期表现是特殊的智力和适应于任一知识领域的领导才能的象征。才能“不只由很多的知识积累,而主要地由在解决即使是初等问题的困难中体现出来的创造性<sup>[2,406页]<sup>①</sup>”所表现。</sup>

正如十几年前 Buck<sup>[1]</sup>在评论数学竞赛时注意到的那样,一般而言,一个考试可以被设计成用于测试掌握知识的程度或能力。斯坦福大学的数学选拔考试属于后者。它强调:

创造性和洞察力,而不是通常的能力……一个典型的问题也许要求学生具有此问题涉及到的特殊的知识,但是更要求学生用一种需要高度机智的非寻常方式去运用这些知识。这个问题或许正引入一个对于学生来说极不熟悉

---

① 参考文献序号和文献中的页码。

## Part One INTRODUCTION

to the student. In short, the winning student is asked to demonstrate research ability [1, pp. 204–205].

The first Stanford examination, in 1946, was administered in 60 California high schools to 322 participants. The winner was awarded a one-year scholarship by Stanford University; honorable mention and a mathematics book were given to three other participants. In 1953, the examination was extended beyond California to include Arizona, Oregon, and Washington; the number of scholarships was increased to two; and the number of honorable mention awards and books was increased to ten or so. From 1958 to 1962, the examination was cosponsored by Sylvania Electric Products, Inc. The last examination, in 1965, was administered to about 1200 participants in 151 centers in California, Arizona, Idaho, Montana, Nevada, Oregon, and Washington. Cash prizes of \$500, \$250, and \$250 were awarded to the three winners; honorable mention and a mathematics book went to eighteen participants. The examination was discontinued after 1965 mainly because the Stanford Department of Mathematics turned its interest to