

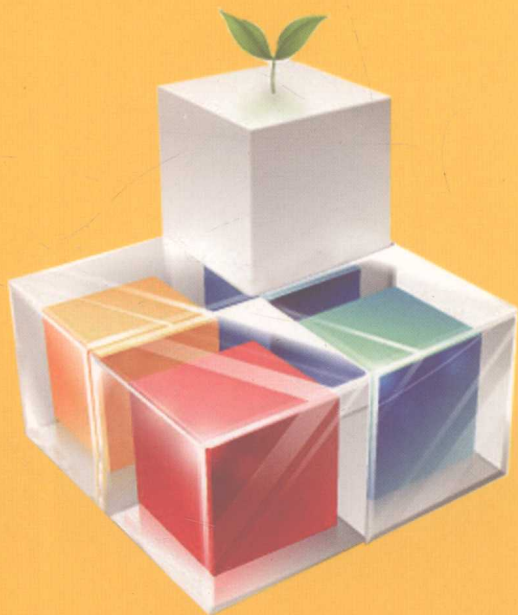
Shuxue Aosai
Fudao Congshu

数学奥赛辅导丛书

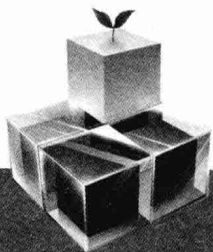
漫话数学归纳法

Manhua Shuxue Guinafa

苏 淳 编著



中国科学技术大学出版社



数学奥赛辅导丛书

漫话数学归纳法

苏 淳 编著



中国科学技术大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

漫话数学归纳法/苏淳编著. —3 版. —合肥:中国科学技术大学出版社,2009.4

(数学奥赛辅导丛书)

ISBN 978-7-312-02486-3

I. 漫… II. 苏… III. 数学归纳法—高中—教学参考资料
IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 049182 号

中国科学技术大学出版社出版发行

地址:安徽省合肥市金寨路 96 号,230026

网址: <http://press.ustc.edu.cn>

中国科学技术大学印刷厂印刷

全国新华书店经销

*

开本:880×1232/32 印张:5.5 字数:114 千

1989 年 7 月第 1 版 2009 年 4 月第 3 版

2009 年 4 月第 3 次印刷

定价:11.00 元

序

目前,有关中学生复习资料、课外辅导读物已经出版得很多了,甚至使一些中学生感到不堪负担,所以再要出版这类读物一定要注重质量,否则“天下文章一大抄”,又无创新之见,未免有误人子弟之嫌.写这类读物如何才能确何质量呢?我想华罗庚老师的两名名言:“居高才能临下,深入才能浅出”,应该成为写这类读物的指导思想,他本人生前写的一系列科普读物,包括为中学写的一些书,也堪称是这方面的范本.

中国科学技术大学数学系的老师们,在从事繁重的教学与科研工作的同时,一向对中学教学的活动十分关注,无论对数学竞赛,还是为中学生及中学教师开设讲座,出版中学读物都十分热心,这也许是受华罗庚老师的亲炙,耳濡目染的缘故,所以至今这仍然是中国科学技术大学数学系的一个传统和特色.

我看了几本他们编写的“数学奥赛辅导丛书”原稿,感到他们是按照华罗庚老师的教诲认真写作的,所以乐之为序.

龚 昇

目 次

序.....	(I)
1. 数学归纳法与直接证法.....	(1)
2. 认真用好归纳假设.....	(10)
3. 学会从头看起.....	(27)
4. 在起点上下功夫.....	(37)
5. 正确选取起点和跨度.....	(48)
6. 选取适当的归纳假设形式.....	(63)
7. 非常规的归纳途径.....	(80)
8. 合理选取归纳对象.....	(88)
9. 辅助命题——通向 $P(k+1)$ 的桥梁.....	(105)
10. 转化命题	(117)
11. 主动强化命题	
——归纳法使用中的一种重要技巧.....	(129)
12. 将命题一般化	
——通向使用数学归纳法的有效途径.....	(137)
13. 平均不等式归纳法证明种种	(143)
14. 篇末寄语	(150)
习题.....	(162)
提示与解答	(166)

1 数学归纳法与直接证法

大家知道,数学上的许多命题都与自然数 n 有关. 这里所说的 n , 往往是指任意的一个自然数. 因此, 这样的一个命题实际上也就是一整列命题.

要证明这样一整列命题成立, 当然可以有多种不同的方法. 其中常用的一种方法是置 n 的任何具体值而不顾, 仅仅把它看成是一个任意的自然数, 也就是说, 假定它只具备任何自然数都具备的共同性质, 并且在这样的基础上去进行推导、运算. 如果我们在推导运算中没有遇到什么难以克服的困难, 那么我们就有可能用这种方法来完成命题的证明了. 这种方法就是习惯上所说的直接证法. 下面来看两个简单的例子.

【例 1】 证明, 对任何自然数 n , 如下的等式都能成立:

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin \frac{1}{2}x}$$

证 我们有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx \\ &= \frac{1}{2\sin \frac{1}{2}x} \left(\sin \frac{1}{2}x + 2\cos x \sin \frac{1}{2}x + 2\cos 2x \sin \frac{1}{2}x \right. \end{aligned}$$

$$+\cdots+2\cos nx\sin\frac{1}{2}x)$$

利用积化和差公式

$$2\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$$

即知

$$\begin{aligned} & \sin\frac{1}{2}x+2\cos x\sin\frac{1}{2}x+2\cos 2x\sin\frac{1}{2}x+\cdots+2\cos nx\sin\frac{1}{2}x \\ &= \sin\frac{1}{2}x+\left(\sin\frac{3}{2}x-\sin\frac{1}{2}x\right)+\left(\sin\frac{5}{2}x-\sin\frac{3}{2}x\right) \\ & \quad +\cdots+\left(\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right) \\ &= \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x \end{aligned}$$

综合上述等式即得所证. 可见不论 n 为任何自然数, 所证的恒等式都能成立.

在刚才所作的推导中由于借助了积化和差公式, 所以证明得很顺利. 我们甚至连 n 是奇数还是偶数都用不着考虑就完成了证明. 这样的证明当然是对任何的自然数 n 都能够成立的, 这就是我们所说的“将 n 置于任意的境地”的含意. 下面再看一个例子.

【例 2】 证明, 对任何自然数 n , 数

$$A_n=5^n+2\cdot 3^{n-1}+1$$

都能被 8 整除.

证 按照 n 的奇偶性, 我们分别将 A_n 表示成两种不同的形式. 当 n 为奇数时, 有

$$A_n=(5^n+3^n)-(3^{n-1}-1) \quad (1)$$

当 n 为偶数时, 将 A_n 表示为

$$A_n = 5(5^{n-1} + 3^{n-1}) - (3^n - 1) \quad (2)$$

于是上述两式中, 第一个括号内的指数都是奇数, 第二个括号内的指数都是偶数. 我们知道, 如果 k 为奇数, 则有

$$a^k + b^k = (a+b)(a^{k-1} - a^{k-2}b + \cdots + b^{k-1})$$

如果 k 为偶数, 则 $c^2 - 1$ 可整除 $c^k - 1$. 于是只要分别视 $a=5$, $b=3$ 及 $c=3$, 即可根据上述事实, 知(1)、(2)两式中的前后两项都是 8 的倍数, 从而完成了命题的证明.

在这个证明中, 我们虽然分别对 n 为奇数和 n 为偶数作了不同的处理, 但并未改变 n 是任意自然数这一根本的属性, 因此所作的证明可对任何自然数 n 成立. 这是直接证法的最主要的特点.

直接证法在许多场合下具有简洁的优点, 因此应用得非常广泛. 再看一个取自 1989 年全国高中数学联合竞赛试题的例子.

【例 3】 已知: $x_i \in R (i=1, 2, \cdots, n; n \geq 2)$, 满足: $|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| = 1, x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$. 证明

$$\left| x_1 + \frac{x_2}{2} + \cdots + \frac{x_n}{n} \right| \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

证 由条件 $\sum_{i=1}^n |x_i| = 1$ 知 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 不全为零; 由条件 $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ 知这 n 个实数中既有正数也有负数. 记

$$A_1 = \{i: x_i \geq 0\}, A_2 = \{i: x_i < 0\}$$

则 A_1 和 A_2 都不是空集, 它们互不相交, 且 $A_1 \cup A_2 = \{1, 2, \cdots, n\}$.

$\cdots, n\}$. 若再记 $S_1 = \sum_{i \in A_1} x_i, S_2 = \sum_{i \in A_2} x_i$, 就有

$$S_1 + S_2 = 0, \quad S_1 - S_2 = 1$$

因此, 知 $S_1 = -S_2 = \frac{1}{2}$. 采用所引入的符号, 就有

$$\left| x_1 + \frac{x_2}{2} + \cdots + \frac{x_n}{n} \right| = \left| \sum_{i \in A_1} \frac{x_i}{i} + \sum_{i \in A_2} \frac{x_i}{i} \right|$$

由 A_1 和 A_2 的定义和性质知 $\sum_{i \in A_1} \frac{x_i}{i}$ 是若干个非负数之和,

$\sum_{i \in A_2} \frac{x_i}{i}$ 是若干个负数之和, 因此就有

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{i} \right| &= \left| \sum_{i \in A_1} \frac{x_i}{i} + \sum_{i \in A_2} \frac{x_i}{i} \right| \leq \left| \sum_{i \in A_1} x_i + \frac{1}{n} \sum_{i \in A_2} x_i \right| \\ &= \left| S_1 + \frac{S_2}{n} \right| = \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \right| = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

可见命题的结论是成立的.

在这里, 我们采用了许多符号, 是为了书写简便. 有志于参加数学竞赛的读者们, 应当努力使自己习惯于这些符号, 并逐步学会使用各种符号.

在这个证明中, 我们同样没有想过“ n 究竟是几”的问题, 只是把精力花费在对命题条件的推敲和剖析上. 我们应当养成这种细致分析题目条件的习惯. 解题的思路往往就来自于这种分析之中.

以上所说的都是一些直接证法. 如果我们能用这种证法把推理进行下去, 那么就应当力争把它进行到底. 但有时, 我们也会碰到一些与 n 有关的命题, 对于它们很难从任意的 n

入手,那么我们就只好另辟蹊径了.先看一个例子.

【例 4】 证明,对于每个不小于 3 的自然数 n ,都可以找到一个正整数 a_n ,使它可以表示为自身的 n 个互不相同的正约数之和.

显然,我们很难对任意一个不小于 3 的自然数 n ,直接去找出相应的 a_n 来.面对这样的情形,较为稳妥的做法只能是先从 $a_3, a_4, \dots$ 找起.

经过不多的几步探索,就可以发现,有

$$6 = 1 + 2 + 3$$

而且 1, 2, 3 恰好是 6 的 3 个互不相同的正约数,因此可将 a_3 取作 6. 在此基础上,又可发现有

$$12 = 1 + 2 + 3 + 6$$

而且 1, 2, 3, 6 恰好又是 12 的 4 个互不相同的正约数,因此又可取 $a_4 = 12$. 循此下去,便知可依次取 $a_5 = 24, a_6 = 48, \dots$. 这也就告诉了我们:如果我们取定了 a_k ,那么接下去就只要再取 $a_{k+1} = 2a_k$ 就行了. 事实上,如果 a_k 可以表示成自身的 k 个互不相同的正约数 $b_1 < b_2 < \dots < b_k$ 之和,即

$$a_k = b_1 + b_2 + \dots + b_k$$

那么就有

$$2a_k = b_1 + b_2 + \dots + b_k + a_k$$

如果记 $b_{k+1} = a_k$. 则显然有 $b_1 < b_2 < \dots < b_k < b_{k+1}$, 表明它们互不相同;而且显然它们都是 $2a_k$ 的正约数. 可见确实可以将 a_{k+1} 取为 $2a_k$. 由于此处 k 具有任意性,所以我们确实已对一切不小于 3 的自然数 n 都证得了所需证明的断言.

我们在这里所采用的证法,就是所谓“数学归纳法”,有时也简称为归纳法.它在解决诸如此类的与自然数 n 有关的问题时,往往是行之有效的,因此被广泛地应用在数学之中.

刚才我们在证明中,实际上是遵循着如下思路行事的,即为了证明某个与自然数 n 有关的命题 $P(n)$ 成立,我们首先对最小的 n_0 ,验证 $P(n_0)$ 成立;然后再假定对 $n = k$,有 $P(k)$ 成立,并在此基础上,推出 $P(k+1)$ 也成立.于是我们便相信了,对一切自然数 $n \geq n_0$,命题 $P(n)$ 都能成立.

当然,大家都会问:“这种相信是不是确有其道理呢?”.

我们可以告诉大家,这种相信是可靠的,是有其充分的数学依据的.我们可以设想一下,如果在经过了如上所述的推理之后,命题 $P(n)$ 仍不能对一切自然数 $n \geq n_0$ 成立,那么如果记

$$A_1 = \{n: n \geq n_0, P(n) \text{ 不成立} \}$$

$$A_2 = \{n: n \geq n_0, P(n) \text{ 成立} \}$$

则有 $A_1 \neq \emptyset$. 但因已证 $P(n_0)$ 成立,知 $n_0 \notin A_1$, 即有 $n_0 \in A_2$. 由于 A_1 是非空的自然数集合,所以其中一定有一个最小的元素 n_1 . 由于 $n_0 \notin A_1$, 所以 $n_1 > n_0$, 即有 $n_1 - 1 \geq n_0$. 由于 n_1 是 A_1 中最小的数,所以 $n_1 - 1 \notin A_1$, 从而 $n_1 - 1 \in A_2$. 这就是说有命题 $P(n_1 - 1)$ 成立. 记 $k = n_0 - 1$, 则由我们所证,知可由 $P(k)$ 成立推出 $P(k+1)$ 成立,也就是有 $P(n_0)$ 成立,从而 $n_0 \in A_2$, 即 $n_0 \notin A_1$, 导致矛盾. 可见确有 $A_1 = \emptyset$. 也就是说,有 $A_2 = \{n: n \geq n_0\}$, 即对一切 $n \geq n_0$, $P(n)$ 都成立.

以上所证明的原理,就叫做数学归纳法原理. 有了这个

原理,我们就可以放心大胆地使用数学归纳法了.

利用数学归纳法不仅可以处理像例4那样不宜于采用直接证法的问题,而且也可以处理一些可以通过直接证法来解决的问题,例如前面提到过的例1和例2,它们的证明过程如下:

例1 又证 当 $n=1$ 时,我们有

$$\text{左式} = \frac{1}{2} + \cos x$$

$$\begin{aligned}\text{右式} &= \frac{\sin \frac{3}{2}x}{2\sin \frac{1}{2}x} = \frac{3\sin \frac{1}{2}x - 4\sin^3 \frac{1}{2}x}{2\sin \frac{1}{2}x} \\ &= \frac{3}{2} - 2\sin^2 \frac{1}{2}x = \frac{3}{2} - (1 - \cos x) \\ &= \frac{1}{2} + \cos x\end{aligned}$$

所以对于 $n=1$,等式是成立的.

假设对于 $n=k$,等式成立,即有

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cdots + \cos kx = \frac{\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin \frac{1}{2}x}$$

我们要来证明对于 $n=k+1$,等式也成立. 我们有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2} + \cos x + \cdots + \cos kx + \cos(k+1)x \\ &= \frac{\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin \frac{1}{2}x} + \cos(k+1)x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x + 2\cos(k+1)x\sin\frac{1}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x} \\
&= \frac{\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x + \left(\sin\left(k + \frac{3}{2}\right)x - \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\frac{1}{2}x} \\
&= \frac{\sin\left(k + \frac{3}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x} = \frac{\sin\left[(k+1) + \frac{1}{2}\right]x}{2\sin\frac{1}{2}x}
\end{aligned}$$

所以对于 $n = k + 1$, 等式也成立. 从而对一切自然数 n , 等式都成立.

例 2 又证 因 $A_1 = 5 + 2 + 1 = 8$, 知其为 8 的倍数, 所以当 $n = 1$ 时命题成立.

假设 A_k 可被 8 整除, 要证 A_{k+1} 也可被 8 整除. 我们有

$$A_k = 5^k + 2 \cdot 3^{k-1} + 1$$

$$A_{k+1} = 5^{k+1} + 2 \cdot 3^k + 1 = 5 \cdot 5^k + 6 \cdot 3^{k-1} + 1$$

所以就有

$$A_{k+1} - A_k = 4(5^k + 3^{k-1})$$

由于对任何自然数 k , 数 5^k 和 3^{k-1} 都是奇数, 所以其和 $5^k + 3^{k-1}$ 恒为偶数, 从而 $4(5^k + 3^{k-1})$ 一定是 8 的倍数. 这也就表明 $A_{k+1} = A_k + 4(5^k + 3^{k-1})$ 可被 8 整除, 明所欲证. 因此, 对任何自然数 n , 数 A_n 都可被 8 整除.

在以上的证明过程中, 我们都严格地遵守了数学归纳法所要求的两个步骤: (1) 验证 $P(n_0)$ 成立; (2) 假设 $P(k)$ 成

立,推出 $P(k+1)$ 也成立. 正如我们在证明数学归纳法原理的过程中所看到的,这两个步骤对于保证命题 $P(n)$ 对一切 $n \geq n_0$ 都能成立是必不可少的. 因此必须严格遵守.

后面我们将要读到数学归纳法的各种技巧,它们虽然显得灵活多变,但都是在严守上述两个步骤的前提之下所设施的各种变通,而绝对没有取消这两个步骤中的任何一个. 为了同后面将要介绍的各种变通形式相区别,我们将本节所采用的归纳法形式叫做数学归纳法的基本形式,也有人称之为第一归纳法.

同其它任何一种数学方法一样,数学归纳法也不是万能的,例如前面的例3就不宜于采用数学归纳法来加以证明,读者不难自行理解其中的道理. 由于后面还要进一步谈到这个问题,这里不再赘述.

在前面所讲到的数学归纳法的两个步骤中,我们通常将“验证 $P(n_0)$ 成立”称作起步;将“假设 $P(k)$ 成立”称作归纳假设;而将由“假设 $P(k)$ 成立”推出“ $P(k+1)$ 也成立”的过程叫做归纳过渡,有时也叫作向前跨步. 起步的过程一般较容易,而归纳过渡有时却很需要认真动一番脑筋,有时甚至需要运用各种技巧和多种不同的数学工具. 归纳过渡通常是全题论证的关键,在此非认真下功夫不可,而其中最最重要的,则是设法利用归纳假设.

2 认真用好归纳假设

如果说在用数学归纳法证题时,归纳过渡是证题的关键,那么归纳假设就是过渡的基础.数学归纳法之所以显得有生命力,就是因为它避开了直接接触 n 的任意性,而把证明过程变成为一个“连环套”,使得人们在验证了 $P(n_0)$ 成立之后,只要再在“ $P(k)$ 已成立”的假设基础上证出“命题 $P(k+1)$ 也成立”就行了.这就意味只需要再往前迈出一步就够了,因此大大减少了论证中的不确定性.既然如此,运用好归纳假设当然就极为重要.我们甚至可以说,“如何千方百计地创造条件以利用归纳假设?”的问题,正是论证者们在此所应考虑的最中心的问题.

在许多场合下,如何利用归纳假设的问题并不显得很困难.我们来看两个简单的例子.

【例 1】 某次象棋比赛共有 n 人参加($n \geq 2$),每两个都应对奕,且一定决出胜负.证明,比赛结束后,可将这 n 个人列为一队,使队列中的每一个人都曾战胜过紧跟在他后面的那个人.

如果 $n=2$,结论显然成立.

假设当 $n=k$ 时结论成立,我们来证明当 $n=k+1$ 时结论也成立.这时,我们先从中任意叫出 k 个人来.由于这 k 个

人中的每两个人都曾决过胜负,因此根据归纳假设,可将他们按照要求列成一列.此后,我们再让剩下的那个人按照如下办法插进已列好的队列中:如果他曾战胜过队列中的第 1 个人,那么他就站在最前头;否则,就再看第 2 个人是否被他战胜过,他可以一直这样依次看下去,直到看到一个曾被他战胜过的人后,他就插到该人的前面;如果这样的人一个也找不到,那么他就站到队列的最后去.不难看出,这样的队列即是合乎要求的.可见对 $n = k + 1$,结论也能成立.所以对一切 $n \geq 2$,结论都能成立.

在这里,先叫出 k 个人来列队,即是为了利用归纳假设.如果没有这 k 个人先行列队,那么是很难说清楚 $k + 1$ 个人是如何列队的.但是一旦有了这 k 个人所列的队列作为基础,那么就只要再说明第 $k + 1$ 个人如何插入其中,并能保持队列所具备的性质就可以了.

【例 2】 有一批文件分成 n 个部分分别由 n 个人保管,这 n 个人每人都有电话机.证明,当 $n \geq 4$ 时,只需通电话 $(2n - 4)$ 次,就可以使 n 个人全都了解了全部文件的内容.

证 当 $n = 4$ 时,甲和乙、丙和丁先分别通一次话,相互告知各自掌握的文件内容;然后,甲和丙、乙和丁再分别通一次话,相互告知方所了解的内容,即可使所有人都了解到全批文件内容,可见断言成立(共通了 4 次电话).

假设当 $n = k$ 时断言也成立,即只须通 $2k - 4$ 次电话,即可使所有 k 个人都了解到全批文件的内容,我们要来证明当 $n = k + 1$ 时断言也成立.

设想首先由第 $k+1$ 个人打电话给第 1 个人,以把他所掌管的文件内容全都告知第 1 个人.然后按归纳假设,前 k 个人之间只须打 $(2k-4)$ 次电话即可使他们全都知道全批文件的内容.然后第 1 个人再给第 $k+1$ 个人打电话,告知他全批文件内容.所以一共只须打 $1+(2k-4)+1=2(k+1)-4$ 次电话.可见断言对 $n=k+1$ 也成立.

在这两个例子中,虽然处理的细节上略有不同,但都可以先自 $k+1$ 个人中任意叫出 k 个人来对他们使用归纳假设(在例 2 中,要求剩下的那个人先将自己所掌握的文件内容告诉别人).这是因为不论剩下的是哪一个人,接下来的问题都是容易解决的.但在有的问题中却不是这样.

【例 3】 在一块平地上站有 n 个人.对每个人来说,他到其他人的距离均不相同.每人都有一支水枪.当发出火灾信号时,每人都用水枪击中距他最近的人.证明,当 n 为奇数时,其中至少有一个身上是干的.

证 $n=1$ 时,结论显然成立.设命题对 $n=2k-1$ 成立,要证当 $n=2k+1$ 时命题也成立.设 A 与 B 两人之间的距离在所有的两人间的距离中为最小.撤出 A, B 两人,则由归纳假设知,在剩下的 $2k-1$ 个人中间,至少有一人 C 的身上干的.再把 A, B 两人加进去,由于 $AC > AB, BC > AB$, 所以 A, B 两人都不会用水枪去击 C , 从而 C 身上仍然是干的.所以对一切奇数 n 命题都成立.

在这个问题中,先撤出两人是为了使用归纳假设(按照惯例,这叫做“退”).但在退出之后,还应再进:因为我们的目