

信息光学 理论与计算

李俊昌 熊秉衡 等◎编著



科学出版社

www.sciencep.com

信息光学理论与计算

李俊昌 熊秉衡 等 编著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书从光传播的物理概念出发,通过对不同形式衍射积分的研究,对目前流行的计算方法进行了概括总结,给出衍射计算解决光信息技术问题的实例。

为适应面向 21 世纪的“信息光学”课程教学的需要,本书包含了目前大学本科“信息光学”课程的主要内容。主要包括:二维线性系统、标量衍射理论、衍射积分的解析解及数值计算、光学成像系统、部分相干理论、光学信息处理技术、全息照相、全息干涉计量、数字全息以及光通信技术中的基本器件与网络系统。

本书基本内容可以作为高等学校“光信息科学与技术”专业的本科生教材,也可作为相关专业师生的教材及参考书。书中打“*”号部分主要适用于研究生及科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

信息光学理论与计算/李俊昌,熊秉衡,等编著. —北京:科学出版社,2009
ISBN 978-7-03-024868-8

I. 信… II. ①李… ②熊… III. ①信息光学-理论 ②信息光学-数值计算 IV. O438

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009) 第 105282 号

责任编辑:刘凤娟 赵彦超 胡 凯/责任校对:包志虹
责任印制:钱玉芬/封面设计:王 浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

铭浩彩色印装有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009 年 6 月第 一 版 开本: B5 (720×1000)

2009 年 6 月第一次印刷 印张: 42 3/4 插页 1

印数: 1—2 000 字数: 844 000

定价: 88.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈明辉〉)

前 言

20 世纪激光及计算机出现后, 光信息技术获得飞速发展, 研究光信息技术的“信息光学”成为一门新兴的学科. 在光信息技术研究领域, 光波的衍射理论是最基础的理论, 如果要定量描述光信息技术的实际问题, 几乎都涉及衍射计算. 由于实际的衍射问题几乎无解析解, 必须借助于计算机作数值计算, 随着计算机技术的飞速发展, 光信息技术已经与计算机结下不解之缘. 然而, 衍射计算通常是十分困难的工作. 正如玻恩 (M.Born) 及沃尔夫 (E.Wolf) 在他们的名著《光学原理》一书中指出的那样, “衍射问题是光学中遇到的最困难的问题之一, 在衍射理论中很少存在某种意义上可以认为是严格的解……”, 在目前流行的信息光学著作中, 衍射计算方法的讨论较少, 在一定程度形成学习和研究光信息技术的障碍. 如果能够从光传播的物理概念出发, 通过对不同形式衍射积分的研究, 对目前流行的计算方法简要总结, 给出衍射计算解决光信息技术问题的实例, 必然能为相关专业的大学生、研究生及科技工作者提供方便. 这成为写作本书并将其取名为《信息光学理论与计算》的主要原因.

本书第 1 章及第 2 章讲述二维线性系统并引入标量衍射理论, 第 3 章及第 4 章分别讨论衍射积分的解析解及数值计算. 衍射计算的讨论将在后续章节中获得应用. 为适应面向 21 世纪的“信息光学”教学的需要, 本书包含了目前大学本科《信息光学》教材的主要内容. 后续章节依次是: 第 5 章, 光学成像系统; 第 6 章, 部分相干理论; 第 7 章, 光学信息处理; 第 8 章, 全息照相; 第 9 章, 全息干涉计量; 第 10 章, 数字全息; 第 11 章, 光波分复用通信技术中的基本器件与网络系统. 本书较系统地介绍了全息、全息干涉计量及数字全息的理论及技术, 书中对衍射计算的讨论事实上适用于与激光应用研究相关的许多学科, 这是本书的主要特点. 为了让本书既适用于本科生教学, 又能为相关专业的研究生及科技工作者提供有益的参考, 我们在有关章节引入了打“*”号的内容, 这些内容主要适用于研究生及科技工作者.

本书作者是长期在光信息技术第一线从事教学及科研的工作者. 各章节分别由以下人员撰写. 宫爱玲教授: 第 1 章; 李俊昌教授: 第 2~5, 10 章; 熊秉衡教授: 第 8, 9 章; 钱晓帆教授: 第 6 章; 伏云昌教授: 第 7 章; 李川教授, 第 11 章. 全书由李俊昌、熊秉衡教授统稿.

由于作者水平有限, 书中不足及错误之处敬请读者指正.

李俊昌 熊秉衡

2008 年 7 月

目 录

前言

第 1 章 数学预备知识	1
1.1 常用的几种非初等函数	1
1.1.1 矩形函数	1
1.1.2 sinc 函数	3
1.1.3 阶跃函数	4
1.1.4 符号函数	5
1.1.5 三角函数	5
1.1.6 高斯函数	6
1.1.7 圆域函数	7
1.1.8 狄拉克 δ 函数	7
1.1.9 梳状函数	10
1.2 二维傅里叶变换	10
1.2.1 二维傅里叶变换的定义和存在条件	10
1.2.2 傅里叶变换定理	12
1.2.3 二维傅里叶变换在极坐标下的表示	13
1.3 线性系统	14
1.3.1 线性系统的定义	14
1.3.2 脉冲响应和叠加积分	15
1.3.3 二维线性不变系统的定义	16
1.3.4 线性不变系统的传递函数和本征函数	17
1.4 二维抽样定理	18
1.4.1 函数的抽样	18
1.4.2 原函数的复原	20
1.4.3 空间-带宽积	21
习题	21
参考文献	22
第 2 章 标量衍射理论	23
2.1 光波的复函数表示	23
2.2 空间平面光波场的复振幅	27

2.3 各向同性介质中光波的电磁理论	30
2.3.1 各向同性介质中的麦克斯韦方程组、物质方程及波动方程	30
2.3.2 波动方程的平面简谐波解	31
2.3.3 平面简谐光波的电矢量 E 、磁矢量 B 与传播方向的关系	32
2.3.4 光波场的能量传递	33
2.4 经典标量衍射理论	34
2.4.1 基尔霍夫公式及瑞利-索末菲公式	34
2.4.2 衍射的角谱理论	41
2.4.3 衍射问题的傍轴近似 —— 菲涅耳衍射积分	43
2.4.4 夫琅禾费衍射	47
2.5 柯林斯公式	48
2.5.1 傍轴光学系统的 $ABCD$ 矩阵表示	49
2.5.2 傍轴球面波的 $ABCD$ 定律及等效傍轴透镜光学系统	54
2.5.3 柯林斯公式与出射光瞳衍射公式	56
习题	62
参考文献	63
第 3 章 衍射积分的解析解及应用	65
3.1 夫琅禾费衍射的计算	65
3.1.1 矩形孔的夫琅禾费衍射	65
3.1.2 圆形孔的夫琅禾费衍射	66
3.1.3 振幅型正弦光栅的夫琅禾费衍射	68
3.1.4 相位型正弦光栅的夫琅禾费衍射	70
3.2 矩形孔及正弦振幅光栅的菲涅耳衍射	72
3.2.1 矩形孔的菲涅耳衍射	72
3.2.2 直边衍射条纹的间距公式	76
3.2.3 正弦振幅光栅的菲涅耳衍射	77
*3.3 矩形孔衍射场半解析公式的应用	80
3.3.1 用菲涅耳函数表示菲涅耳衍射	80
3.3.2 折射棱镜阵列的衍射场	82
3.3.3 空间曲面衍射场的计算	85
习题	90
参考文献	91
第 4 章 衍射积分的快速傅里叶变换计算	93
4.1 离散傅里叶变换与傅里叶变换的关系	93
4.1.1 空域连续函数的离散及延拓	94

4.1.2 离散傅里叶变换与傅里叶变换的关系	95
4.2 菲涅耳衍射的快速傅里叶变换计算	98
4.2.1 菲涅耳衍射积分的 S-FFT 算法	98
4.2.2 菲涅耳衍射的 S-FFT 计算与实际测量的比较	101
4.2.3 菲涅耳衍射的卷积算法	102
4.2.4 菲涅耳衍射变换及其在二元光学设计中的应用	105
4.3 经典衍射积分的数值计算	110
4.3.1 基尔霍夫衍射传递函数及衍射计算	111
4.3.2 瑞利-索末非衍射传递函数及衍射计算	112
4.3.3 衍射的角谱传递函数及计算	113
4.3.4 不同衍射积分的计算实例	114
4.3.5 不同传递函数之间的关系	117
4.3.6 经典衍射积分的逆运算	118
*4.4 菲涅耳衍射的分数傅里叶变换表示及其计算	119
4.4.1 分数傅里叶变换的定义	120
4.4.2 分数傅里叶变换的几个基本性质	120
4.4.3 分数傅里叶变换与菲涅耳积分的比较	121
4.4.4 FRT 的 D-FFT 算法及菲涅耳衍射的计算	123
4.4.5 二维光波场衍射的 FRT 计算及实验证明	126
4.4.6 不同计算方法中衍射场的空间宽度比较	128
*4.5 柯林斯公式及其逆运算	129
4.5.1 柯林斯公式	129
4.5.2 柯林斯公式的 S-FFT 计算	130
4.5.3 柯林斯公式的 D-FFT 计算	131
4.5.4 柯林斯公式逆运算满足取样定理的条件	133
4.5.5 数值计算及实验证明	133
习题	137
参考文献	137
第 5 章 光学成像系统	139
5.1 透镜的光学变换性质	139
5.1.1 物体在透镜前	139
5.1.2 物体在透镜后	143
5.1.3 透镜孔径引起的渐晕效应	145
5.2 衍射受限成像	146
5.2.1 衍射受限成像系统的脉冲响应	147

5.2.2	衍射受限成像系统像光场的计算	150
5.2.3	衍射受限成像实验及理论模拟	151
5.3	衍射受限成像系统的相干传递函数	152
5.3.1	出射光瞳较大时的脉冲响应表达式	152
5.3.2	衍射受限成像系统的相干传递函数	153
5.3.3	像差对系统传递函数的影响	154
5.4	衍射受限系统的非相干传递函数	155
5.4.1	衍射受限系统的光学传递函数	156
5.4.2	衍射受限系统的光学传递函数和相干传递函数的关系	158
5.4.3	光学传递函数的一般性质和意义	159
5.4.4	衍射受限系统的 OTF 的计算	161
5.4.5	有像差的光学传递函数 OTF	164
5.4.6	有离焦像差的光学传递函数及成像计算	165
*5.5	相干成像与非相干成像系统的比较	171
5.5.1	两个点物像分辨极限的比较	171
5.5.2	像强度频谱的比较	173
5.5.3	图像阶跃边沿响应的比较与分析	174
5.5.4	相干光照明的散斑效应	178
	习题	179
	参考文献	180
第 6 章	部分相干理论	181
6.1	引言	181
6.2	可见度	183
6.3	互相干函数及相干度	186
6.4	时间相干和空间相干	190
6.5	恒星干涉仪	194
	习题	196
	参考文献	196
第 7 章	光学信息处理	197
7.1	阿贝二次成像理论和阿贝-波特实验	197
7.1.1	阿贝二次成像理论	197
7.1.2	阿贝-波特实验	198
7.2	空间频率滤波系统和空间滤波器	202
7.2.1	空间频率滤波系统	202
7.2.2	空间滤波器	204

7.2.3	Vanderlugt 滤波器	205
7.2.4	Vanderlugt 滤波器的使用	207
7.3	空间滤波器的应用实例	209
7.3.1	策尼克相衬显微镜	209
7.3.2	Maréchal 的工作和补偿滤波器	210
7.4	相干光信息处理系统	211
7.4.1	多重像的实现	212
7.4.2	图像的相减和相加	213
7.4.3	图像的特征识别	215
7.4.4	逆滤波器和图像的恢复	218
7.5	非相干光信息处理系统	220
7.5.1	两幅图像乘积的积分	221
7.5.2	两幅图像的卷积和相关运算	221
	习题	222
	参考文献	223
第 8 章	全息照相	224
8.1	全息照相的基本原理	224
8.1.1	平面波形成的全息图——全息光栅	226
8.1.2	点光源形成的全息图	244
8.1.3	同轴全息图和离轴全息图	252
8.1.4	菲涅耳全息图和夫琅禾费全息图以及傅里叶变换全息图	267
8.2	几种其他主要类型的全息图	273
8.2.1	体积(厚)全息图	273
8.2.2	白光再现全息图	281
*8.2.3	浮雕全息图	285
*8.2.4	计算机全息图	290
8.2.5	脉冲全息图	293
*8.3	全息记录材料	294
8.3.1	卤化银乳胶全息图	294
8.3.2	光导热塑全息图	294
8.3.3	光折变晶体全息图	296
8.3.4	重铬酸明胶全息图	298
8.3.5	光致抗蚀剂全息图	301
8.3.6	光致聚合物全息图	301
8.4	全息照相实验	302
8.4.1	基本设备和器件	302

8.4.2	光路布置注意事项	309
8.4.3	激光安全	313
8.5	全息照相的应用概况	314
8.5.1	全息显示	314
8.5.2	全息光学元件	316
8.5.3	全息信息存储	317
	习题	318
	参考文献	320
第 9 章	全息干涉计量	323
9.1	全息干涉计量的基本原理和方法	323
9.1.1	单曝光法或实时全息法	324
9.1.2	双曝光法或二次曝光法	337
9.1.3	连续曝光法或时间平均法	354
*9.2	全息干涉计量中的一些特殊技术	358
9.2.1	提高相位测量灵敏度的一些方法	358
9.2.2	外差全息干涉计量术	374
9.2.3	全息等值线法	376
9.2.4	比较全息干涉计量术	381
9.2.5	全息剪切干涉计量方法	387
9.2.6	实时全息的一些特殊方法	390
9.2.7	大型结构的全息检测——大景深全息技术	416
*9.3	全息干涉计量技术的应用	428
9.3.1	全息干涉计量技术的应用近况	428
9.3.2	记录材料的进展	457
9.3.3	全息系统的智能化、小型化、多功能化	463
9.3.4	脉冲全息与高功率激光的实时全息研究高速瞬变物理现象	469
	习题	486
	参考文献	489
第 10 章	数字全息	502
10.1	平滑波面数字全息的基本理论	502
10.1.1	基于菲涅耳衍射积分及其逆运算的数字全息	503
*10.1.2	菲涅耳数字全息波面重建系统的脉冲响应	506
10.1.3	消除波面重建噪声的讨论	516
*10.1.4	傍轴光学系统的数字全息	525
10.2	数字全息的统计光学表述	533
10.2.1	散射光的统计光学理论	533

10.2.2 散射光波场的傅里叶变换重建	535
10.2.3 散射光波场的卷积重建	537
*10.2.4 消零级衍射干扰的物平面光波场高保真卷积重建	545
*10.3 相位型数字全息图及波面重建	551
10.3.1 相位型数字全息图的形成及波面重建	552
10.3.2 理论模拟及实验证明	554
*10.4 散射光的真彩色数字全息	557
10.4.1 三基色光波重建计算涉及的主要问题	557
10.4.2 真彩色图像重建实验	559
*10.5 数字微镜及在全息显示中的应用	563
10.5.1 数字微镜工作原理	563
10.5.2 全息图的数字微镜显示	565
10.5.3 数字微镜重建图像系统的瞬时脉冲响应	567
10.5.4 DMD 重建图像的近似计算及实验证明	570
10.5.5 基于 DMD 的数字合成全息技术	572
*10.6 数字全息在无损检测中的应用	574
10.6.1 实时数字全息检测透明物应力分布	574
10.6.2 物体三维形貌的数字全息检测	581
10.6.3 三维粒子场检测	585
习题	591
参考文献	592
第 11 章 光波分复用通信技术中的基本器件与网络系统	595
11.1 光波在光纤中的传播	595
11.1.1 光纤中光传播的几何光学近似	596
11.1.2 光纤中光传播的波动光学理论	601
11.2 光纤 Bragg 光栅	609
11.2.1 光纤光栅的写入	609
11.2.2 光纤 Bragg 光栅的耦合模理论	611
11.2.3 光纤 Bragg 光栅的应用	618
11.3 光子晶体光纤	621
11.4 光波在波导中的传播	623
11.4.1 波导中光传播的几何光学近似	624
11.4.2 波导中光传播的波动光学理论	626
11.5 平面阵列波导光栅	639
11.6 光信号的发送、接收和放大	640
11.6.1 半导体激光器	640

11.6.2 半导体光探测器·····	644
11.6.3 光纤放大器·····	646
11.7 光纤网络·····	650
11.7.1 光波分复用网络·····	650
11.7.2 光纤网络的测试·····	652
习题·····	663
参考文献·····	663

第1章 数学预备知识

光是电磁波, 光波的传播满足麦克斯韦方程. 基于麦克斯韦方程并利用标量衍射理论研究光信息的产生、传播、获取、处理及应用, 是信息光学的基本研究内容. 在标量衍射的理论框架下, 光波在介质空间及不同形式光学系统中的传播可以视为二维信息通过线性系统的过程. 由于载有信息的光波场的表述涉及一些重要的数学函数, 光波通过线性系统时受到的变换涉及基本的数学工具——傅里叶变换, 光信息的数字化处理还涉及对光波场的合理离散及取样问题. 因此, 作为学习信息光学的数学预备知识, 本章对常用的数学函数、二维傅里叶变换、二维线性系统以及取样定理进行介绍.

1.1 常用的几种非初等函数

1.1.1 矩形函数

宽度为 $a(a > 0)$, 中心在 x_0 的一维矩形函数定义为

$$\text{rect}\left(\frac{x-x_0}{a}\right) = \begin{cases} 1, & \left|\frac{x-x_0}{a}\right| \leq 1/2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1-1-1)$$

图 1-1-1 是该函数的图像.

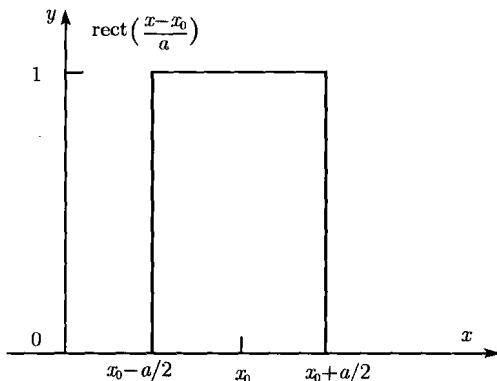


图 1-1-1 中心在 x_0 , 宽度为 a 的一维矩形函数

当用 x 代表时间变量时, 可以用一维矩形函数来描述照相机的快门, 这时 (1-1-1) 式中的 a 就表示曝光时间; 当用 x 代表空间变量时, 可以用该函数表示无限大不透明屏上一个宽度为 a 的狭缝的透过率.

二维矩形函数可用以两个一维矩形函数的乘积表示为

$$\text{rect}\left(\frac{x-x_0}{a}\right)\text{rect}\left(\frac{y-y_0}{b}\right), \quad a > 0, \quad b > 0 \quad (1-1-2)$$

它表示 xoy 平面上以点 (x_0, y_0) 为中心的 $a \times b$ 矩形区域内矩形函数取值为 1, 其他地方处处等于 0, 如图 1-1-2 所示. 图 1-2-2 为中心在原点, 宽度为 $a \times b$ 的二维矩形函数示意图.

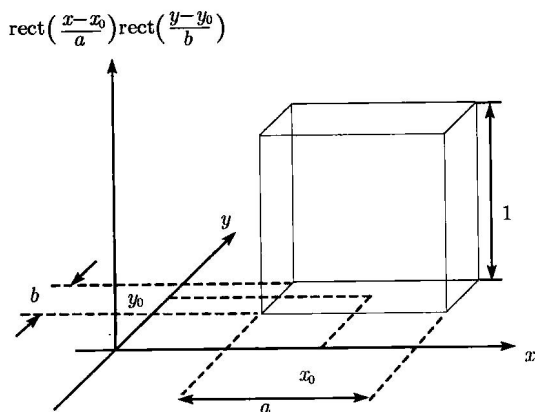


图 1-1-2 中心在原点, 宽度为 $a \times b$ 的矩形函数

二维矩形函数可用来描述无限大不透明屏上矩形孔的透过率, 用它与某函数 (或图像) 相乘, 可以截取出矩形孔范围内的函数值, 其他位置处赋予零值. 图 1-1-3 描述了一幅二维图像的截取过程. 图 1-1-3(b) 中黑色代表零, 白色代表 1, 图 1-1-3(c) 给出截取结果. 三幅图像的数学描述可以分别写为, (a) $I(x, y)$, (b) $\text{rect}\left(\frac{x-x_0}{a}\right)$.

$\text{rect}\left(\frac{y-y_0}{b}\right)$, (c) $I(x, y) \text{rect}\left(\frac{x-x_0}{a}\right) \text{rect}\left(\frac{y-y_0}{b}\right)$.

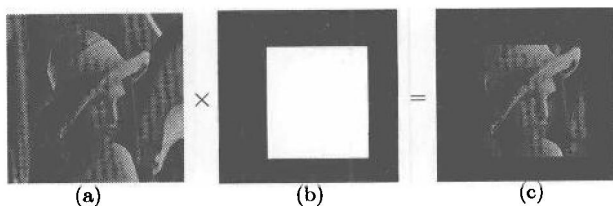


图 1-1-3 矩形函数截取二维图像的过程

1.1.2 sinc 函数

一维 sinc 函数定义为

$$\operatorname{sinc}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{\sin(\pi x/a)}{\pi x/a}, \quad a > 0 \quad (1-1-3)$$

该函数在原点处有最大值 1, 而在 $x = \pm na (n = 1, 2, 3, \dots)$ 处的值等于 0, 其函数图形如图 1-1-4 所示, 原点两侧第一级零点之间的宽度 (称为 sinc 函数的主瓣宽度) 为 $2a$, 并且它的面积 (包括正波瓣和负波瓣) 刚好等于 a .

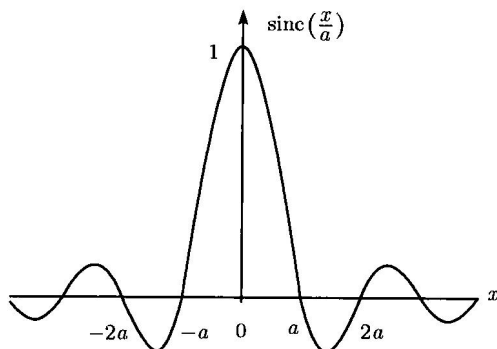


图 1-1-4 一维 sinc 函数图像

二维 sinc 函数定义为

$$\operatorname{sinc}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right) = \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{a}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{y}{b}\right), \quad a > 0, \quad b > 0 \quad (1-1-4)$$

该函数是两个一维 sinc 函数的乘积, 零点位置在 $(\pm ma, \pm nb)$, m, n 均为正整数.

研究光波衍射将看到, 一维 sinc 函数表示单缝 (即一维矩形函数) 的夫琅禾费衍射的振幅分布, 二维 sinc 函数可以表示矩孔 (即二维矩形函数) 的夫琅禾费衍射的振幅分布, 其平方则表示衍射的光强分布图样. 图 1-1-5 是一个二维 sinc 函数的平方值分布图像.

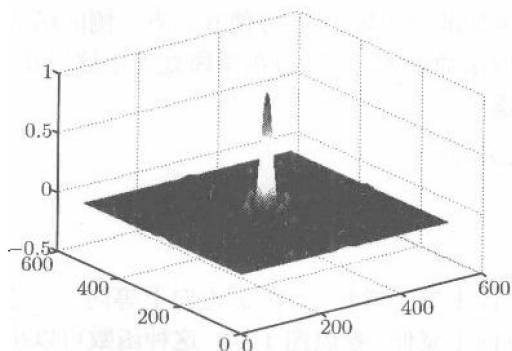


图 1-1-5 中心在 (257, 257), 瓣宽 20×20 二维 sinc 函数平方值分布图像

1.1.3 阶跃函数

一维阶跃函数定义为

$$\text{step}\left(\frac{x}{a}\right) = \begin{cases} 0, & \frac{x}{a} < 0 \\ \frac{1}{2}, & \frac{x}{a} = 0 \\ 1, & \frac{x}{a} > 0 \end{cases} \quad (1-1-5)$$

其函数图形如图 1-1-6 所示.

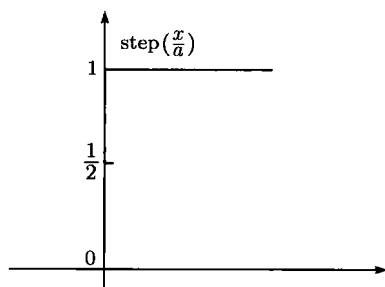


图 1-1-6 中心在原点的一维阶跃函数

该函数在原点 $x = 0$ 处有一个间断点, 取值为 $\frac{1}{2}$, 因此在这种情况下讨论函数的宽度是没有意义的. 将一维阶跃函数与某函数相乘时, 在 $x > 0$ 的部分, 乘积等于该函数值; 在 $x < 0$ 的部分, 乘积恒等于 0, 因而一维阶跃函数的作用如同一个“开关”, 可在原点处“开启”或“关闭”另一个函数, 而实际应用中该开关点也可以选在非原点处, 用它乘某函数 (或图像) 可使开关点一侧的函数保留原值, 另一侧则赋予零值. 开关点处取函数值的一半, 但在图像处理中这只是对应整幅图像上的一个取值点, 通常无关紧要.

二维阶跃函数定义为

$$f(x, y) = \text{step}\left(\frac{x}{a}\right) \quad (1-1-6)$$

二维阶跃函数在 y 方向上等于常数, 而在 x 方向上等同于一维阶跃函数, 即相当于一维阶跃函数在 y 方向上延伸. 参照图 1-1-3, 这种函数可以用来描述光学直边 (或刀口) 的透过率.

1.1.4 符号函数

一维符号函数定义为

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{x}{a}\right) = \begin{cases} +1, & \frac{x}{a} > 0 \\ 0, & \frac{x}{a} = 0 \\ -1, & \frac{x}{a} < 0 \end{cases} \quad (1-1-7)$$

其函数图形如图 1-1-7 所示.

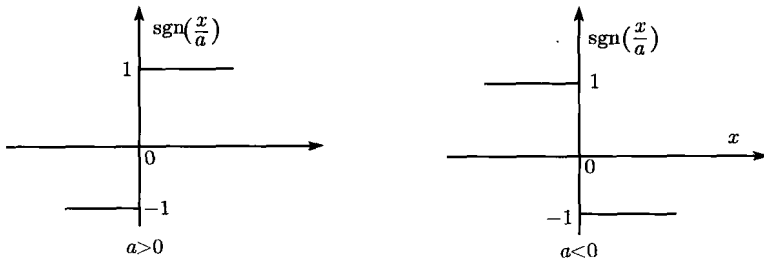


图 1-1-7 $a > 0$ 及 $a < 0$ 时中心在原点的符号函数示意图

符号函数 $\operatorname{sgn}(x)$ 与某函数相乘, 可使被乘的函数以某点为界, 此点一侧的函数值极性发生翻转. 在实际应用中, 如可用于表示某光学孔径的一半嵌有 π 相位板, 与另一半的相位相反, 符号函数描述该光学孔径的复振幅透过率.

1.1.5 三角函数

一维三角函数定义为

$$\Lambda\left(\frac{x}{a}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{a}, & \frac{|x|}{a} < 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad (1-1-8)$$

该函数表示底边宽度为 $2a$, 高度为 1 的三角形, 函数图形如图 1-1-8.

二维三角形函数定义为

$$\Lambda\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right) = \Lambda\left(\frac{x}{a}\right) \Lambda\left(\frac{y}{b}\right) = \begin{cases} \left(1 - \frac{|x|}{a}\right) \left(1 - \frac{|y|}{b}\right), & \frac{|x|}{a} < 1, \frac{|y|}{b} < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1-1-9)$$

式中, $a > 0, b > 0$

该函数可视为两个一维三角函数的乘积, 其函数图形如图 1-1-9.