高职高专教育教材

GAOZHIGAOZHUANJIAOYUJIAOCAI

应用数学

YINGYONGSHUXUE

张荣华　王翠萍◎主　编

薛志俊　潘晓鸣◎副主编

瞿才新◎主　审

中国纺织出版社

高职高专教育教材

应用数学

张荣华　王翠萍　主　编
薛志俊　潘晓鸣　副主编
瞿才新　主　审

中国纺织出版社

内 容 提 要

本书主要介绍了一元函数微积分、二元函数微积分、常微分方程、无穷级数、概率论与数理统计、积分变换等内容。另外，为了方便学生衔接初等数学知识，还简要介绍了初等数学的部分公式及相关简单性质。本书吸取了当前高职高专数学教材的优点，结合目前高职高专教学改革实际，本着"定位高职、服务专业、提高素质、强化应用"的原则，注重对学生解决实际问题能力的培养，增加了一些工程、经济等应用类内容及题目，可供工科高职院校教学及社会人员自学使用。

图书在版编目(CIP)数据

应用数学/张荣华，王翠萍主编. —北京：中国纺织出版社，2009.8

高职高专教育教材

ISBN 978-7-5064-5616-6

Ⅰ.应… Ⅱ.①张…②王… Ⅲ.应用数学—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ.O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 062313 号

策划编辑：裘　康　孔会云　　责任编辑：范雨昕　　特约编辑：张烛微

责任校对：楼旭红　　责任设计：李　然　　责任印制：何　艳

中国纺织出版社出版发行

地址：北京东直门南大街 6 号　邮政编码：100027

邮购电话：010—64168110　传真：010—64168231

http://www.c-textilep.com

E-mail:faxing@c-textilep.com

中国纺织出版社印刷厂印刷　三河市永成装订厂装订

各地新华书店经销

2009 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

开本：787×1092　1/16　印张：19

字数：299 千字　定价：36.00 元

FOREWORD

前 言

高等职业技术学院培养市场需求的高素质技能型人才,数学素质是学生综合素质的重要组成部分,应用数学已经成为学习各门学科专业的普通工具。目前,高职院校数学教学面临的问题主要有三个:其一,随着经济发展对应用型人才的多元化、专业化、职业化的需求,近年来高职教育的专业设置趋向于多元化和专业化,新开专业增多,专业课对数学基础课的需求也有很大差别,数学作为公共基础课如何教学才能满足专业的多元化的需求?其二,高职的办学特色要求加强对学生应用能力的培养,数学教学如何培养学生的应用能力?其三,在高职的教学中由于增加了“教、学、做”一体化实践性教学环节,理论课的学时相对减少,在学时精简的情况下如何保证数学课的教学质量?

根据高职的办学特色和生源情况,编者们在“以应用为目的,以必需、够用为度,以掌握概念、强化应用为重点”的原则指导下,确定了应用数学课程教学“定位高职、服务专业、提高素质、强化应用”和“面向学生需求、确保教学质量”的指导思想,明确要求应用数学是为专业课的学习和进一步学习高等数学打下了必要的基础,重点培养学生的数学素质,加强对学生应用能力的培养。

有鉴于此,《应用数学》教材内容共分为九大模块,第一模块函数、极限与连续,第二模块导数与微分,第三模块导数的应用,第四模块积分及其应用,第五模块常微分方程,第六模块级数,第七模块概率,第八模块数理统计,第九模块积分变换。

由于数学软件在工程技术领域的广泛应用,本书介绍 MathCAD 的一些典型应用。这样既减少了学生在计算中的困难,也培养了学生使用相应软件完成计算的能力。各个专业可以根据课时进行选修,同时鼓励对计算机感兴趣的学生利用业余时间进行自学。本书也可作为“专转本”、“专升本”及各类考试的教材或参考书。

本书由张荣华、王翠萍主编,薛志俊、潘晓鸣副主编,陈兴友参编,瞿才新主审。

由于编者水平有限,成书仓促,书中不当之处在所难免,恳请有关专家、读者批评指正。

编者

2009 年 4 月

CONTENTS

目　录

模块一　函数、极限与连续 …… 1
第一节　函数　/ 1
一、预备知识　/ 1
二、函数的概念　/ 3
三、函数的几种特性　/ 5
四、反函数　/ 5
五、初等函数　/ 6
六、函数关系的建立　/ 7
七、经济中常用的函数　/ 8
第二节　极限　/ 9
一、极限思想　/ 9
二、数列的极限　/ 9
三、函数的极限　/ 10
四、极限的性质　/ 11
五、极限的四则运算法则　/ 11
六、两个重要极限　/ 13
七、二元函数的极限　/ 14
第三节　无穷小量与无穷大量　/ 15
一、无穷小量　/ 15
二、无穷大量　/ 17
三、无穷小量与无穷大量的关系　/ 17
第四节　函数的连续性　/ 18
一、连续函数的概念　/ 18
二、函数的间断点　/ 19
三、闭区间上连续函数的性质　/ 19
四、二元函数的连续性　/ 20
习题一　/ 21

模块二　导数与微分 …………………………………………………………………… **25**
第一节　导数　/ 25
一、引出导数概念的实例　/ 25
二、导数的概念　/ 27
第二节　导数公式与运算法则　/ 32
一、基本初等函数的导数公式　/ 32
二、导数的运算法则　/ 33
第三节　隐函数的导数及高阶导数　/ 37
一、隐函数的导数　/ 37
二、高阶导数　/ 40
第四节　微分　/ 41
一、微分的概念　/ 41
二、微分的计算　/ 43
第五节　二元函数的偏导数与全微分　/ 44
一、偏导数的概念　/ 44
二、复合函数的求导法则　/ 46
三、全微分　/ 47
习题二　/ 48

模块三　导数的应用 …………………………………………………………………… **52**
第一节　微分中值定理　/ 52
一、罗尔定理　/ 52
二、拉格朗日中值定理　/ 53
第二节　洛必达法则　/ 54
一、$\frac{0}{0}$型与$\frac{\infty}{\infty}$型未定式　/ 54
二、$0\cdot\infty$型与$\infty-\infty$型未定式　/ 57
第三节　函数的单调性与极值　/ 57
一、函数单调性的判别法　/ 57
二、函数的极值　/ 58
三、最大值与最小值问题　/ 61
第四节　曲线的凹向与拐点及函数作图　/ 63
一、曲线的凹向与拐点　/ 63
二、函数作图　/ 66
第五节　导数在经济中的应用　/ 68
一、函数的弹性　/ 68

二、极值应用问题 / 70
习题三 / 75

模块四 积分及其应用 …… **77**
第一节 定积分的概念及性质 / 77
一、定积分的概念 / 77
二、定积分的性质 / 80
三、微积分的基本定理 / 81
第二节 不定积分 / 83
一、不定积分的概念 / 83
二、不定积分的几何意义 / 84
三、不定积分的性质和基本积分公式 / 84
第三节 积分计算 / 86
一、换元积分法 / 86
二、分部积分法 / 91
第四节 广义积分 / 93
一、无穷区间上的广义积分 / 93
二、无界函数的广义积分 / 95
第五节 定积分的应用 / 96
一、定积分的微元法 / 96
二、求平面图形的面积 / 96
三、求旋转体的体积 / 98
四、定积分在物理上的应用 / 99
第六节 二重积分及其简单应用 / 100
一、二重积分的概念及性质 / 100
二、二重积分的性质 / 101
三、二重积分的计算 / 102
四、二重积分应用举例 / 105
习题四 / 106

模块五 常微分方程 …… **109**
第一节 一阶线性微分方程 / 109
一、常微分方程的概念 / 109
二、可分离变量的微分方程 / 110
三、齐次型微分方程 / 111

四、一阶线性微分方程 / 112
第二节　二阶常系数齐次线性微分方程 / 113
一、二阶线性微分方程解的结构 / 113
二、二阶常系数线性齐次微分方程的解法 / 114
第三节　二阶常系数非齐次线性微分方程 / 116
一、$f(x)=p_m(x)e^{\alpha x}$型 / 116
二、$f(x)=p_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ 型或 $f(x)=p_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$ 型 / 117
三、微分方程的简单应用举例 / 119
习题五 / 120

模块六　级数 ······ **122**
第一节　数项级数 / 122
一、数项级数的基本概念 / 122
二、数项级数的基本性质 / 124
三、级数收敛的必要条件 / 125
四、常见级数敛散性的判别方法 / 126
第二节　幂级数的概念及性质 / 130
一、函数项级数的概念 / 130
二、幂级数的概念 / 130
三、幂级数的收敛域及和函数 / 130
四、幂级数的收敛半径和收敛区间 / 130
五、收敛幂级数及其和函数的性质 / 134
第三节　函数的幂级数展开式 / 136
一、泰勒级数 / 137
二、泰勒公式和可展开的条件 / 137
三、麦克劳林级数 / 138
四、用直接展开法将函数展开成幂级数 / 138
五、用间接展开法将函数展开成幂级数 / 141
第四节　函数幂级数展开式的应用 / 143
第五节　傅里叶级数 / 144
一、傅里叶系数与傅里叶级数 / 145
二、傅里叶级数的收敛定理 / 146
三、函数傅里叶级数展开的步骤 / 146
四、正弦展开或余弦展开 / 148
五、傅里叶展开的意义 / 150

六、周期为 $2l$ 的函数的傅里叶级数 / 150
习题六 / 152

模块七 概率 …… 154
第一节 随机事件及其概率 / 154
一、随机现象和随机事件 / 154
二、事件间的关系 / 155
第二节 事件的概率 / 157
一、事件的频率与概率的古典定义 / 157
二、概率的统计定义 / 158
三、概率的公理化定义 / 158
四、概率的性质 / 159
第三节 条件概率与事件的独立性 / 161
一、条件概率 / 161
二、事件的独立性 / 163
第四节 全概率公式与贝叶斯公式 / 165
一、全概率公式 / 165
二、贝叶斯公式 / 167
第五节 随机变量及其分布 / 167
一、随机变量 / 167
二、离散型随机变量及其分布 / 168
第六节 随机变量的分布函数 / 173
一、离散型随机变量 / 173
二、连续型随机变量 / 174
第七节 随机变量函数的分布 / 180
一、随机变量概念的产生 / 180
二、离散型随机变量 / 181
三、连续型随机变量 / 183
四、随机变量的分布函数 / 184
第八节 数学期望 / 185
第九节 方差 / 190
习题七 / 192

模块八 数理统计 …… 198
第一节 统计量及其分布 / 198

一、总体与个体 / 198
二、样本 / 198
三、样本的联合分布 / 198
第二节 统计量与抽样分布 / 199
一、统计量 / 199
二、常用统计量 / 199
三、抽样分布 / 199
第三节 正态总体参数的区间估计 / 206
一、大数定律 / 206
二、区间估计的概念 / 207
三、正态总体均值 μ 的区间估计 / 208
四、正态总体方差 σ^2 的区间估计 / 209
第四节 假设检验 / 211
一、假设检验的基本原理 / 211
二、假设检验的两类错误 / 212
三、假设检验的步骤 / 212
第五节 一个正态总体的假设检验 / 213
一、U 检验 / 213
二、T 检验 / 216
三、χ^2 检验 / 219
习题八 / 222

模块九 积分变换 **225**
第一节 变换与积分变换 / 225
一、变换的目的及概念 / 225
二、积分变换 / 225
第二节 复数与复变函数 / 226
一、复数 / 226
二、复变函数 / 232
第三节 傅里叶变换 / 238
一、傅里叶级数 / 238
二、傅里叶变换的概念 / 240
三、典型信号的频谱 / 241
四、单位冲激函数 / 242
五、傅里叶变换的性质 / 245

六、卷积与卷积定理　/ 247
第四节　拉普拉斯变换　/ 248
一、拉普拉斯变换的概念　/ 248
二、拉普拉斯变换的性质　/ 250
三、卷积与卷积定理　/ 252
四、拉普拉斯逆变换　/ 253
五、拉普拉斯变换的应用　/ 256
习题九　/ 258

参考文献 ······························ **261**

附录 ······························ **262**
附录Ⅰ　习题答案与提示　/ 262
附录Ⅱ　MathCAD 的使用手册　/ 277
附录Ⅲ　几种常见的概率与统计表　/ 280

模块一

函数、极限与连续

第一节　函　数

一、预备知识

1. **邻域**　设 δ 是一正数，称数轴上的点构成的集合 $\{x \mid |x-x_0|<\delta\}$ 为点 x_0 的 δ 邻域，常以开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 表示，记作 $U(x_0,\delta)$，即 $U(x_0,\delta)=\{x \mid |x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0+\delta)$．其中，点 x_0 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径．

有时用到的邻域需要把邻域的中心点去掉．点 x_0 的 δ 邻域去掉中心点 x_0 后，称为点 x_0 的去心 $\{x \mid |x-x_0|<\delta\}$ 邻域，记作 $U(x_0,\delta)$，即 $U(x_0,\delta)=\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$．

2. **平面区域**　平面上由一条曲线或几条曲线围成的部分称为区域．围成区域的曲线称为区域的边界；不包括边界的区域称为开区域，包括边界的区域称为闭区域，包括部分边界的区域称为半开半闭区域．

如果一个区域可以被包含在以原点为圆心的某一圆内，则称这个区域为有界区域，否则称为无界区域．

例如，圆形区域：$x^2+y^2\leqslant 1$ 和矩形区域：$1\leqslant x\leqslant 3,0\leqslant y\leqslant 1$，都是有界闭区域；三角形区域：$x<3,0\leqslant y\leqslant 2x$，是无界半开半闭区域；环形区域：$1<x^2+y^2<4$，是有界开区域；半平面区域：$x+y>2$，是无界开区域．

以平面上的点 $P_0(x_0,y_0)$ 为中心，$\delta(\delta>0)$ 为半径的圆内部的点构成的集合称为点 P_0 的 δ 邻域，记为 $U(P_0,\delta)$，即：

$$U(P_0,\delta)=\{P \mid |P_0P|<\delta\}=\{(x,y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

其中 P_0 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径．

3. **空间直角坐标系**　过空间一个定点 O，作三条互相垂直的数轴，它们都以 O 为原点且一般具有相同的长度单位，这三条轴分别叫做 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴），统称为坐标轴，它们的正方向要符合右手法则，即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从 x 轴正向以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向 y 轴正向时，大拇指的指向就是 z 轴的正向，这样的三条坐标轴就组成了一个空间直角坐标系，点 O 叫做坐标原点（或原点）．

三条坐标轴中的任意两条确定的平面 xOy、yOz 和 zOx 称为坐标面，三个坐标面把空间分成八个部分，每一部分称为一个卦限．

设 M 为空间一已知点，过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴，它们与 x 轴、y 轴和 z 轴的交点依次为 P、Q、R，这三点在 x 轴、y 轴和 z 轴的坐标依次为 x、y 和 z，于是空间的一点 M 就确定了唯一一个有序数组 (x,y,z)，称 (x,y,z) 为点 M 的坐标，记为 $M(x,y,z)$，x、y、z 分别称为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标；反之，给定一个有序数组 (x,y,z)，可以在 x 轴上取坐标为 x 的点 P，在 y 轴上取坐标为 y 的点 Q，在 z 轴上取坐标为 z 的点 R，然后通过 P、Q、R 分别作与 x 轴、y 轴和 z 轴相垂直的平面，这三个相互垂直的平面的交点 M 便是由有序数组 (x,y,z) 所确定的唯一的点，这样就建立了空间点 M 和有序数组 (x,y,z) 之间的一一对应关系．

4. **空间两点间的距离** 设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 与 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 是空间的两点，为了用两点的坐标来表达它们之间的距离 d，过 M_1、M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面，这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体(图 1－1)．

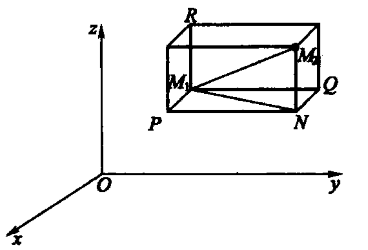

图 1－1

由于 $\triangle M_1NM_2$ 为直角三角形，所以 $d^2=|M_1M_2|^2=|M_1N|^2+|NM_2|^2$，又 $\triangle M_1PN$ 也为直角三角形，且 $|M_1N|^2=|M_1P|^2+|PN|^2$，故：

$$d^2=|M_1M_2|^2=|M_1P|^2+|PN|^2+|NM_2|^2.$$

又由于 $|M_1P|=|P_1P_2|=|x_2-x_1|$，$|PN|=|Q_1Q_2|=|y_2-y_1|$，$|NM_1|=|R_1R_2|=|z_2-z_1|$，

所以 $d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

特殊地，点 $M(x,y,z)$ 与坐标原点 $O(0,0,0)$ 的距离为 $d=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

5. **空间曲面的方程** 在空间解析几何中，任何曲面都可以看作点的几何轨迹，在这样的意义下，如果曲面 S 与三元方程 $F(x,y,z)=0$ 有下述关系：

(1)曲面 S 上任一点的坐标都满足方程 $F(x,y,z)=0$.

(2)不在曲面 S 上的点的坐标都不满足方程 $F(x,y,z)=0$.

那么，方程 $F(x,y,z)=0$ 就叫做曲面 S 的方程，而曲面 S 就叫做方程 $F(x,y,z)=0$ 的图形．

例 1 建立球心在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，半径为 R 的球面方程．

解 设 $M(x,y,z)$ 是球面上的任一点，那么 $|M_0M|=R$，由两点间的距离公式得：$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R$，即 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$.

这就是球面上的点的坐标所满足的方程，而不在球面上的点的坐标都不满足这个方程．所以 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$ 就是球心在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，半径为 R 的球面方程，特殊地，球心在原点 $O(0,0,0)$，半径为 R 的球面方程为：$x^2+y^2+z^2=R^2$.

例 2 设有点 $A(1,2,3)$ 和 $B(2,-1,4)$，求线段 AB 的垂直平分面的方程．

解 由题意可知，所求的平面就是与 A 和 B 等距离的点的几何轨迹．设 $M(x,y,z)$ 为所求平面上的任一点，则有 $|AM|=|BM|$，即：

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2}.$$

等式两边平方，然后化简得 $2x-6y+2z-7=0$.

这就是所求平面上的点的坐标所满足的方程，而不在此平面上的点的坐标都不满足这个方程，所以这个方程就是所求平面的方程.

二、函数的概念

1. 函数的定义

定义 1-1　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的非空数集，如果对于每个 $x\in D$，变量 y 按照一定法则 f 总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$，数集 D 称为函数的定义域，x 称为自变量，y 称为因变量.

当自变量 x 取遍定义域 D 中的数值时，对应的函数值 y 的全体组成的数集

$$W=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 $f(x)$ 的值域.

当函数的对应法则和定义域确定之后，函数也随之确定，因此，函数的对应法则和定义域称为确定函数的两要素.

例如，函数 $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 表示不同的函数，因为它们的对应法则不同；$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1$ 表示不同的函数，因为它们的定义域不同.

如果自变量在定义域中任取一个数值时，对应的函数值只有一个，这种函数称为单值函数，否则称为多值函数.

例如，设变量 x 和 y 之间的对应法则由方程 $x^2+y^2=r^2$ 给出，显然，对每个 $x\in[-r,r]$，由方程 $x^2+y^2=r^2$，可确定出对应的 y 值，当 $x=r$ 或 $x=-r$ 时，对应 $y=0$ 一个值；当 x 取 $(-r,r)$ 内任一个值时，对应的 y 有两个值，所以这个方程确定了一个多值函数.

对于多值函数，可以用限制因变量取值范围的方法将其化为多个单值函数. 例如，在方程 $x^2+y^2=r^2$ 中，若 $y\geqslant0$，则 $y=y_1(x)=\sqrt{r^2-x^2}$；若 $y\leqslant0$，则 $y=y_2(x)=-\sqrt{r^2-x^2}$.

由此可以看出，对于多值函数，可以把它化为多个单值函数，然后进行讨论. 所以，我们约定：以后凡是没有特别说明，函数都是指单值函数.

函数以其自变量个数的多少而分为一元函数和多元函数. 只含有一个自变量的函数称为一元函数，含有两个及两个以上自变量的函数称为多元函数. 二元函数一般记作 $z=f(x,y)$ 等. 三元函数记为 $\omega=f(x,y,z)$ 等.

如矩形的面积 $s=xy$，是二元函数；长方体的体积 $V=xyz$，是三元函数等.

一元函数的图形是平面直角坐标系中的满足一定条件的点的集合，一般是平面上的一条曲线，定义域是数轴上点的集合；二元函数的图形是空间直角坐标系中点的集合，一般是空间中的一个曲面，定义域是曲面在 xOy 平面上的投影点的集合.

2. 函数的表示方法　常用函数的表示方法有三种，第一种是用数学式子来表示自变量与因变量关系的方法，称为解析法，其特点是便于进行理论分析和研究；第二种是把自变量所取的值和对应的函数值列成表来表示函数关系的方法，称为表格法，其特点是简单明了，便于应用；

第三种是以图像形式表达函数关系的方法,称为图像法,其特点是直观性强.

函数的三种表示方法经常配合使用,在高等数学中讨论的函数,一般都是用解析法给出,这是由于对解析式可以进行各种运算,便于研究函数的性质.但为了增强几何直观性,经常把函数的图像画出来帮助分析问题或说明问题.

3. *分段函数* 由两个或两个以上的解析式表示的同一个函数称为分段函数.分段函数的定义域是各段函数定义域的并集.

例3 用分段的方式讨论绝对值函数 $y=|x|$.

解 绝对值函数 $y=|x|$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内表现为分段函数

$$y=|x|=\begin{cases} x, x\geqslant 0, \\ -x, x<0, \end{cases}$$

它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $W=[0,+\infty)$.

例4 用分段的方式讨论取整函数 $y=[x]$.

解 取整函数,y 是不超过 x 的最大整数,记作 $y=[x]$;定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $W=Z$.

例如,$\left[\frac{5}{7}\right]=0,[\sqrt{2}]=1,[\pi]=3,[-1]=-1,[-3.5]=-4$.

4. *函数的定义域*

使函数有意义的自变量的全体称为函数的定义域.但在应用中,还应考虑要解决问题的实际意义.

例5 求函数 $y=\frac{1}{x}-\sqrt{x^2-4}$ 的定义域.

解 要使函数有意义,必须 $x\neq 0$,且 $x^2-4\geqslant 0$. 所以函数的定义域为 $D=\{x \mid |x|\geqslant 2\}$,或 $D=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$.

例6 求函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leqslant 0, \\ x+1, & x>0, \end{cases}$ 的定义域,并求出函数值 $f(-1),f(0),f(2)$.

解 在区间 $(-\infty,0]$ 内,函数 $y=x^2$ 有意义,在区间 $(0,+\infty)$ 内,函数 $y=x+1$ 有意义.所以函数的定义域为 $D=(-\infty,0]\cup(0,+\infty)=(-\infty,+\infty)$.

$$f(-1)=(-1)^2=1.$$

$$f(0)=(0)^2=0.$$

$$f(2)=2+1=3.$$

定义域是函数的一个重要组成部分,给定一个函数就意味着其定义域同时给定.今后,凡是说“$f(x)$ 在点 x_0 处有定义”,就表示 x_0 是函数 $f(x)$ 的定义域内的一点;说“$f(x)$ 在点 x_0 的某一个邻域内有定义”,是指存在某一 $\delta>0$,使函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内的每一点 x 处均有定义.

例7 设函数 $z=\ln(x+y-2)$,求

(1)求函数 z 的定义域;(2)求函数值 $f(2,1)$.

解　(1)要使函数有意义,必须 $x+y-2>0$,所以函数的定义域为 $\{(x,y)\mid x+y>2\}$.

(2)$f(2,1)=\ln(2+1-2)=\ln 1=0$.

三、函数的几种特性

1. **函数的有界性**　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,数集 $X\subset D$,若存在一个正数 M,使得对一切 $x\in X$,都有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在 X 内有界;若不存在这样的正数 M,则称函数 $f(x)$ 在 X 内无界.

若函数 $f(x)$ 在 X 内有界,则函数 $y=f(x)$ 的图形在直线 $y=-M$ 和 $y=M$ 之间. 例如,因为对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$,存在 $M=1$,使得 $|\sin x|\leqslant 1$. 所以函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界的. 而函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 内是无界的,而在区间 $(1,2)$ 内是有界的.

顺便指出,二元函数的有界性是指由二元函数确定的空间曲面位于两个平行于 xOy 坐标面的平面之间.

2. **函数的单调性**　设 (a,b) 是函数 $y=f(x)$ 定义域内的一个区间,如果对于区间 (a,b) 内任意两点 x_1、x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调增加(或递增)的;如果对于区间 (a,b) 内任意两点 x_1、x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调减少(或递减)的.

单调增加函数的图形沿 x 轴正向逐渐上升;单调减少函数的图形沿 x 轴正向逐渐下降.

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数. 例如,函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上是单调减少的,在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的,在 $(-\infty,+\infty)$ 上不是单调函数.

3. **函数的奇偶性**　设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即若 $x\in D$,则 $-x\in D$). 如果对于任意 $x\in D$,恒有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数;如果对于任意 $x\in D$,恒有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于原点对称. 例如,函数 $y=x^2$,$y=\cos x$ 都是偶函数;$y=x^3$,$y=\sin x$ 都是奇函数;$y=\sin x+\cos x$ 是非奇非偶函数.

4. **函数的周期性**　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 如果存在一个常数 $T\neq 0$,使得对于任一 $x\in D$,有 $(x+T)\in D$,且 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为周期函数,T 称为 $f(x)$ 的周期. 通常所说周期函数的周期是指它的最小正周期.

例如,函数 $y=\sin x$. $2\pi,4\pi,6\pi,-2\pi,\cdots$,都是它的周期,而 2π 是它的最小正周期,所以称 2π 是它的周期.

【注意】　并非任意周期函数都有最小正周期. 如常数函数 $y=C$,任意正实数都是它的周期,由于最小的正数不存在,所以它没有最小正周期.

周期函数的图形特点是自变量每增加或减少一个周期后,图形重复出现.

四、反函数

定义 1－2　设有函数 $y=f(x)$,若变量 y 在函数的值域内任取一值 y_0 时,变量 x 在函数的

定义域内必有唯一值 x_0 与之对应，即 $f(x_0)=y_0$，那么变量 x 是变量 y 的函数，这个函数用 $x=f^{-1}(y)$ 来表示，称为函数 $y=f(x)$ 的反函数．相应的函数 $y=f(x)$ 称为直接函数，习惯上，自变量一般用 x 表示，因变量用 y 表示，因此将 $x=f^{-1}(y)$ 中的 x 与 y 互换，从而 $y=f(x)$ 的反函数一般表示为 $y=f^{-1}(x)$.

(1)在同一个坐标系中，由直接函数 $y=f(x)$ 解出 $x=f^{-1}(y)$，它们是同一函数，其函数的图形是同一条曲线，而 $y=f^{-1}(x)$ 与 $y=f(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称．

(2)若直接函数 $y=f(x)$ 的定义域是 D，值域是 W，则它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域是 W，值域是 D. 常常利用函数的这一性质来求一些函数的定义域与值域．

(3)单调函数必有反函数，并且互为反函数的两个函数的单调性是相同的．

例 8　求函数 $y=2x-1$ 的反函数．

解　由直接函数 $y=2x-1$，解出 x，得到所求反函数 $x=\frac{y+1}{2}$. 习惯上改写为 $y=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$.

直接函数 $y=2x-1$ 的图形为过点 $(\frac{1}{2},0)$ 和点 $(0,-1)$ 的直线，其反函数 $y=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$ 的图形为过点 $(0,\frac{1}{2})$ 和点 $(-1,0)$ 的直线．

五、初等函数

1. *基本初等函数*　常数函数 $y=C$，幂函数 $y=x^a(a\in R)$，指数函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$，对数函数 $y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq1)$，三角函数 $y=\sin x$、$y=\cos x$、$y=\tan x$、$y=\cot x$、$y=\sec x$、$y=\csc x$ 和反三角函数 $y=\arcsin x$、$y=\arccos x$、$y=\arctan x$、$y=\operatorname{arccot} x$ 统称为基本初等函数．很多时候也把多项式函数 $y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 看作基本初等函数．大家要熟悉并掌握其定义形式、图像和性质．

2. *复合函数*

定义 1－3　如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的值域与 $y=f(u)$ 的定义域的交集非空集，那么，y 通过 u 的联系成为 x 的函数，这个函数称为是由函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$. 其中 x 称为自变量，u 称为中间变量，y 称为因变量．

【说明】　(1)并不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数．

例如，$y=\sqrt{1-u}$，$u=x^2+2$，就不能复合成一个复合函数，因为 $u=x^2+2$ 的值域为 $[2,+\infty)$ 与 $y=\sqrt{1-u}$ 的定义域为 $(-\infty,1]$ 的交集为空集．

(2)复合函数可以有多个中间变量．

例如，函数 $y=\ln u$，$u=\tan v$，$v=\frac{x}{2}$ 可以复合为复合函数 $y=\ln\tan\frac{x}{2}$. 其中 u，v 都是中间变量．

例 9　指出下列各复合函数的复合过程．

(1) $y=\ln\sin\sqrt{x}$；　　　　(2) $y=\sin^2(1+e^{2\arcsin x})$.