FUZHILUN JICHU

赋值论基础

戴执中 著

江西出版集团
江西教育出版社
JIANGXI EDUCATION PUBLISHING HOUSE

赋值论基础

FUZHILUN JICHU

戴执中 著

江西出版集团
江西教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

赋值论基础/戴执中著．—南昌：江西教育出版社，2008.7

ISBN 978－7－5392－4939－1

Ⅰ．赋…　Ⅱ．戴…　Ⅲ．赋值　Ⅳ．O153.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 068204 号

书　　名	**赋值论基础**
作　　者	戴执中
出 版 者	江西出版集团·江西教育出版社
社　　址	南昌市抚河北路 291 号　邮　编:330008
经　　销	江西省新华书店
印　　刷	南昌市红星印刷有限公司
厂　　址	南昌市民营科技园民营大道 69 号　电话　0791－8174159
开　　本	850 毫米×1168 毫米　1/32
印　　张	6.875 印张
版　　次	2008 年 8 月第 1 版
印　　次	2008 年 8 月第 1 次印刷
定　　价	23.80 元

ISBN 978－7－5392－4939－1

前言

在20世纪的80年代，作者曾撰写过一本介绍赋值论的小书:《赋值论概要》(以下简称“概要”). 该书在内容上对一般赋值与绝对值和一阶赋值采取各占一半的安排，多年来甚感该书对于一般赋值的介绍失之过简. 针对这一缺憾，本书以一般赋值为主体来介绍这一数学分支，但它并非“概要”的续篇. 作为一本独立的书，尽管有些内容已见于“概要”，仍有必要将它们写入，只是尽可能地采取不同于“概要”所用的方式来进行论述. 与“概要”一样，本书仍然是一本介绍性的读物，只是在内容取舍方面不同于前者而已. 取材是否恰当，论述是否正确尚祈读者批评指教. 最后，特别要感谢出版社的大力支持，使本书得以早日与读者见面.

戴执中

2007年10月

目录

本书部分常用符号

$\mathbf{N}$	自然数集
$\mathbf{Z}$	整数集;整数加群
$\mathbf{Q}$	有理数集;有理数域
$\mathbf{R}^+$	实数加群;正实数集
$\mathbf{Q}_p$	p-进数域
(K,v)	赋值域
$(A,\mathfrak{M})$	v 的赋值对
Γ	序加群,v 的值群
$\Gamma_\infty=\Gamma\cup\{\infty\}$	增广序群
$D(\Gamma)$	群 Γ 的可除闭包
$\overline{K}$ 或 $\overline{K}_v$	赋值域(K,v)的剩余域
$I_K(R)$	子环 R 在域 K 内的整闭包
$e(w/v)$或 $e(L/K)$	v 在 L 上拓展 w 关于 v 的分歧指数
$f(w/v)$或 $f(L/K)$	v 在 L 上拓展 w 关于 v 的剩余次数
$G_Z(w\|K)$或 $G_Z(B\|K)$	w(或B)关于K的分解群
$K_Z(w\|K)$或 $K_Z(B\|K)$	w(或B)在K上的分解域
$G_T(w\|K)$或 $G_T(B\|K)$	w(或B)关于K的惯性群
$K_T(w\|K)$或 $K_T(B\|K)$	w(或B)在K上的惯性域
$G_V(w\|K)$或 $G_V(B\|K)$	w(或B)关于K的分歧群
$K_V(w\|K)$或 $K_V(B\|K)$	w(或B)在K上的分歧域

第一章
域的绝对值与一阶赋值

§1.1 域的绝对值

实数与复数的绝对值是我们熟知的概念，今以它的特征来给任意域定义一个类似的概念，使得数域上的绝对值成为其特款，并借此导出有关域的一系列重要理论.

1.1 **定义** 设 K 为任一域，$|\ |$ 表示一个从 K 到非负实数集 $\mathbf{R}^+$ 内的一个映射，满足下列条件：

(1)
①对任一 $a\in K$ 均有 $|a|\geqslant 0$，且 $|a|=0$ 当且仅当 $a=0$；
② $|ab|=|a|\cdot|b|$；
③ $|a+b|\leqslant|a|+|b|$.

其中 a,b 可取 K 中任何元，今称映射 $|\ |$ 为 K 的一个**绝对值**.

今暂以 e_1 记作 K 的乘法单位元，从定义即知有 $|e_1|=1$，以及 $|a|=|-a|$；记 $K^*=K\setminus\{0\}$，$|K|=\{r\in\mathbf{R}^+$ 且 $r\neq 0\mid\exists a\in K^*,|a|=r\}$. 显然，$|K|$ 是乘法群 $\mathbf{R}^+\setminus\{0\}$ 的一个子群，称为 $|\ |$ 的**值群**. 另一方面，K^* 的子集 $\{a\in k\mid |a|=1\}$ 是 K^* 的一个乘法子群，它的元称为关于 $|\ |$ 的单位，如果 K^* 中所有的元都是关于 $|\ |$ 的单位，即 $|K|=\{1\}$，则称 $|\ |$ 是 K 的一个**浅显绝对值**，或径称 $|\ |$ 是**浅显的**. 若 $|K|\neq\{1\}$，则称 $|\ |$ 是**非浅显的**.

若将(1)中的③更换为较强的条件：

$$③' \quad |a+b| \leqslant \max\{|a|, |b|\},$$

则称这种$|\ |$为**非阿基米德型**的，或者称$|\ |$为一**非阿基米德绝对值**，而将满足原有条件的绝对值称作**阿基米德绝对值**. 称满足(1)中①②③′的$|\ |$为非阿基米德型，其依据在于由③′可得出

$$|me_1| = |\underbrace{e_1 + \cdots + e_1}_{m个}| \leqslant |e_1| = 1,$$

即 K 中单位元 e_1 的任何整数倍在映射$|\ |$下取值均小于或等于 1. 这是绝对值$|\ |$成为非阿基米德型的一个特征. 今有

1.2 **定理** 设$|\ |$是域 K 的一个非浅显绝对值. $|\ |$成为非阿基米德型的，当且仅当对任何 $n \in \mathbf{Z}$，均有 $|ne_1| \leqslant 1$.

证明 只需证其充分性，设 $a, b \in K$，n 为任一正整数，于是有

$$\begin{aligned} |a+b|^n &= |(a+b)^n| = |a^n + \tbinom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + b^n| \\ &\leqslant |a|^n + |a|^{n-1} \cdot |b| + \cdots + |b|^n \\ &\leqslant (n+1) \max\{|a|^n, |b|^n\}, \end{aligned}$$

从而有 $|a+b| \leqslant (n+1)^{\frac{1}{n}} \max\{|a|, |b|\}$. 由 $\lim\limits_{n \to \infty} (n+1)^{\frac{1}{n}} = 1$ 即得 $|a+b| \leqslant \max\{|a|, |b|\}$，故③′成立，这就证明了$|\ |$是个非阿基米德绝对值. □

推论 对于特征数为 $p \neq 0$ 的域，其绝对值必然是非阿基米德型的. □

非阿基米德绝对值[①]还有一个显著不同于阿基米德绝对值的特征. 由条件③′知，在域 K 中所有满足 $|a| \leqslant 1$ 的元组成 K 的一个子环，今记作 A. 在非浅显的前提下，A 中必有使 $0 < |a| < 1$ 成立的元 a，所有满足此一要求的元，再添入 0，组成 A 中一个唯一的极大素理想，今记作 $\mathfrak{M}$. 从而由 A 关于 $\mathfrak{M}$ 的剩余类组成一个域，称为 K 关于$|\ |$的剩余域，记为 $\overline{K} = A/\mathfrak{M}$. 由于非阿基米德绝对值能对

① 所论绝对值，若无声明，均指非浅显的而言.

所在域给出这些有意义的代数结构，这就使得它较阿基米德绝对值更具有探讨的价值，经过形式的转化，它将成为今后将讨论的“赋值”这一概念的特款，并以“**一阶赋值**”来称呼它.

现在，我们先对绝对值作些初步讨论，设$|\ |_1$，$|\ |_2$是域K的两个绝对值，如果从$|a|_1<1$可得$|a|_2<1$，就称$|\ |_1$与$|\ |_2$是**等价的**，记以$|\ |_1\sim|\ |_2$. 等价性应具有自反性、对称性和传递性，此处的自反性和传递性都显然可知，下述定理将证明其对称性.

1.3 **定理** 设$|\ |_1$，$|\ |_2$是域K的二绝对值，于是有以下的等价论断成立：

(2) ①$|\ |_1\sim|\ |_2$；

②$|a|_1<1$当且仅当$|a|_2<1$；

③存在某一实数$r>0$，使得$|\ |_2=|\ |_1^r$，具体而言，即对于任何$a\in K$，有$|a|_2=|a|_1^r$.

证明 ①→②. 设$|a|_2<1$，若$|a|_1>1$，则由$\left|\frac{1}{a}\right|_1<1$可导致$\left|\frac{1}{a}\right|_2<1$，从而$|a|_2>1$，矛盾！如果$|a|_1=1$，取$b\in K$使有$|b|_1>1$，据①应有$|b|_2>1$. 令$c=a^nb$，于是$|c|_1=|a^n|_1\cdot|b|_1>1$，从而有$|c|_2>1$，即$|a^nb|_2>1$. 但由于$|a|_2<1$，只要取适当大的正整数$n$，即可使$|a^nb|_2<1$，因此不能有$|a|_1=1$. 于是从$|a|_2<1$只能有$|a|_1<1$，即②成立，这证明了等价关系的对称性.

②→③. 取$c\in K$使有$|c|_1>1$，从而$|c|_2>1$，令$|a|_1=|c|_1^s$，s是个正实数. 若有理数$\frac{m}{n}>s$，则$|a|_1<|c|_1^{\frac{m}{n}}$，从而$\left|\frac{a^n}{c^m}\right|_1<1$，于是$\left|\frac{a^n}{c^m}\right|_2<1$. 由此又有$|a|_2<|c|_2^{\frac{m}{n}}$，又若$\frac{m}{n}<s$，则有$|a|_2>|c|_2^{\frac{m}{n}}$，从而得知$|a|_2=|c|_2^s$. 又由$s=\frac{\lg|a|_1}{\lg|c|_1}$，故有$|a|_2=|c|_2^{\frac{\lg|a|_1}{\lg|c|_1}}=|a|_1^{\frac{\lg|a|_2}{\lg|c|_2}}$.

因此$\frac{\lg|c|_2}{\lg|c|_1}=\frac{\lg|a|_2}{\lg|a|_1}$是个与 c 的选择无关的元，于是，只要令 $r=\frac{\lg|a|_2}{\lg|a|_1}$就可对任何 $a\in K$ 均有$|a|_2=|a|_1^r$，即③成立.

③→①是显然的，定理即告证明. □

从上述定义知，若 K 的绝对值$|\ |$是阿基米德型的，则 K 中必有单位元 e_1 的某个整倍元 me_1 使得$|me_1|>1$. 今对有理数域 $\mathbf{Q}$ 来考虑它所具有的阿基米德绝对值.

为了记法上的方便，今以$|\ |_0$ 记通常的实数绝对值，对于 $\mathbf{Q}$ 的单位元仍以 1 记之. 今有

1.4 **命题** 有理数域 $\mathbf{Q}$ 的任何阿基米德绝对值$|\ |$均与通常的绝对值$|\ |_0$ 等价.

证明(Artin) 只需对 $\mathbf{Q}$ 中的整数环 $\mathbf{Z}$ 进行论证，设 m,n 均为大于 1 的整数，又令

$$n=a_0+a_1m+\cdots+a_tm^t;a_t\neq0,0\leqslant a_i<m.$$

由于$|\ |_0$ 是通常的绝对值，故对正的 m,n,a_i 不妨径以 m,n,a_i 代替$|m|_0,|n|_0,|a_i|_0$. 由

$$|n|\leqslant|a_0|+|a_1||m|+\cdots+|a_t||m|^t$$

以及 $0\leqslant a_i<m$，故有

$$\begin{aligned}|n|&<m(1+|m|+\cdots+|m|^t)\\&<m(t+1)\max\{1,|m|^t\}.\end{aligned}$$

据所设 $n\geqslant m^t$，故 $t\leqslant\frac{\lg n}{\lg m}$代入上式得

$$|n|<m(\frac{\lg n}{\lg m}+1)\max\{1,|m|\}^{\frac{\lg n}{\lg m}}.$$

今以 n^s 代替 n，则有

$$|n^s|<m(\frac{s\lg n}{\lg m}+1)\max\{1,|m|\}^{\frac{s\lg n}{\lg m}},$$

从而 $|n|<(m\dfrac{\lg n}{\lg m}+m)^{\frac{1}{s}}\max\{1,|m|^{\frac{\lg n}{\lg m}}\}$. 再令 $s\to\infty$,即得

$$|n|<\max\{1,|m|^{\frac{\lg n}{\lg m}}\}. \tag{3}$$

按 $|\ |$ 是个阿基米德绝对值,故有正整数 $m,n\neq1$,使得 $|n|>1$,$|m|>1$,并可以从(3)得到

$$|n|^{\frac{1}{\lg n}}\leqslant|m|^{\frac{1}{\lg m}}. \tag{4}$$

由于 n,m 在论证中是可以互换的,故(4)中应有等号成立,即 $\dfrac{\lg|n|}{\lg n}=\dfrac{\lg|m|}{\lg m}=r$. 于是,对每个整数 n 皆有 $|n|=|m|_0^r$ 成立,据定理1.3,即得 $|\ |\sim|\ |_0$. 命题即告证明. □

在讨论 **Q** 的非阿基米德绝对值之前,先给出一条并不局限于 **Q** 的引理:

1.5 **引理** 设 $|\ |$ 是域 K 的一个非阿基米德绝对值. 若对于 $a,b\in K$ 有 $|a|\neq|b|$,则有

$$|a+b|=\max\{|a|,|b|\}. \tag{5}$$

证明 不妨设 $|a|>|b|$,由 $a=(a+b)-b$ 可得

$$|a|\leqslant\max\{|a+b|,|b|\}=|a+b|.$$

因此 $|a|\leqslant|a+b|\leqslant|a|$,即(5)成立,证毕. □

现在来考虑 **Q** 上的非阿基米德绝对值. 设 $|\ |$ 为任一非浅显的非阿基米德绝对值,据前面指出 **Q** 中所有满足 $|a|\leqslant1$ 的有理数集成一个子环 A,并且其中凡满足 $|a|<1$ 的元组成 A 中唯一不等于(0)的素理想 $\mathfrak{M}$,即 A 的唯一极大理想. 今在 $\mathfrak{M}$ 中取一最小正整数 $p\neq0$ 使 $|p|$ 有最小值,这种整数是必然存在的,因若有 $r=\dfrac{m}{n}$ 有最小值 $|r|$,则由 $|m|=|r|\cdot|n|\leqslant|r|$ 知 $|m|=|r|$. 今设正整数 p 有最小的值 $|p|$,不难验知 p 是个素数,因若 $p=ab$,其中 a,b 都是大于1但小于 p 的整数,故 $|a|=|b|=1$,从而 $|p|=|a||b|=1$,矛

盾！现在来证明$\mathfrak{M}$是由 p 生成的主理想. 设$\frac{m}{n}\in\mathfrak{M}$. 若 m,n 都与 p 互素，例如 $m=ap+b, b\neq 0$，则由所设有 $|b|=1$. 据 $|m|\leqslant \max\{|ap|,|b|\}$，其中 $|ap|<1$，由引理 1.5 知 $|m|=|b|=1$，因此表示为$\frac{m}{n}=p^k\frac{m'}{n'}$，其中 m',n' 与 p 互素. 若 $k>0$，则 $\left|\frac{m}{n}\right|<1$，从而 $\frac{m}{n}\in\mathfrak{M}$；若 $k<0$，则 $\left|\frac{m}{n}\right|>1$，此时$\frac{m}{n}\in\mathbf{Q}\backslash A$. 这示明了$\mathfrak{M}=pA$，即$\mathfrak{M}$是 A 中由 p 生成的主理想. 今设 $|p|=c$，$0<c<1$. 对于任一有理数 t 皆可写作 $t=p^l\frac{m}{n}$，其中 m,n 均为 p 互素，$l=0,\pm1,\pm2,\cdots$. 对此，可令 $|t|=c^l$. 今将 t 的表式作如下的改变：在 $t=p^l\frac{m}{n}$ 的表式中记 $l=-v_p(t)$，从而令

$$|t|_p=p^{-v_p(t)}，以及\ v_p(0)=\infty,$$

∞是一个不属于 $\mathbf{R}^+$ 的符号，要求它大于 $\mathbf{R}^+$ 中任一数. 映射 $|\ |_p:\mathbf{Q}\to\mathbf{R}^+\cup\{\infty\}$ 显然满足条件(1)的①和②，今证明③′. 设 $s=p^{-v_p(s)}\frac{a}{b}$，a,b 均与 p 互素，若记 $k=-v_p(t)$，$l=-v_p(s)$，又设 $k\leqslant l$，于是 $t+s=p^k(\frac{m}{n}+\frac{a}{b}p^{l-k})$，从而有 $|t+s|_p\leqslant\max\{|t|_p,|s|_p\}$，故条件③′成立，因此 $|\ |_p$ 是 $\mathbf{Q}$ 的一个非阿基米德绝对值，今又称它为有理数域 $\mathbf{Q}$ 的 **p-进赋值**. 据定理 1.3 知 $|\ |_p$ 与原先所给的 $|\ |$ 是等价的，结合命题 1.4 可得定理如下：

1.6 **定理**(Ostrowski)　有理数域 $\mathbf{Q}$ 的绝对值若是阿基米德型的，则与通常实数的绝对值等价；若是非阿基米德型的，则等价于 p-进赋值，$p\neq1$，可取正整数中任一素数. □

依照上述证明中出现的 v_p，可以对任一非阿基米德绝对值 $|\ |$ 作类似的处理，即令

(6) $$|a|=e^{-v(a)},a\in K.$$

e 是自然对数的底,v 作为映射 $K\to\mathbf{R}\cup\{\infty\}$满足以下的条件:

(7)
$$①v(a)\in\mathbf{R}\cup\{\infty\},v(a)=\infty\text{当且仅当 }a=0;$$
$$②v(ab)=v(a)+v(b);$$
$$③v(a+b)\geqslant\min\{v(a),v(b)\}.$$

其中,∞与任一实数 r 的运算为 $r+\infty=\infty+\infty=\infty$,以及 $r<\infty$. 这样定义的映射 v 称为域 K 的一个一阶赋值,至于前面出现的 v_p,由于它取值于 $\mathbf{Z}\cup\{\infty\}$,故称为 $\mathbf{Q}$ 的**一阶离散赋值**. 在下一章我们再对此予以一般化,即令映射 v 所取的值并不局限于实数范围.

在讨论了等价的绝对值后,今对不等价的情形作一简约讨论,域的两个绝对值若无等价关系,就称它们是独立的,现在先给出如下的引理:

1.7 **引理** 设$|\ |_1,|\ |_2,\cdots,|\ |_n(n\geqslant2)$是域 K 的 n 个绝对值,其中任意两个均互为独立的,于是有 $a\in K$,满足以下条件:

$$|a|_1>1;|a|_i<1,i=2,\cdots,n.$$

证明 当 $n=2$ 时,有 $c\in K$ 使得$|c|_1>1,|c|_2\leqslant1$,以及 $b\in K$ 使得$|b|_1\leqslant1,|b|_2>1$. 于是取 $a=cb^{-1}$ 即得$|a|_1>1$ 及$|a|_2<1$,故结论对 $n=2$ 成立. 今对 n 使用归纳法,设有 $c\in K$ 满足

$$|c|_1>1;|c|_i<1,i=3,\cdots,n.$$

又有 $b\in K$ 使得$|b|_1>1,|b|_2<1$. 对于$|c|_2$ 则有两种可能:$|c|_2\leqslant1$ 或$|c|_2>1$. 就第一种可能而论,可取 $a=c^rb$,r 是个适当大的正整数,于是

$$|a|_1>1,|a|_2<1,\cdots,|a|_n<1.$$

若$|c|_2>1$,可取 $a=\dfrac{c^rb}{1+c^r}$. 当 $r\to\infty$时,有 $|a|_1\to|b|_1>1$, $|a|_2\to$

$|b|_2<1$; 以及$|a|_i\to 0<1,i=3,\cdots,n$. 因此,引理成立[①]. □

1.8 **定理(逼近定理,Artin-Whaples)** 设$|\ |_1,\cdots,|\ |_n$是域K的n个绝对值($n\geqslant 2$),其中任意两个均互为独立;又设$a_1,\cdots,a_n\in K$为任意取定的元;$\varepsilon>0$为任一给定的实数.于是,有$a\in K$满足

$$|a-a_i|_i<\varepsilon,i=1,\cdots,n.$$

证明 据上述引理,对每个$|\ |_i$都可取一个$b_i\in K$,使得$|b_i|_i>1,|b_i|_j<1,j\neq i;i,j=1,\cdots,n$.令$r$是个正整数,当$r\to\infty$时,有

$$\left|\frac{b_i^r}{1+b_i^r}\right|_i\to 1,\quad \left|\frac{b_i^r}{1+b_i^r}\right|_j\to 0,j\neq i.$$

因此又有

$$\left|\frac{a_ib_i^r}{1+b_i^r}\right|_i\to a_i,\quad \left|\frac{a_ib_i^r}{1+b_i^r}\right|_j\to 0,j\neq i.$$

于是当$r\to\infty$,有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ib_i^r}{1+b_i^r}\right|_j\to a_j.$$

只要置$a=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ib_i^r}{1+b_i^r}$,取充分大的$r$就有

$$|a-a_i|_i<\varepsilon,i=1,\cdots,n.$$

定理即告成立. □

此定理还可以进一步导出以下的

推论 设$|\ |_i$及a_i如定理所设,$i=1,\cdots,n$;又以$r_1,\cdots,r_n$分别表示$|\ |_1,\cdots,|\ |_n$的值群中任意取定的实数,于是有$a\in K$满足

$$|a-a_i|_i=r_i,i=1,\cdots,n.$$

证明 取实数$\varepsilon<\min\{r_1,\cdots,r_n\}$,对每个$r_i$在$K$中取元$x_i$,使有$|x_i|_i=r_i$,由定理知存在元$x\in K$,使得

① 在引理中自然也可以选某个$a\in K$,使得有$|a|_i>1,|a|_j<1;j\neq i;i,j=1,\cdots,n$.

$$|x-x_i|_i<\varepsilon<r_i$$

对每个 $i=1,\cdots,n$ 成立，从 $x=x-x_i+x_i$ 知

$$|x|_i=|x-x_i+x_i|_i=\max\{|x-x_i|_i,|x_i|_i\}$$
$$=|x_i|_i=r_i.$$

又由定理知有 $y\in K$ 满足

$$|y-a_i|_i<\varepsilon,i=1,\cdots,n.$$

令 $a=x+y$，于是有

$$|a-a_i|_i=|y-a_i+x|_i=\max\{|y-a_i|_i,|x|_i\}$$
$$=|x|_i=r_i$$

对每个 $i=1,\cdots,n$ 成立，推论即告证明. □

从定理的证明尚可得知，实际上可以有无限多个 a 满足定理及推论的要求.

§1.2 域关于绝对值的完全化

设域 K 带有一个绝对值 $|\ |$，今记以 $(K,|\ |)$. 令 $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 是 K 中一序列，若对于任一 $\varepsilon>0$（ε 是个实数），恒有某个正整数 n_0，使得当 $n>n_0,m>n_0$ 时有 $|a_n-a_m|<\varepsilon$ 成立，则称 $\{a_n\}_n$ 为一**$|\ |$-基本序列**. 又若 K 中有元 a，使得对任一 $\varepsilon>0$ 总有 n_0，当 $n>n_0$ 时就有 $|a-a_n|<\varepsilon$ 成立，则称 a 为序列 $\{a_n\}_n$ 的**$|\ |$-极限**，记以 $|\ |\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，此时又可称 $\{a_n\}_n$ **$|\ |$-收敛于** a. 从绝对值的条件③不难得知，当 $\{a_n\}_n$ 是个 $|\ |$-基本序列时，$\{|a_n|\}_n$ 是通常意义下的基本序列，有 $|\ |$-极限的序列必为 $|\ |$-基本序列. 若 $\{a_n\}_n$ 的 $|\ |$-极限为 0，则称 $\{a_n\}_n$ 为 $|\ |$-零序列. 当 $(K,|\ |)$ 中每个 $|\ |$-基本序列都在 K 中有 $|\ |$-极限时，就称 $(K,|\ |)$ 为**完全域**，或称 K 关于 $|\ |$ 是完全的. 对于一个不是完全域的 $(K,|\ |)$，如何作出一个包含它的完全域 $(\widetilde{K},$