面向21世纪高等学校教材

高等数学

学习指导

下册

总主编　邓方安
主　编　贾积身等
主　审　刘三阳

西安地图出版社

目　　录

第八章　多元函数微分法及其应用…………………………… 449

§1　多元函数的基本概念 …………………………………… 449

一、内容要点(449) 二、典型例题(450) 三、习题8—1简解(452)

§2　偏导数 ……………………………………………………… 456

一、内容要点(456) 二、典型例题(457) 三、习题8—2简解(459)

§3　全微分及其应用 ………………………………………… 463

一、内容要点(463) 二、典型例题(464) 三、习题8—3简解(467)

§4　多元复合函数的求导法则 ……………………………… 471

一、内容要点(471) 二、典型例题(472) 三、习题8—4简解(477)

§5　*隐函数的求导公式 ……………………………………… 483

一、内容要点(483) 二、典型例题(484) 三、习题8—5简解(487)

§6　微分法在几何中的应用 ………………………………… 492

一、内容要点(492) 二、典型例题(493) 三、习题8—6简解(496)

§7　方向导数与梯度 ………………………………………… 501

一、内容要点(501) 二、典型例题(502) 三、习题8—7简解(504)

§8　多元函数的极值及其求法 ……………………………… 507

一、内容要点(507) 二、典型例题(509) 三、习题8—8简解(512)

§9　二元函数的泰勒公式 …………………………………… 516

一、内容要点(516) 二、典型例题(518) 三、习题8—9简解(520)

§10*　最小二乘法 ……………………………………………… 523

一、内容要点(523) 二、典型例题(523) 三、习题8—10简解(524)

总习题八解答(526)　复习参考题八(533)

第九章　重积分……………………………………………………… 542

§1　二重积分的概念与性质 ………………………………… 542

一、内容要点(542) 二、典型例题(544) 三、习题9—1简解(545)

§2　二重积分的计算法 ……………………………………… 548

一、内容要点(548) 二、典型例题(549) 三、习题 9—2 简解(553)

§3　二重积分的应用 …………………………………………… 563

一、内容要点(563) 二、典型例题(564) 三、习题 9—3 简解(566)

§4　三重积分的概念及其计算法 ………………………………… 570

一、内容要点(670) 二、典型例题(571) 三、习题 9—4 简解(573)

§5　利用柱面坐标和球面坐标计算三重积分 ………………… 575

一、 内容要点(575) 二、典型例题(576) 三、习题 9—5 简解(578)

§6　含参变量的积分 …………………………………………… 583

一、内容要点(583) 二、典型例题(584) 三、习题 9—6 简解(585)

总习题九解答(587)　复习参考题九(591)

第十章　曲线积分与曲面积分 ………………………………… 597

§1　对弧长的曲线积分 ………………………………………… 597

一、内容要点(597) 二、典型例题(598) 三、习题 10—1 简解(600)

§2　对坐标的曲线积分 ………………………………………… 604

一、 内容要点(604) 二、典型例题(606) 三、习题 10—2 简解(607)

§3　格林公式及其应用 ………………………………………… 612

一、 内容要点(612) 二、典型例题(613) 三、习题 10—3 简解(615)

§4　对面积的曲面积分 ………………………………………… 620

一、 内容要点(620) 二、典型例题(622) 三、习题 10—4 简解(623)

§5　对坐标的曲面积分 ………………………………………… 627

一、 内容要点(627) 二、典型例题(629) 三、习题 10—5 简解(631)

§6　高斯公式　通量与散度 …………………………………… 634

一、 内容要点(634) 二、典型例题(635) 三、习题 10—6 简解(637)

§7　斯托克斯公式　环流量与旋度 …………………………… 640

一、 内容要点(640) 二、典型例题(641) 三、习题 10—6 简解(642)

总习题十解答(646)　复习参考题十(651)

第十一章　无穷级数 …………………………………………… 657

§1　常数项级数的概念和性质 ………………………………… 657

一、内容要点(657) 二、典型例题(658) 三、习题 11—1 简解(659)

§2　常数项级数的审敛法 …………………………………… 661
一、内容要点(661) 二、典型例题(663) 三、习题 11—2 简解(665)
§3　幂级数 …………………………………………………… 667
一、 内容要点(667) 二、典型例题(669) 三、习题 11—3 简解(671)
§4　函数展开成幂级数 ………………………………………… 672
一、内容要点(672) 二、典型例题(674) 三、习题 11—4 简解(676)
§5　函数的幂级数展开式的应用 ……………………………… 678
一、 内容要点(678) 二、典型例题(678)
§6　函数项级数的一致收敛性及一致收敛级数的基本性质
………………………………………………………………… 680
一、 内容要点(680) 二、习题 11—6 简解(681)
§7　傅里叶级数 ………………………………………………… 684
一、 内容要点(684) 二、典型例题(685) 三、习题 11—7 简解(687)
§8　正弦级数和余弦级数 ……………………………………… 690
一、 内容要点(690) 二、典型例题(690) 三、习题 11—8 简解(692)
§9　周期为 2l 的周期函数的傅里叶级数 …………………… 694
一、 内容要点(694) 二、典型例题(695) 三、习题 11—9 简解(696)
§10*　傅里叶级数的复数形式 ………………………………… 698
一、 内容要点(698) 二、习题 11—10 简解(699)
总习题十一解答(699)　复习参考题十一(704)
第十二章　微分方程 ………………………………………… 714
§1　微分方程的基本概念 ……………………………………… 714
一、内容要点(714) 二、典型例题(715) 三、习题 12—1 简解(715)
§2　可分离变量的微分方程 …………………………………… 718
一、内容要点(718) 二、典型例题(718) 三、习题 12—2 简解(719)
§3　齐次方程 …………………………………………………… 725
一、内容要点(725) 二、典型例题(726) 三、习题 12—3 简解(728)
§4　一阶线性微分方程 ………………………………………… 730
一、内容要点(730) 二、典型例题(732) 三、习题 12—4 简解(733)

§5　全微分方程 …………………………………………………… 741
一、内容要点(741) 二、典型例题(742) 三、习题 12—5 简解(743)
§6　欧拉—柯西近似法 ……………………………………………… 747
一、内容要点(747) 二、典型例题(748)
§7　可降阶的高阶微分方程 ………………………………………… 749
一、内容要点(749) 二、典型例题(750) 三、习题 12—7 简解(751)
§8　高阶线性微分方程 ……………………………………………… 756
一、内容要点(756) 二、典型例题(757) 三、习题 12—8 简解(759)
§9　二阶常系数齐次线性微分方程 ………………………………… 762
一、内容要点(762) 二、典型例题(763) 三、习题 12—9 简解(764)
§10　二阶常系数非齐次线性微分方程……………………………… 767
一、内容要点(767) 二、典型例题(768) 三、习题 12—10 简解(770)
§11　欧拉方程…………………………………………………………… 777
一、内容要点(777) 二、典型例题(777) 三、习题 12—11 简解(778)
§12　微分方程的幂级数解法…………………………………………… 780
一、内容要点(780) 二、典型例题(781) 三、习题 12—12 简解(782)
§13　常系数线性微分方程组解法举例………………………………… 787
一、内容要点(787) 二、典型例题(787) 三、习题 12—13 简解(789)
总习题十二解答(796)　复习参考题十二(805)
主要参考书目…………………………………………………………… 810

第八章　多元函数微分法及其应用

§1　多元函数的基本概念

一、内容要点

本节主要介绍多元函数的概念、多元函数的极限以及多元函数的连续性.

1. 二元函数的概念

设 D 为平面上的一个点集，若对于每个点 $P(x, y)\in D$，变量 z 按照一定法则总有确定的值和它对应，则称 z 是变量 x，y 的二元函数(或点 P 的函数)，记为

$$z = f(x, y)\ (或\ z = f(P)).$$

点集 D 称为该函数的定义域，x、y 称为自变量，z 称为因变量，数集 $\{z \mid z=f(x, y), (x, y)\in D\}$ 称为该函数的值域.

类似地可定义三元函数 $u=f(x, y, z)$ 及其三元以上的函数，$u=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)(n\geqslant 2)$ 称为 n 元函数.

2. 多元函数的极限

设函数 $f(x, y)$ 在开区域(或闭区域)D 内有定义，$P_0(x_0, y_0)$ 是 D 的内点或边界点，如果对于任意给定的正数 ϵ，总存在正数 δ，使得对于适合不等式

$$0 < |PP_0| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$$

的一切点 $P(x, y)\in D$，都有

$$|f(x, y) - A| < \epsilon$$

成立，则称常数 A 为函数 $f(x, y)$ 当 $x\to x_0$，$y\to y_0$ 时的极限（二重极限），记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = A \text{ 或 } f(x, y) \to A \ (\rho = |PP_0| \to 0).$$

3. 多元函数的连续性

设函数 $f(x, y)$ 在开区域（或闭区域）D 内有定义，$P_0(x_0, y_0)$ 是 D 的内点或边界点，且 $P_0\in D$，如果

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0),$$

则称函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 连续，不连续点称为间断点.

若函数 $f(x, y)$ 在区域 D 内每一点都连续，则称 $f(x, y)$ 在 D 内连续，多元连续函数具有如下三条性质：

(1)（最大值和最小值定理）在有界闭区域 D 上的连续函数，在 D 上一定有最大值和最小值.

(2)（介值定理）在有界闭区域 D 上的多元连续函数，如果在 D 上取得两个不同的函数值，则它在 D 上取得介于这两个值之间的任何值至少一次.

(3)（一致连续性定理）在有界闭区域 D 上的多元连续函数必定在 D 上一致连续.

一切多元初等函数在其定义域内都是连续的.

二、典型例题

例 1 求下列极限

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2\sin y}{x^2+y^2}$；(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3+y^5}{x^2+y^2}$；(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)^{2x^2y^2}$.

解 (1) 由于 $\left|\dfrac{x^2}{y^2+x^2}\right|\leqslant 1$，故 $\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ 是一个有限变量，

而
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sin y = 0,$$

从而有
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2}{x^2+y^2}\sin y=0.$$

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3+y^5}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\cdot x\right)+\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\dfrac{y^2}{x^2+y^2}\cdot y^3\right)=0.$

(3) 显然当$|x|<1$，$|y|<1$且x与y不全为零时，$2x^2y^2\leqslant x^4+y^4\leqslant x^2+y^2$，从而
$$1=(x^2+y^2)^0\leqslant(x^2+y^2)^{2x^2y^2}\leqslant(x^2+y^2)^{x^2+y^2},$$
记 $r=x^2+y^2$，当$x\to 0$，$y\to 0$时$r\to 0^+$，又$\lim\limits_{r\to 0^+}r^r=1$，

故有 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)^{2x^2y^2}=1.$

例 2 求下列极限

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\dfrac{\ln\left(\dfrac{x^2+y^2}{xy}\right)-1}{(x-1)^2+y^2}$；(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$.

解 (1) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\dfrac{\ln\left(\dfrac{x^2+y^2}{xy}\right)-1}{(x-1)^2+y^2}=\dfrac{\ln 2-1}{1}=\ln 2-1.$

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2}{|x|+|y|}+\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{y^2}{|x|+|y|}=0.$

例 3 求下列极限

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{x^2y^2-1}-1}{x^2+y^2}$；(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}x^2y^2\ln(x^2+y^2)$.

解 (1) 原式 $=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}\,\dfrac{1}{\sqrt{x^2y^2+1}+1}$
$$=\frac{1}{2}\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0.$$

(2) 原式 $=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2\cdot y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\sqrt{x^2+y^2}\ln(x^2+y^2)$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{x^2+y^2}\ln(x^2+y^2)=0.$$

例 4 下列极限是否存在？若存在求极限值.

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{x^2+y^2}{1+(x-y)^4}$；(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$.

解 (1)令 $y=x$，则有

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{x^2+y^2}{1+(x-y)^4}=\lim_{x\to\infty}2x^2=\infty,$$

令 $y=2x$，则有

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to 2x}}\frac{x^2+y^2}{1+(x-y)^4}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2}{1+x^4}=0$$

故原式极限不存在.

(2) 当令 $y=x$，则有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6x^4}{4x^4}=\frac{3}{2}.$$

当令 $y=kx$ 时，则有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4+3k^2x^4+2k^3x^4}{(1+k^2)^2x^4}$$

$$=\frac{1+3k^2+2k^3}{(1+k^2)^2}.$$

因极限值与 k 有关，故不惟一，所以原极限不存在.

三、习题 8－1 简解

1. 已知函数 $f(x,y)=x^2+y^2-xy\tan\frac{x}{y}$，试求 $f(tx,ty)$.

解 $f(tx,ty)=(tx)^2+(ty)^2-tx\cdot ty\tan\frac{tx}{ty}$

$$=t^2\left(x^2+y^2-xy\tan\frac{x}{y}\right)=t^2f(x,y).$$

2. 试证函数 $F(x,y)=\ln x\cdot\ln y$ 满足关系式

$$F(xy, uv) = F(x, u(+ F(x, v) + F(y, u) + F(y, v).$$

证 $F(xy, uv) = \ln(xy) \cdot \ln(uv)$

$$= (\ln x + \ln y) \cdot [\ln(u) + \ln v]$$

$$= \ln x \cdot \ln u + \ln x \cdot \ln v + \ln y \cdot \ln u + \ln y \cdot \ln v$$

$$= f(x, u) + F(x, v) + F(y, u) + F(y, v),$$

所以 $F(xy, uv)=F(x, u)+F(x, v)+F(y, u)+F(y, v)$.

3. 已知函数 $f(u, v, w)=u^w+w^{u+v}$,试求 $f(x+y, x-y, xy)$.

解 $f(x+y, x-y, xy)=(x+y)^{xy}+(xy)^{(x+y)+(x-y)}$

$$=(x+y)^{xy}+(xy)^{2x}.$$

4. 求下列各函数的定义域:

(1) $z=\ln(y^2-2x+1)$;

(2) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$;

(3) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$;

(4) $z=\ln(y-x)+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$;

(5) $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}(R>r>0)$;

(6) $u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 (1) 要使函数有意义,必须 $y^2-2x+1>0$,

所以,所求函数的定义域为:$D=\{(x, y)|y^2-2x+1>0\}$.

(2) 要使函数有意义,必须

$$\begin{cases} x+y>0, \\ x-y>0. \end{cases}$$

所以,所求函数的定义域为:$D=\{(x, y)|-x<y<x\}$.

(3) 要使函数有意义,必须有

$$\begin{cases} x-\sqrt{y}\geqslant 0, \\ y\geqslant 0. \end{cases}$$

所以函数的定义域为:$D=\{(x, y)|x\geqslant 0, y\geqslant 0, x^2\geqslant y\}$.

(4) 要使函数有意义,必须有

$$\begin{cases} y - x > 0, \\ x \geqslant 0, \\ 1 - x^2 - y^2 > 0. \end{cases}$$

所以定义域为：$D=\{(x, y) \mid x \geqslant 0, y-x>0, x^2+y^2<1\}$.

(5) 要使函数有意义，必须有

$$\begin{cases} R^2 - x^2 - y^2 - z^2 \geqslant 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - r^2 > 0. \end{cases}$$

所以定义域为：$D=\{(x, y) \mid r^2<x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2\}$.

(6) 要使函数有意义，必须有

$$\begin{cases} \left|\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leqslant 1, \\ x^2 + y^2 \neq 0. \end{cases}$$

所以定义域为：$D=\{(x, y) \mid x^2+y^2 \neq 0, z^2 \leqslant x^2+y^2\}$.

5. 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 1}} \dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$；　　(2) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} \dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$；

(3) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$；　　(4) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$；

(5) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{y}$；　　(6) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$.

解　(1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 1}} \dfrac{1-xy}{x^2+y^2} = \dfrac{1-0 \cdot 1}{0^2+1^2} = 1$.

(2) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1^2+0^2}} = \ln 2$.

(3) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{-xy}{xy(2+\sqrt{xy+4})} = -\dfrac{1}{4}$.

(4) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{xy} = 2$.

(5) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{y} = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{xy} \cdot x = 1 \cdot 2 = 2$.

(6) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \cdot \dfrac{x^2+y^2}{e^{x^2y^2}} = 0$.

6. 证明下列极限不存在.

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\dfrac{x+y}{x-y}$；　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.

证　(1) 让点 $P(x,y)$ 沿直线 $y=kx$ 趋于点 $(0,0)$，有

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y=kx\to 0}}\frac{x+y}{x-y}=\lim_{x\to 0}\frac{x+kx}{x-kx}=\frac{1+k}{1-k},$$

显然它是随着 k 的值的不同而改变的，因此 $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\dfrac{x+y}{x-y}$ 不存在.

(2) 让点 $p(x,y)$ 沿直线 $y=x$ 趋于点 $(0,0)$，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x\to 0}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2x^2}{x^2x^2}=1,$$

让点 $p(x,y)$ 沿直线 $y=2x$ 趋于点 $(0,0)$，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=2x\to 0}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot(2x)^2}{x^2\cdot(2x)^2+x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{4x^2+1}=0,$$

所以，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ 不存在.

7. 函数 $z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$ 在何处是间断的？

解　$z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$ 为初等函数，因此它在 $y^2-2x=0$ 上间断.

8. 证明　$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{2^2+y^2}}=0$.

证　因为　$x^2+y^2\geqslant 2|x||y|$，

所以　$0\leqslant\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant\dfrac{|x||y|}{\sqrt{2|x||y|}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{|xy|}$.

而　$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{|xy|}=0$，所以　$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=0$.

从而有 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

§2 偏导数

一、内容要点

1. 偏导数的定义及其算法

(1) 偏导数的定义

设 $z=f(x, y)$在点(x_0, y_0)的某一邻域内有定义，当 y 固定在 y_0 而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时，相应地函数有增量

$$f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0),$$

如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限为函数 $z=f(x, y)$在点(x_0, y_0)处对 x 的偏导数，记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\ \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\ z_x\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\text{ 或 } f_x(x_0, y_0).$$

类似地，函数 $z=f(x, y)$在点(x_0, y_0)处对 y 的偏导数定义为

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

记作 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\ z_y\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ 或 $z_y(x_0, y_0)$.

如果函数 $z=f(x, y)$在区域 D 内每一点(x, y)处对 x 的偏导数都存在，那么这个偏导数就称为 $z=f(x, y)$对自变量 x 的偏导函数，记为

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial x},\ z_x\text{ 或 } f_x.$$

同理可定义 $z=f(x, y)$对自变量 y 的偏导数，记为

$$\frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ z_y \text{ 或 } f_y.$$

(2) 偏导数的求法

要求函数对某一变量的偏导数，只需将该变量看作变量，其余变量看作常数，按照一元函数求导法则去求.

2. 高阶偏导数

对 $z=f(x, y)$ 的偏导数 f_x，f_y 继续求偏导，就得到二阶偏导数，二阶偏导数共有四个：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x, y),\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=f_{xy}(x, y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=f_{yx}(x, y),\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x, y).$$

一般来讲，$f_{xy} \neq f_{yx}$. 当 f_{xy} 与 f_{yx} 为连续函数时，它们相等.

二、典型例题

例 1 设 $f(x, y)=\sqrt{|xy|}$，求 $f_x(0, 0)$.

解 $f_x(0, 0)=\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x, 0)-f(0, 0)}{x}=\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{0-0}{x}=0.$

例 2 设 $z=\ln(\sqrt{x}+\sqrt{y})$. 求 $x \dfrac{\partial z}{\partial x}+y \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2 \sqrt{x}+\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}},$$

故
$$x \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1 \sqrt{x}}{2(\sqrt{x}+\sqrt{y})}.$$

同理有

$$y \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1 \sqrt{y}}{2(\sqrt{x}+\sqrt{y})}.$$

因此 $x \dfrac{\partial z}{\partial x}+y \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)=\dfrac{1}{2}.$

例 3 已知 $f(x, y)$：$x^2\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)-y^2\arctan\left(\dfrac{x}{y}\right)$，求 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$.

解 设 $g(x, y)=x^2\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$，$h(x, y)=y^2\arctan\left(\dfrac{x}{y}\right)$，

则 $\dfrac{\partial g}{\partial y}=\dfrac{x^3}{x^2+y^2}$，$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial g}{\partial y}\right)=\dfrac{x^2(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}$，

同理 $$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)=\frac{y^2(y^2+3x^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

因此 $$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

例 4 设 $z=z(x, y)$定义在全平面上，则

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial y}\equiv 0$，试证 $z=f(y)$；

(2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$，试证 $z=f(x)+g(y)$.

证 (1)令 $f(y)=z(0, y)$，任意固定 y_0，记 $h(x)=z(x, y_0)$，则有

$$h'(x)=\frac{\partial z(x, y_0)}{\partial x}=0,$$

所以 $$h(x)=c,$$

从而 $$z(x, y_0)=h(x)=h(0)=z(0, y_0)=f(y_0),$$

由 y_0 的任意性，知 $z=z(x\cdot y)=f(y)$.

(2) 因为 $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\equiv 0$，由(1)知$\dfrac{\partial z}{\partial y}=g_1(y)$，

令 $z(x, 0)=f(x)$，任意固定 x_0，考虑 $k(y)=z(x_0, y)$，则

$k'(y)=\dfrac{\partial z(x_0, y)}{\partial y}=g_1(y)$，故 $k(y)=\displaystyle\int_0^y g_1(t)\mathrm{d}t+k(0)$，

记 $\displaystyle\int_0^y g_1(t)\mathrm{d}t=g(y)$，则上式是

$$z(x_0, y) = g(y) + z(x_0, 0) = g(y) + f(x_0)$$

由 x_0 的任意性知 $z(x, y)=g(y)+f(x)$.

例 5 证明方程 $y\dfrac{\partial u}{\partial x}+x\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$ 的解为 $u=f(x^2-y^2)$，其中 f 为任一可微函数.

证 令 $v=x^2-y^2$, $w=xy$，则将 $u=u(x, y)$ 看成 $(x, y)\to(v,w)\to u$ 的复合函数，故有

$$\begin{aligned}0 &= y\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}\\ &= y\left(\frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}\right)+x\left(\frac{\partial u}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}\right)\\ &= (x^2+y^2)\frac{\partial u}{\partial w},\end{aligned}$$

即 $\dfrac{\partial u}{\partial w}=0$，所以 u 仅与 v 有关，因此 $u=f(x^2-y^2)$.

三、习题 8－2 简解

1. 求下列函数的偏导数.

(1) $z=x^3y-y^3x$;　　(2) $s=\dfrac{u^2+v^2}{uv}$;

(3) $z=\sqrt{\ln(xy)}$;　　(4) $z=\sin(xy)+\cos^2(xy)$;

(5) $z=\ln\tan\dfrac{x}{y}$;　　(6) $z=(1+xy)^y$;

(7) $u=x^{\frac{y}{z}}$;　　(8) $u=\arctan(x-y)^z$.

解 (1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2y-y^3$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^3-3y^2x$.

(2) $\dfrac{\partial s}{\partial u}=\dfrac{2u\cdot uv-v\cdot(u^2+v^2)}{(uv)^2}=\dfrac{u^2-v^2}{u^2v}=\dfrac{1}{v}-\dfrac{v}{u^2}$,

$\dfrac{\partial s}{\partial v}=\dfrac{1}{u}-\dfrac{u}{v^2}$ （由 u,v 在函数中的对称性得到）.

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{2\sqrt{\ln(xy)}}\cdot\dfrac{1}{xy}\cdot y=\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln(xy)}}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2y\sqrt{\ln(xy)}}$$（由 x，y 在函数中的对称性得到）；

(4) $\frac{\partial z}{\partial x}=\cos(xy)\cdot y+2\cos(xy)\cdot[-\sin(xy)]\cdot y$

$=y[\cos(xy)-\sin(2xy)]$，

$\frac{\partial z}{\partial y}=x[\cos(xy)-\sin(2xy)]$.

(5) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\tan\frac{x}{y}}\cdot\sec^2\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y}=\frac{2}{y}\csc\frac{2x}{y}$，

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\tan\frac{x}{y}}\cdot\sec^2\frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{2x}{y^2}\csc^2\frac{2x}{y}$.

(6) $\frac{\partial z}{\partial x}=y(1+xy)^{y-1}\cdot y=y^2(1+xy)^{y-1}$.

因为　$z=(1+xy)^y=e^{y\ln(1+xy)}$，

所以 $\frac{\partial z}{\partial y}=e^{y\ln(1+xy)}\cdot\left[\ln(1+xy)+y\cdot\frac{1}{1+xy}\cdot x\right]$

$=(1+xy)^y\left[\ln(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}\right]$.

(7) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=x^{\frac{y}{z}}\cdot\frac{\ln x}{z}=\frac{\ln x}{z}x^{\frac{y}{z}}$，

$\frac{\partial u}{\partial z}=x^{\frac{y}{z}}\cdot\left(-\frac{y}{z^2}\right)\cdot\ln x=-\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x$.

(8) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+[(x-y)^z]^2}\cdot z(x-y)^{z-1}=\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$，

$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-1}{1+[(x-y)^z]^2}\cdot z(x-y)^{z-1}=-\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$，

$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{1+[(x-y)^z]^2}\cdot(x-y)^z\ln(x-y)=\frac{(x-y)^z\ln(x-y)}{1+(x-y)^{2z}}$.

2. 设 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$，求证 $l\frac{\partial T}{\partial l}+g\frac{\partial T}{\partial g}=0$.

解　因为

$$\frac{\partial T}{\partial l}=2\pi\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{l}{g}}}\cdot\frac{1}{g}=\pi\cdot\frac{1}{\sqrt{lg}},$$