

高校经典教材同步辅导丛书
配套人大版·赵树嫄主编

九章丛书

线性代数

同步辅导及习题全解

第四版

- ◆ 知识点窍 ◆ 逻辑推理 ◆ 习题全解
- ◆ 全真考题 ◆ 名师执笔 ◆ 题型归类

主 编 郭志梅 王曙东
副主编 周湘陵



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

经济应用数学基础 (二)
新版

高校经典教材同步辅导丛书

线性代数（第四版）同步 辅导及习题全解

主 编 郭志梅 王曙东



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书是人大版《线性代数》(第四版)教材的配套学习辅导及习题解答。编写的重点在于提供原教材中各章节全部习题的精解详答,并对典型习题做了详细的分析和提纲挈领的点评。每章都对知识点进行归纳和提炼,帮助读者梳理清楚各章脉络,统揽全局;并在教材给出的习题的基础上,根据每章的知识重点,精选了有代表性的例题,方便读者迅速掌握各章的重点和难点。

本书编写思路清晰、逻辑缜密、内容详尽,简明易懂,力求循序渐进地帮助读者分析并解决学习中遇到的问题。

本书可作为经济、管理各专业本科学生《线性代数》课程教学辅导材料和复习参考用书及考研强化复习的指导书,也可以作为《线性代数》课程教师的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数(第四版)同步辅导及习题全解 / 郭志梅,
王曙东编著. —北京:中国水利水电出版社, 2009
(高校经典教材同步辅导丛书)
ISBN 978-7-5084-6753-5

I. 线… II. ①郭…②王… III. 线性代数—高等学校—
教学参考资料 IV. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 146772 号

策划编辑: 杨庆川 责任编辑: 杨元泓 加工编辑: 徐雯 封面设计: 李佳

书 名	高校经典教材同步辅导丛书 线性代数(第四版)同步辅导及习题全解
作 者	主编 郭志梅 王曙东
出版发行	中国水利水电出版社(北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座 100038) 网址: www.waterpub.com.cn E-mail: mchannel@263.net (万水) sales@waterpub.com.cn 电话: (010) 68367658(营销中心)、82562819(万水)
经 售	全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	北京万水电子信息有限公司
印 刷	北京市梦宇印务有限公司
规 格	148mm×210mm 32 开本 8.75 印张 369 千字
版 次	2009 年 8 月第 1 版 2009 年 8 月第 1 次印刷
印 数	0001—7000 册
定 价	12.80 元

凡购买我社图书,如有缺页、倒页、脱页的,本社营销中心负责调换

版权所有·侵权必究

编 委 会

编 委（排名不分先后）

程丽园	李国哲	陈有志	苏昭平
郑利伟	罗彦辉	邢艳伟	范家畅
孙立群	李云龙	刘 岩	崔永君
高泽全	于克夫	尹泉生	林国栋
黄 河	李思琦	刘 闯	侯朝阳

前言

线性代数是财经类学生的一门重要的必修课程,也是财经研究生入学考试的重要课程之一。然而由于线性代数自身的抽象性以及其特有的语言符号系统,使得线性代数成为众多学生学习中的一大难关。

为了帮助广大读者学好线性代数,编者根据原国家教委审定的普通高等学校线性代数课程教学基本要求(教学大纲)和研究生入学考试数学大纲编写了这本具有工具书性质的《线性代数(第四版)同步辅导及习题全解》。本书的内容按照被全国许多院校经济、管理等专业采用的赵树嫄主编的《线性代数》(第四版)(中国人民大学出版社出版)的章节顺序分为五章,各章具体体系如下:

◆**知识结构网络图**:以图表的形式概括各章知识点及其之间的联系,使读者对全章内容有一个清晰的脉络。

◆**知识要点诠释与重要结论归纳**:阐述每一章中重要的性质定理、公式和结论,并对一些难于理解但又是大纲所要求的考研经常涉及的内容进行了详细的归纳和解释,目的是使读者在一个更高的层次去分析问题、解决问题。

◆**典型题型的解题方法及技巧**:本书尽可能归纳了这门课程所涉及的重要题型,这些题型都是在对历年考试和考研所涉及的题型进行深入分析后总结出来的,具有一定的代表性。读者通过对典型的“思路点拨”和例题的“逻辑推理”的理解,可以更好地掌握和理解此类题型的解法,从而达到举一反三、触类旁通的效果。

◆**全真考题解析**:精选历年经典考研题并给出详细的解题思路和解答过程,供读者提高解题能力和备考硕士研究生之用。

◆**课后习题详解**:本书对所有课后习题均给出了详细的解答,为了使读者在解题之前能够对题型所涉及知识点和解题方法有一个把握,还对大部分习题编写了“知识点窍”和“逻辑推理”部分。前者给出了习题所涉及的知识点,后者给出了该类题目的解题思路和方法。

在编写过程中,编者参考了众多优秀的著作和教材,由于篇幅所限未能一一列出,在此谨向有关作者表示衷心感谢。

由于时间仓促和编者水平有限,不妥之处在所难免,希望广大读者不吝批评指正。

编者

2009年6月

目 录

前言

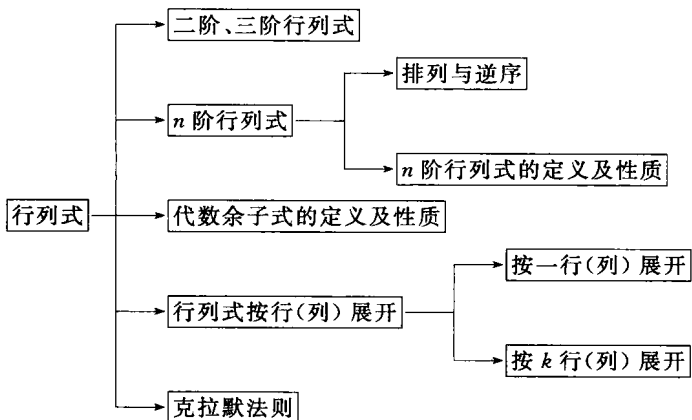
第一章 行列式	1
【知识结构网络图】	1
1.1 知识要点诠释与重要结论归纳	1
1.2 典型题型的解题方法及技巧	5
1.3 全真考题解析	23
1.4 课后习题详解	24
第二章 矩 阵	67
【知识结构网络图】	67
2.1 知识要点诠释与重要结论归纳	68
2.2 典型题型的解题方法及技巧	74
2.3 全真考题解析	88
2.4 课后习题详解	89
第三章 线性方程组	142
【知识结构网络图】	142
3.1 知识要点诠释与重要结论归纳	142
3.2 典型题型的解题方法及技巧	144
3.3 全真考题解析	157
3.4 课后习题详解	160
第四章 矩阵的特征值	197
【知识结构网络图】	197
4.1 知识要点诠释与重要结论归纳	197

4.2	典型题型的解题方法和技巧	203
4.3	全真考题解析	219
4.4	课后习题详解	222
第五章	二次型	244
	【知识结构网络图】	244
5.1	知识要点诠释与重要结论归纳	244
5.2	典型题型的解题方法及技巧	247
5.3	全真考题解析	252
5.4	课后习题详解	254

第一章

行列式

【知识结构网络图】



1.1 知识要点诠释与重要结论归纳

1. (全)排列和逆序数

(1) (全)排列.

由 n 个不同的元素排成一列, 叫做这 n 个元素的全排列(简称排列). n 个不同元素的所有排列的种类 $P_n = n!$.

(2) 逆序和逆序数.

在 n 个元素的任意排列 $(i_1, i_2, \dots, i_l, \dots, i_s, \dots, i_n)$ 中, 若某两个元素的先后次序与标准次序不同, 如 $i_l > i_s$, 则称这两个数组成一个逆序.

一个排列中所有逆序的总数称为此排列的逆序数, 记作 $\tau(i_1, i_2, \dots, i_n)$. 若 τ 为奇

数,则称 $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ 为奇排列;若 τ 为偶数,则称此排列为偶排列.

(3) 对换.

排列 $(i_1, i_2, \dots, i_r, \dots, i_s, \dots, i_n)$ 中,交换任意两个数 i_r 和 i_s 的位置,称为一次对换.对换改变排列的奇偶性.

任意一个 n 元排列 $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ 经过若干次对换可变为 $(1, 2, \dots, n)$ 样的标准排列,且所作的对换次数与排列 $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ 有相同的奇偶性,即奇排列调成标准排列的对换次数为奇数,偶排列调成标准排列的对换次数为偶数.

2. 行列式的定义

(1) n 阶行列式的归纳定义.

对由 n^2 数组成的 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

当 $n=1$ 时, $|a_{11}| = a_{11}$

当 $n \geq 2$ 时,

$$D = \sum_{j=1}^n (-1)^{(1+j)} a_{1j} M_{1j} = \sum_{j=1}^n a_{1j} A_{1j}$$

其中 $M_{1j} = \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 为 a_{1j} 的余子式,

$A_{1j} = (-1)^{(1+j)} M_{1j}$ 为 a_{1j} 的代数余子式.

(2) n 阶行列式的“排列逆序”定义.

对由 n^2 数组成的 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1, j_2, \dots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

这里 $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和,故 n 级行列式等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 的代数和,每一项的符号取决于组成该项的 n 个元素的列下标排列的逆序数(行下标按自然顺序排列),即当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是偶排列时取正号,当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是奇排列时取负号.

应该指出的是,行列式采用上述两种方式的定义是等价的.通常如果用“排列逆序”定义行列式,则归纳定义就成为行列式按一行展开的性质.

3. 行列式的性质

(1)行列式与它的转置行列式相等,即 $D = D^T$.

(2)互换两行(列)后的行列式是原行列式的相反数.

(3)行列式某一行(列)的各元素都乘以同一个数 k ,等于 k 乘以此行列式.

推论 行列式某一行(列)各元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

(4)两行(列)元素对应成比例的行列式为零.

推论 两行(列)元素完全相同的行列式为零.

(5)若行列式某一行(列)的各元素都是两数之和,则该行列式等于两个行列式之和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论 把行列式某一行(列)的各元素都乘以同一个数,然后加到另一行(列)对应的元素上去,行列式的值不变.

(6)行列式按行(列)展开定理:行列式等于其任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和为零.

(7)拉普拉斯展开定理:行列式等于其中任意 k 行(列)的所有 k 阶子式与其代数余子式乘积之和(显然(6)是(7)的特例).

4. 行列式按行(列)展开

(1)展开法则.

行列式按任一行(列)展开的规则如下:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

或 $D_n = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$

其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式.

(2) 推论.

行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零, 即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j)$$

或 $a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0 \quad (i \neq j)$

(3) 代数余子式的性质.

$$\sum_{k=1}^n a_{ki}A_{kj} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D & \text{当 } i = j \\ 0 & \text{当 } i \neq j \end{cases}$$

或 $\sum_{k=1}^n a_{ik}A_{jk} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D & \text{当 } i = j \\ 0 & \text{当 } i \neq j \end{cases}$

其中 $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{当 } i = j \\ 0 & \text{当 } i \neq j \end{cases}$

(4) 拉普拉斯定理.

行列式按某 k 行(列) ($1 < k \leq n-1$) 展开

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = N_1A_1 + N_2A_2 + \cdots + N_tA_t$$

其中 $t = C_n^k$, 而 $N_i (i = 1, 2, \cdots, t)$ 为取定的某 k 行(列)所得到的 k 阶子式; A_i 为 N_i 的对应代数余子式.

5. 重要公式

(1) 上(下)三角行列式及对角行列式的计算.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

(2) 范德蒙行列式的计算.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j)$$

(3) 克拉默法则.

对于 n 元 n 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

当行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

时有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

其中

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1.2 典型题型的解题方法及技巧

题型 I 排列逆序数的计算

【思路点拨】 在求排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数时, 可以从第 2 个数开始, 依次统计 j_i ($i = 2, 3, \cdots, n$) 与其前面的数构成的逆序个数 (即前面比 j_i 大的数的个数) τ_1 , 设排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数为 $\tau_2 + \tau_3 + \cdots + \tau_n$.

【例 1.1】 求下列排列的逆序数, 并确定它们的奇偶性.

(1) 5 3 2 1 4.

$$(2) n \quad (n-1) \cdots 2 \quad 1.$$

$$(3) 1 \quad 3 \quad 5 \cdots (2n-1) \quad 2 \quad 4 \quad 6 \cdots (2n).$$

【解】 (1) $\tau(5 \ 3 \ 2 \ 1 \ 4) = 1 + 2 + 3 + 1 = 7$, 为奇排列.

$$(2) \tau[n \ (n-1) \cdots 2 \ 1] = 1 + 2 + \cdots + (n-2) + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

由于 $\frac{n(n-1)}{2}$ 的奇偶性必须根据 n 而定, 故讨论如下:

当 $n = 4k$ 时, $\frac{n(n-1)}{2} = 2k(4k-1)$ 为偶数;

当 $n = 4k+1$ 时, $\frac{n(n-1)}{2} = 2k(4k+1)$ 为偶数;

当 $n = 4k+2$ 时, $\frac{n(n-1)}{2} = (2k+1)(4k+1)$ 为奇数;

当 $n = 4k+3$ 时, $\frac{n(n-1)}{2} = (2k+1)(4k+3)$ 为奇数.

综上所述, 当 $n = 4k$ 或 $4k+1$ 时, 此排列为偶排列; 当 $n = 4k+2$ 或 $4k+3$ 时, 此排列为奇排列, 其中 k 为任意非负整数.

(3) 该排列的前 n 个数 $1 \ 3 \ 5 \cdots (2n-1)$ 之间不构成逆序, 后 n 个数 $2 \ 4 \ 6 \cdots (2n)$ 之间也不构成逆序, 只有前后 n 个数之间才构成逆序, 因此排列的逆序数为

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_2 + \tau_3 + \cdots + \tau_n + \tau_{n+1} + \tau_{n+2} + \cdots + \tau_{2n} \\ &= 0 + 0 + \cdots + 0 + 0 + 1 + \cdots + (n-1) \\ &= \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

奇偶性情况与(2)完全一致.

【例 1.2】 如果排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数为 I , 求排列 $j_n j_{n-1} \cdots j_2 j_1$ 的逆序数.

【逻辑推理】 如果设原排列中 j_1 前比 j_1 大的数的个数为 τ_1 , 则比 j_1 小的数的个数为 $(n-1) - \tau_1$, 那么新排列 $j_n j_{n-1} \cdots j_2 j_1$ 中 j_1 前比 j_1 大的个数为 $(n-1) - \tau_1$; 同理, 设原排列中 j_2 前比 j_2 大的数的个数为 τ_2 , 则比 j_2 小的数的个数为 $(n-2) - \tau_2$, 则新排列中 j_2 前比 j_2 大的数的个数为 $(n-2) - \tau_2$; 依次类推, 设原排列中 j_k 前比 j_k 大的数的个数为 τ_k , 则新排列中 j_k 前比 j_k 大的数的个数为 $(n-k) - \tau_k$ ($k=1, 2, \cdots, n$).

【解】 设原排列中 j_k 前比 j_k 大的数的个数为 τ_k , 则新排列中 j_k 前比 j_k 大的数的个数为 $(n-k) - \tau_k$ ($k=1, 2, \cdots, n$). 因为 $\tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_n = I$, 则排列 $j_n j_{n-1} \cdots j_2 j_1$ 的逆序数为

$$\begin{aligned} \tau &= \sum_{k=1}^n [(n-k) - \tau_k] \\ &= [(n-1) + (n-2) + \cdots + 1 + 0] - (\tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_n) \end{aligned}$$

$$= \frac{n(n-1)}{2} - I$$

题型 II n 阶行列式的概念

【思路点拨】 对于此类题型要注意两点：一是每一项的构成，应为不同行、不同列的 n 个元素相乘；二是每一项的符号，当第一个下标为自然顺序时，由第二个下标排列的奇偶性确定。

【例 1.3】 填空题

(1) 在 5 阶行列式中，项 $a_{12}a_{31}a_{54}a_{43}a_{25}$ 的符号应取_____。

(2) 在 4 阶行列式中，带负号且包含因子 a_{23} 和 a_{31} 的项为_____。

(3) 如果 n 阶行列式中，负项的个数为偶数，则 $n \geq$ _____。

(4) 如果 n 阶行列式中等于零的元素个数大于 $n^2 - n$ ，那么此行列式的值为_____。

【逻辑推理】 (1) 其逆序数 $\tau(25134) = 4$ ，故取正号。

(2) 包含因子 a_{23} 和 a_{31} 的项必为 $a_{1i}a_{23}a_{31}a_{4j}$ ，其中 i, j 为 2, 4 或 4, 2。又此项符号为负，所以 $i31j$ 为奇排列，从而有 $i=4, j=2$ 。

(3) n 阶行列式中，共有 $n!$ 项，其中正负项各占一半，若负项的个数为偶数，必有 $n \geq 4$ 。

(4) n 阶行列式中共有 n^2 个元素，如果等于零的元素个数大于 $n^2 - n$ ，那么不等于零的元素个数就小于 n ，又 n 阶行列式的每一项是 n 个不同元素的乘积，所以每一项必为零，所以此行列式的值也为零。

【答案】 (1) +. (2) $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$. (3) 4. (4) 0.

【例 1.4】 试求 $f(x)$ 中 x^4 与 x^3 的系数，其中

$$f(x) = \begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & x & 3 \\ x & x & 2 & 3 \\ x & 2 & 1 & -3x \end{vmatrix}$$

【解】 由 $f(x)$ 的表达式可知，位于不同行不同列的 4 个元素乘积含 x^4 的项只有 1 项

$$(-1)^{\tau(1324)} a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} = (-1)^1 5x \cdot x \cdot x \cdot (-3x) = 15x^4$$

含 x^3 的项有 2 项

$$(-1)^{\tau(2314)} a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} = (-1)^2 1 \cdot x \cdot x \cdot (-3x) = -3x^3$$

$$(-1)^{\tau(4321)} a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} = (-1)^6 3 \cdot x \cdot x \cdot x = 3x^3$$

故 $f(x)$ 中 x^4 的系数为 15， x^3 的系数为 0。

【例 1.5】 计算行列式：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$$

【解】 设各个字母表示的都是非零元素. 于是在第 1 行中有两个非零元素 a_{11} 和 a_{12} . 当第 1 行取 a_{11} 时, 第 2 行只能取 a_{23} , 第 3 行只能取 a_{32} , 第 4 行只有 a_{44} , 即 $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 是其中的一项. 另外, 当第 1 行取 a_{12} 时, 第 2 行可以取 a_{21} 或 a_{23} , 但当第 2 行取 a_{23} , 第 3 行只能取零元素, 故第 2 行只可以取 a_{21} , 第 3 行取 a_{33} , 第 4 行取 a_{44} , 即另一非零项为 $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$.

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{\tau(1\ 3\ 2\ 4)} a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} + (-1)^{\tau(2\ 1\ 3\ 4)} a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} \\ &= -a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} \end{aligned}$$

题型 III 低阶行列式的计算

【思路点拨】 低阶(3~5 阶)行列式的计算一般有两个方法: 一是利用行列式的性质化为上(或下)三角形行列式; 二是根据行列式按一行(或列)展开公式降阶求解.

【例 1.6】 计算下列行列式

$$(1) D = \begin{vmatrix} 103 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 301 & 300 & 600 \end{vmatrix} \quad (2) D = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 & -3 \\ 1 & -6 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & -12 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

【逻辑推理】 对于数字型行列式的计算一般采用把某行(或列)元素中除去某一元素外的其他元素, 用行列式的性质都化为零, 再利用按行(或列)展开的性质, 降低行列式的阶数进行计算.

【解】 (1)

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 103 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 301 & 300 & 600 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 100 & 4 \\ -1 & 200 & -5 \\ 1 & 300 & 0 \end{vmatrix} = 100 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 100 \begin{vmatrix} 3 & -8 & 4 \\ -1 & 5 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 100 \begin{vmatrix} -8 & 4 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} = 2000. \end{aligned}$$

(2) 因为该行列式的第 4 列含有 0 元素, 且 $a_{24}=1$, 所以, 可把第 4 列的元素 a_{14}, a_{44} 化为 0, 再按第 4 列展开

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} 5 & -14 & -2 & 0 \\ 1 & -6 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 6 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 5 & -14 & -2 \\ -3 & 5 & 2 \\ 1 & 6 & 6 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 5 & -14 & -2 \\ 2 & -9 & 0 \\ 16 & -36 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -9 \\ 16 & -36 \end{vmatrix} = -144
 \end{aligned}$$

【例 1.7】 记行列式

$$\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix} \text{ 为 } f(x), \text{ 则方程 } f(x)=0 \text{ 的根的个数为}$$

(A)4 (B)3 (C)2 (D)1

【逻辑推理】 本题实质上是确定 $f(x)$ 是几次多项式,即有几个根.由于行列式中各项均含有 x ,直接展开是烦琐的,因此本题可利用行列式性质作恒等变形后求解.

【解】 将第 1 列的 (-1) 倍依次加至其余各列,有

$$f(x) = \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_4+c_2} \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix}$$

用拉普拉斯展开式知

$$f(x) = \begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & -6 \end{vmatrix} = 5x(x-1),$$

可见 $f(x)=0$ 有两个根,故应选(C).

题型 IV 行列式按行(列)展开定理的应用

【思路点拨】 根据行列式按行(列)展开定理,可将 n 阶行列式降到 2 阶行列式来直接计算,这样从理论上完全解决了行列式的计算问题.在实际计算中,有时会利用公式

$$k_1 A_{11} + k_2 A_{12} + \cdots + k_n A_{1n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

将某些低阶行列式(代数余子式或余子式)的计算转化为高阶行列式计算.

【例 1.8】 4 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ 的值等于

- (A) $a_1 a_2 a_3 a_4 - b_1 b_2 b_3 b_4$.
 (B) $a_1 a_2 a_3 a_4 + b_1 b_2 b_3 b_4$.
 (C) $(a_1 a_2 - b_1 b_2)(a_3 a_4 - b_3 b_4)$.
 (D) $(a_2 a_3 - b_2 b_3)(a_1 a_4 - b_1 b_4)$.

【解】 由于本题零元素较多,可根据行(列)展开定理按第 1 行展开有

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} &= a_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & b_3 & a_3 \\ a_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= a_1 a_4 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} - b_1 b_4 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} \\ &= (a_2 a_3 - b_2 b_3)(a_1 a_4 - b_1 b_4). \end{aligned}$$

故选(D)

【例 1.9】 已知四阶行列式

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 3 & 1 & 8 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

求 $A_{14} + A_{24} + A_{34} + A_{44}$ 的值,其中 A_{ij} 为行列式 D_4 中元素 a_{ij} 的代数余子式.

【逻辑推理】 本题若直接计算四个代数余子式,计算较繁且易出现差错,反过来用行(列)展开定理,化为一四阶行列式计算更简便.

【解】 由于

$$A_{14} + A_{24} + A_{34} + A_{44} = 1 \cdot A_{14} + 1 \cdot A_{24} + 1 \cdot A_{34} + 1 \cdot A_{44}$$

它是行列式 D_4 中第 2 列元素与第 4 列元素代数余子式的乘积之和,故由行列式按一列展开定理知

$$A_{14} + A_{24} + A_{34} + A_{44} = 0$$

题型 V n 阶行列式的计算

【思路点拨】 n 阶行列式的计算方法很多,应根据题的特点灵活应用.现将 n 阶行列式的几种方法归纳如下: