新立體幾何難題集解

我

立體幾何難題集解

錢洪翔編

上海北新書局發行

1951

立體幾何難題集解

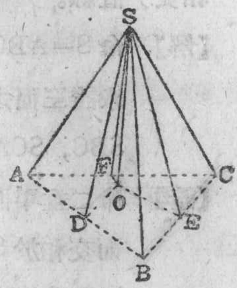
目次

最新立體幾何難題集解

(一)證明問題

任何三面角中，通過其諸面角之平分線，而與其諸面垂直之三平面，必相交於一直線。

【解】 命 S－ABC 爲任何三面角。



而 SD, SE, SF, 爲三面角之平分線。

求證通過 SD, SE, SF 而垂線 ASB, BSC, CSA 三面之三平面，必相交於一直線。

【證】 取 SA 等於 SB 等於 SC，乃作 AB, BC, CA。命D, E, F 各爲 SD, SF, SE 之交點。

於 △ABC 內，自 D, E, F 至其對邊 AB, BC, CA 作三垂線。

但 ◬SAB, SBC 及 SCA，皆爲兩等邊。

∴ SD, SE 及 SF 三平分線，即爲 AB, BC, CA 中點之垂線。

故在 ABC 平面內，於 D, E, F 之三垂線相遇於一點。

因 AB⊥DS 及 DO，故亦爲 ADO 平面之⊥。

∴ ABS⊥SDO 平面。

依同理，OES⊥BSC 平面，而 OFS⊥CAS 平面。

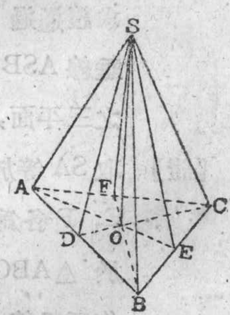
因知三平面通過三面角之三面角之平分線，且各爲其面之垂線，卽知其有 O 及 S 二公點，故知其同交於一直線 OS。

2. 任何三面角中，通過諸稜而與其相對諸面垂直之三平面，必相交一直線。

【解】 命 S－ABC 爲任何三面角。

求證三面之通過 SA，SB 及 SC 三稜而爲相對之面 SBC，SCA 及 SAB 之垂線必同交於一直線。

【證】 命二垂平面，通過 SC 及 SB 而交相於 SO。



通過 SA 及 SO 作一平面，截 SBC 面於 SE，通過 SO 內之任一點 O，作一平面。爲SO之⊥。

乃命 AB，BC 及 AC，爲此平面與三面角三面之交線。而 AE，BF 及 CD，爲此平面與通過三稜所作之平面之交線。

SAE，SBF，SCD 三平面中之每一箇爲 ABC 平面之⊥。

今 SCD⊥SAB

$\therefore$ AB⊥SDC

故　CD⊥AB

依同理 BF⊥AC

故於 △ABC 內。BF 及 CD，爲自角頂 B 及 C 至對邊 AC 及 AB 所作之⊥。

因知 AE，爲自角頂 A 至 AC 邊之⊥。

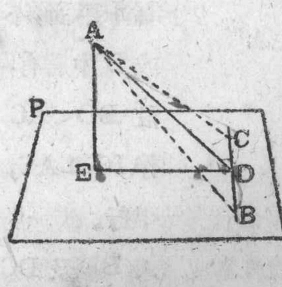
而通過 BF 及 CD 之交點。

因 SAF 平面，爲 ABC 平面之⊥。

或 ASE 平面，通過 SA 而爲其對面 SBC 之⊥。

故三平面之通過 SA，SB 及 SC 三稜而爲相對諸面之⊥者，同交於直線 OS。

3. 由平面 P 外一點 A 向平面上一點 E 及其上之直線 BC 各引垂線 AD，AE，則二垂足之聯線 DE 與直線 BC 垂直。試證明之。



【解】 設　A爲平面 P 外一點，E 及 CB 及平面內之點及直線，且 AE⊥P，AD⊥CB，

作 FD，

求證　DE⊥CB

證作 CD＝BD

聯 AC，AB，CE，BE，

$\therefore$ AB＝AC

（設由一點至一平面，作諸斜線，垂線遇平面之點，其垂線足之距離等者其線必等）

$\triangle ACE = \triangle ABE$

（兩直角三角形，有一腰及一弦相等，則彼此相等）

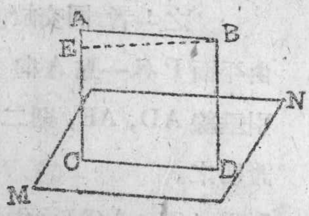
$\therefore$ $BE = CE$，

$\therefore$ $ED \perp CB$，

（自一線之兩線，等距離之兩點，可定此線之垂直平分線）

4. 一線至平面上所作射影，等於本長，試言此線與此平面之位置關係如何。

【解】 命CD爲AB線至MN平面上所作之射影。



且CD等於AB，

AB ∥ CD，故亦平行MN平面，不然，則A或B中將有一箇較他箇近於平面矣。

設 $BD < AC$

$\therefore$ 作 $BE \perp AC$，則BE及DC當均爲AC之垂線，且相平行。

$\therefore$ BE及DC將相等

但 $BE < BA$

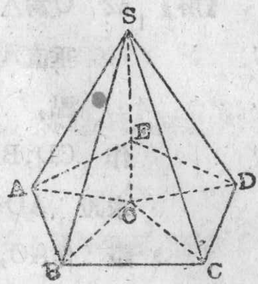
$\therefore$ $DC < BA$

則與DC等於BA之題設相反。

∴ AB ∥ CD, 亦平行 MN 平面。

5. 凸多面角之諸面角之和小於四直角,試證之。

【解】 設 S 爲一凸多面角, 並設其諸稜爲一平面所截成一截面 ABCDE



求證 ∠ASB + ∠BSC + ∠CSD + ∠DSE + ∠ASE 小於4rt∠s

證: 由多邊形內任一點 O 作 OA, OB, OC, OD, OE。

則有公頂 O 之三角形之數, 必等於有公共頂 S 之三角之數,

故有公共頂 S 之三角形之諸角之和應等於有公共頂之三角形之諸角之和,

但在 A, B, C, D, E, 爲頂之三面角內

∠SAE + ∠SAB 大於 ∠EAB

∠SBA + ∠SBC 大於 ∠ABC

(三面角之任兩面角之和,大於第三角)

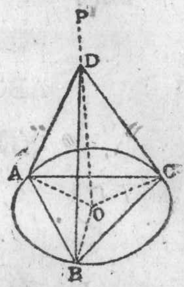
故有公共頂S之三角形之之諸底角之和,大於有公共頂 O 之三角形之之諸底角之和, 因是頂 S 上諸角之和,小於頂O上諸角之和,

但頂O上諸角之和等於4rt∠s

∴ S頂上諸角之和,小於4rt∠s。

6. O爲△ABC之外接圓心，自O作平面ABC之垂線OP，求證OP內任一點與A,B,C等距。

【解】 設 O爲△ABC外接圓之圓心，OP垂直ABC平面，D爲OP內任一點，



作 CD,BD,AD,

求證 AD=BD=CD。

證 作AO,BO,CO,

在△ADO及△CDO中，

AO=CO

(半徑相等)，

DO爲公共邊，

∴ △ADO=△CDO

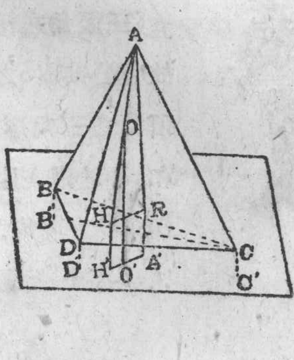
(兩直角三角形有兩腰相等，則兩形必等)

∴ AD=CD。

同樣可證 CD=BD。

∴ AD=BD=CD

7. 自一四面體之重心。至一平面之不與此四面稜體相交者作一垂線。則此線等於自此四面體之諸角頂至同平面所作四垂線之和之四分之一。



【解】 命 OO′ 爲自四面體

ABCD之重心O。至不與此四面體相交之MN平面之垂線。而AA′, BB′, CC′及DD′為自四面體之四角頂。至同平面所作之四垂線。

求證 $OO'=\frac{1}{2}(AA'+BB'+CC'+DD')$

【證】 命H為BDC面之中線之交線。則O在HA線之上，而與H相距為$\frac{1}{4}HA$

通過HAA′平面內之H，作HR ∥ MN平面，而截OO′於K。

今 $BB'+CC'+DD'=3HH'$

$3HH'+RA'=4KO'$

於HAR及HOK兩相似三角形內

$HA=4HO$

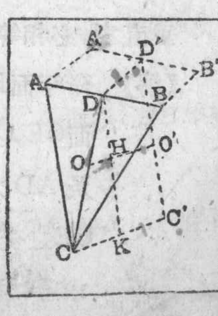
$\therefore AR=4OK$

故 $BB'+CC'+DD'+AA'=3HH'+RA'+AR$

$=4(KO'+OK)=4OO'$

$\therefore OO'=\frac{1}{4}(AA'+BB'+CC'+DD')$

8. 自一與三角形之三中線之交點，作一垂線，至任一平面之不與此三角形相交者，則此線等於自此三角形之諸角頂至同平面所作三垂線之和之三分之一。



【解】 自△ABC之平分線交點O，作

OO′爲不與此三角形相交之MN平面之垂線，而AA′，BB′，CC′爲自三角形之三角頂至同平面之三垂線。

求證 $OO'=\frac{1}{3}(AA'+BB'+CC')$

【證】 設CC′爲諸垂線之最長者。

自AB邊之D點，作DD′，爲平面之垂線，且通過D於DCO′內作DK ∥ MN平面。

今AA′，DD′及BB′在同一平面內，此平面與MN平面之交線爲A′D′B′。

於AA′；BB′梯形內。$AA'+BB'=2DD'$

DD′，OO′，CC′諸垂線，同在一平面內。

且 $2DD'+KC=3HO'$

於DCK及DHO兩相似三角形內。

$DC=3DO$

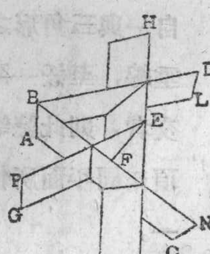
$\therefore KC=3OH$

$\therefore AA'+BB'+CC'=2DD'+KC'+CK$

$=3(HO'+OH)$

即 $OO'=\frac{1}{3}(AA'+BB'+CC')$

9. 兩二面角之角稜平行，且諸面彼此垂直者，必相等或相補。



【解】 命平面HM⊥平面AD，而平面GE⊥平面AN，AB爲AN及AD之交線，而與HM及GE之交線FE平行。

求證二面角C－BA－D等於

二面角G－EF－K，而與二面角G－EF－H相補。

【證】 設作一BHK平面⊥AB，截諸平面CB，AD，HM，GE於BN，BD，HK，EP。

則BHK平面⊥FE線

NB及DB⊥AB於同一點B，而HK及PE⊥FE於同一點E。

∴∠NBD爲度二面角C－BA－D之數。

∠HEP爲度二面角G－EF－H之數。

而∠PEK爲度二面角G－EF－K之數。

但∠NBD等於∠PEK，而與∠HEP相補。

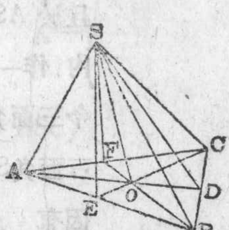
故二面角C－BA－D等於二面角G－EF－K。

而與二面角G－EF－H相補。

10. 平分三面角二面角之三平面，必相交於一直線。

【解】 命S－ABC爲三面角，而平面SAD，SBF及SCE各平分二面角SA，SB及SC。

求證SAD，SBF及SCE三平面同交於一直線。



【證】 命SAD及SBF相交於SO直線，則每點之在SO內者，其距SAC平面及SAB平面等遠。

依同理，每點之在SO內者，其距SBA平面及SBC平面亦等遠。

故每點之在SO內者，其距SCB平面及SCA平面亦必等遠。

因知SO在二稜角SC之平分平面內。

∴　SAD，SBF，SCE三平面同交於一直線。

11. 若三面角S－ABC之面角ASB，以SD線平分之，所成CSD角之小於等於ASC＋BSC二角之半和，依CSD之小於等於或大於一直角而定。

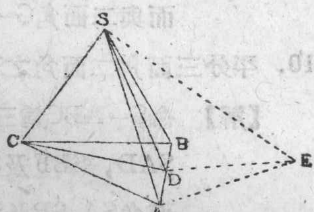
【解】 命S－ABC爲三面角，而SD平分面角ASB。

求證下列三例。

第一例　$\angle CSD<90°$時

求證　$\angle CSD<\frac{1}{2}(\angle ASC+\angle BSC)$

【證】 於$\angle CSD$之平面內，作一$\angle DSE$等於$\angle CSD$，且於AS及SE之平面內，作一AE線。



令三面角S－ADE等於三面角S－BDC。

因有　$\angle ASD=\angle BSD$　　題設

$\angle BSE=\angle CSD$　　構圖

而　$\angle A-SD-E=\angle B-SD-C$

∴　$\angle ASE=\angle RSD$

於三面角S－CAE內

$\angle CSE<\angle ASC+\angle ASE$

$\therefore\ \angle CSE<\angle ASC+\angle BSC$

$\therefore\ \angle CSD<\frac{1}{2}(\angle ASC+\angle BSC)$

第二例　$\angle CSD=90°$時。

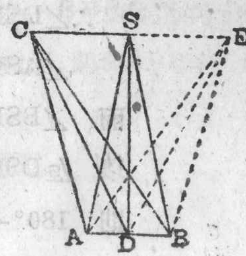
求證　$\angle CSD=\frac{1}{2}(\angle ASC+\angle BSC)$

【證】引長CS至遮當之一點E，乃作EA，ED，EB。

今　$\angle CSD=\angle DSE=90°$

由第一例知三面角$S-ABC$三面角$S-BDC$

而　$\angle ASC=\angle BSC$



今　$\angle ASC+\angle ASE$

$=180°$

$\therefore \angle ASC+\angle BSC=180°$

$\therefore \frac{1}{2}(\angle ASC+\angle BSC)$

$=90°$

因知　$\angle CSD=\frac{1}{2}(\angle ASC+\angle BSC)$

第三例　$\angle CSD>90°$時。

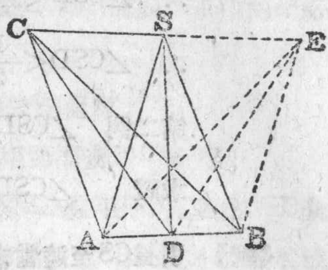
求證　$\angle CSD>\frac{1}{2}(\angle ASC+\angle BSC)$

【證】引長CS至適當之一點E，乃作EA，ED，EB。

今　$\angle CSD+DSE=180°$

但　$\angle CSD>90°$　　題設

$\therefore\ \angle DSE<90°$



故S－ABE為三面角，

於三面角S－ABE內

$\angle DSE$小於

$\frac{1}{2}(\angle ASE+\angle BSE)$

（第一例）

今　$\angle CSD+\angle DSE=180°$

$\angle ASE+\angle ASC=180°$

又　$\angle BSE+\angle BSC=180°$

$\therefore \angle DSE=180°-\angle CSD$

$\angle ASE=180°-\angle ASC$

而　$\angle BSE=180°-\angle BSC$

以　$\angle$s DSE，ASE及BSE之値代之

則　$180°-\angle CSD<\frac{1}{2}(180°-\angle ASC+180°-\angle BSC)$

即　$180°-\angle CSD<\frac{1}{2}\{360°-(\angle ASC+\angle BSC)\}$

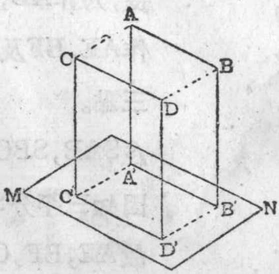
即　$180°-\angle CSD<180°-\frac{1}{2}(\angle ASC+\angle BSC)$

$\therefore\ \angle CSD>\frac{1}{2}(\angle ASC+\angle BSC)$

12．相等且平行之諸線，其在一平面上之射影，亦相等而平行。

【解】命AB及BD為相等且平行之二線。

而A′B′及C′D′，為在MN平面上AB及CD之射影。



求證A'B'及C'D'相等且平行。

【證】 作AC及BD，AB及CD在一平面內。

令AB及CD相等且平行。 題設

∴ ABCD爲平行四邊形，而AC及BD亦相等且平行矣。

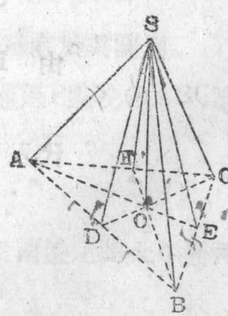
今諸平面AB',CD',AC',BD',皆爲MN平面之⊥，且AB'平面平行CD'平面，不然，AB及C爲諸平面與ABCD平面之交線，而能使之相遇，則與AB平行CD之題不適合。

依同理，AC'平面亦平行BD'平面。

∴ A'B'與C'D'平行。

且A'B'與C'D'相等。

13. 任何三面角中，通過其三稜，而平分其對面角之三平面，必相交於一直線。



【解】 命S－ABC爲任何三面角，而SD，SE，及SF爲其諸面角之平分線。

求證ASE，BSF及CSD三平面，相交於一直線。

【證】 截取SA，SB，SC令其互相等

長，乃作AB，BC，CA。

作AE，BF及CD，割SD，割SD，SE，SF，於D，E，F三點。

△s SAB，SBC，SCA皆爲二等邊三角形。　（構圖）

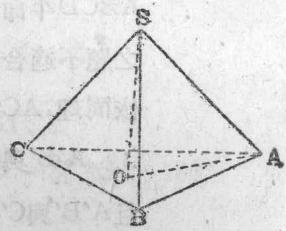
因知三平分SD，SE及SF即爲△之中分線。

故AE，BF，CD爲△ABC之中分線，同交於一點O。

故ASE，BSF，CSD有O及S二點公用，因知其必同交於SO直線。

14. 以正面體之高爲邊所作正方形之三倍，等於其稜上正方形之二倍。

【解】 設 S－ABC 爲一正四面體，SO爲其高



求證　$3\overline{SO}^2=2\overline{AS}^2$

證　作AO

因　△ABC爲等邊三角形。

O爲△ABC外切圓之中心。

由　$R=\dfrac{a\,b\,c}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$

代入　$AO=\dfrac{AB\cdot AB\cdot AB}{4\sqrt{\dfrac{3AB}{2}\left(\dfrac{3AB}{2}-AB\right)^2}}$

$=\dfrac{AB}{\sqrt{3}}$