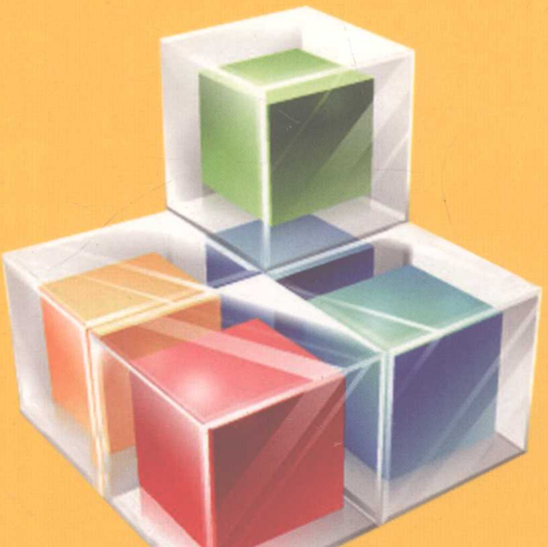
Shuxue Aosai
Fudao Congshu

数学奥赛辅导丛书

算两次

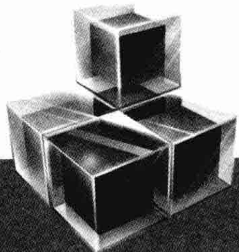
Suan Liangci

单 墫 编著



中国科学技术大学出版社

数学奥赛辅导丛书



算两次

单　墫　编著

中国科学技术大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

算两次/单墫编著. —3 版. —合肥：中国科学技术大学出版社，2009.4

（数学奥赛辅导丛书）

ISBN 978-7-312-02482-5

Ⅰ.算… Ⅱ.单… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 049128 号

中国科学技术大学出版社出版发行

地址：安徽省合肥市金寨路 96 号，230026

网址：http://press.ustc.edu.cn

中国科学技术大学印刷厂印刷

全国新华书店经销

*

开本：880×1230/32　印张：4.5　字数：91 千

1989 年 9 月第 1 版　2009 年 4 月第 3 版

2009 年 4 月第 3 次印刷

定价：10.00 元

序

目前,有关中学生复习资料、课外辅导读物已经出版得很多了,甚至使一些中学生感到不堪负担,所以再要出版这类读物一定要注重质量,否则“天下文章一大抄”,又无创新之见,未免有误人子弟之嫌.写这类读物如何才能确保质量呢?我想华罗庚老师的两句名言:“居高才能临下,深入才能浅出”,应该成为写这类读物的指导思想,他本人生前所写的一系列科普读物,包括为中学生写的一些书,也堪称是这方面的范本.

中国科学技术大学数学系的老师们,在从事繁重的教学与科研工作的同时,一向对中学数学的活动十分关注,无论对数学竞赛,还是为中学生及中学教师开设讲座,出版中学读物都十分热心,这也许是受华罗庚老师的亲炙,耳濡目染的缘故,所以至今这仍然是中国科学技术大学数学系的一个传统和特色.

我看了几本他们编写的“数学奥赛辅导丛书”原稿,感到他们是按照华罗庚老师的教诲认真写作的,所以乐之为序.

龚　昇

前　　言

“算两次”，是一种重要的数学方法，也称做富比尼(G. Fubini)原理.

细心的小学生做完算术题后，常常再算一次，检验结果是否正确. 检验，可以原原本本地重算一遍(这样做不太容易发现自己的错误)，也可以采用不同的方法，例如减法用加法检验，除法用乘法检验等等.

学过列方程解应用题的同学一定知道“为了得到一个方程，我们必须把同一个量以两种不同的方法表示出来”(波利亚著《数学的发现》第一卷，欧阳绛译本37页)，即将一个量“算两次”. 这种手法在几何计算中也极为常见.

不仅计算题、求解题需要这样做，在证明中，用两种方法计算同一个量，更是一种行之有效的基本方法.

这本小册子，通过形形色色的例题来介绍“算两次”. 读者一定能够举一反三，找到更多的应用.

单　墫

目　　次

1 几何问题

几何中，常常采用“算两次”的方法.

【例 1】 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 外切，它们的半径分别为 r_1, r_2. 外公切线 EF 切 $\odot O_1$ 于 E、切 $\odot O_2$ 于 F. $\odot O$ 与 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 及 EF 相切（如图 1）. 求证 $\odot O$ 的半径 r 满足

$$\frac{1}{\sqrt{r}}=\frac{1}{\sqrt{r_1}}+\frac{1}{\sqrt{r_2}} \tag{1}$$

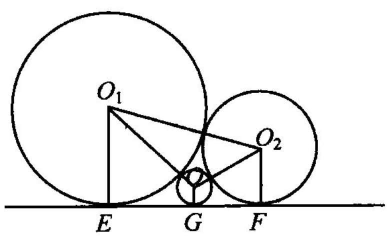


图 1

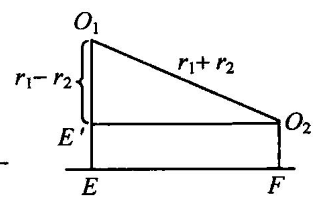


图 2

解 设 $\odot O$ 与 EF 相切于 G. 由已知

$$O_1O_2=r_1+r_2, O_1O=r_1+r, OO_2=r+r_2$$

在图 2 中，过 O_2 作直线 $O_2E' \parallel FE$，交 O_1E 于 E'. 易知 $O_1E'=r_1-r_2$，

$$EF=O_2E'=\sqrt{(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2}=2\sqrt{r_1r_2} \tag{2}$$

EF 还有另一种算法，即

$$EF=EG+GF \tag{3}$$

而与(2)类似，我们有

$$EG=2\sqrt{r_1 r},\ GF=2\sqrt{rr_2} \tag{4}$$

将(2)、(4)代入(3)得

$$2\sqrt{r_1 r_2}=2\sqrt{r_1 r}+2\sqrt{rr_2} \tag{5}$$

(5)式两边同除以 $2\sqrt{r_1 r_2 r}$ 便得到(1).

极为普通的(3)式却是本题的关键(熟悉解析几何的读者不难看出(3)实际上就是$\triangle O_1OO_2$ 的三条边在 EF 上的射影之和为"0"). 下面的例 2 与此类似.

【例 2】 直线 l 过$\triangle ABC$ 的重心 G，与边 AB，AC 分别相交于 B_1，C_1. $\frac{AB_1}{AB}=\lambda$，$\frac{AC_1}{AC}=\mu$. 求证

$$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=3 \tag{6}$$

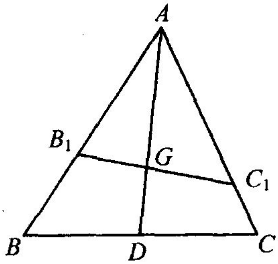


图 3

解 作 BC 的中线 AD(图 3)，G 当然在 AD 上.

考虑面积. 设$\triangle ABC$ 的面积为 1，$\triangle AB_1C_1$ 的面积为 S. 我们用两种方法来计算 S.

一方面，

$$S=\frac{S}{1}=\frac{AB_1\times AC_1}{AB\times AC}=\lambda\mu \tag{7}$$

另一方面，

$$S=S_{\triangle AB_1G}+S_{\triangle AGC_1} \tag{8}$$

而与(7)类似有

$$S_{\triangle AB_1G}=\frac{2\lambda}{3}S_{\triangle ABD}=\frac{\lambda}{3},S_{AGC_1}=\frac{\mu}{3} \tag{9}$$

代入(8)得

$$S=\frac{\lambda+\mu}{3} \tag{10}$$

综合以上两个方面，产生

$$\lambda\mu=\frac{\lambda+\mu}{3} \tag{11}$$

两边同乘$\frac{3}{\lambda\mu}$即得(1).

下面的例 3 是第 6 届巴尔干数学竞赛(1989 年)的试题(由于参加国中罗马尼亚，保加利亚与南斯拉夫都是数学竞赛的强国，所以试题难度甚大，但例 3 是其中最容易的一道).

【例 3】 直线 l 分别交$\triangle ABC$ 的边 AB，AC 于 B_1，C_1，并且$\triangle ABC$ 的重心 G 与 A 在 l 的同侧. 证明

$$S_{BB_1GC_1}+S_{CC_1GB_1}\geqslant\frac{4}{9}S_{ABC} \tag{12}$$

解法一 过 G 作 l 的平行线 l'，l'，分别交 AB，AC 于 B_1'，C_1'(图 4).

由于 C_1'到 AB 的距离小于 C_1 到 AB 的距离，所以

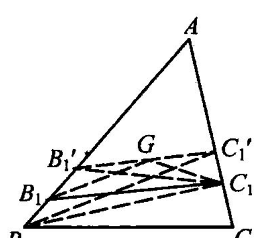


图 4

$$\begin{aligned}S_{BB_1GC_1}&=S_{BB_1C_1}+S_{B_1GC_1}=S_{BB_1C_1}+S_{B_1B_1'C_1}\\&=S_{BC_1B_1'}>S_{BC_1'B_1'}\end{aligned}$$

同样

$$S_{CC_1GB_1} > S_{CC_1'B_1'}$$

因此要证明(12)，只需证明

$$S_{BC_1'B_1'} + S_{CC_1'B_1'} \geqslant \frac{4}{9} S_{ABC}$$

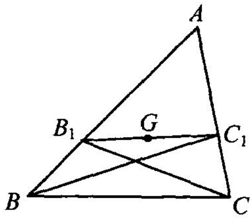


图 5

换句话说，我们可以认为 l 过重心 G（否则用 l' 代替 l），在这一条件下来证明(12).

在图 5 中，设 $\frac{AB_1}{AB} = \lambda$，$\frac{AC_1}{AC} = \mu$. 则

$$S_{BC_1B_1} = (1-\lambda) S_{BC_1A} = (1-\lambda)\mu S_{ABC}$$

同样

$$S_{CB_1C_1} = (1-\mu)\lambda S_{ABC}$$

问题化为证明不等式

$$(1-\lambda)\mu + (1-\mu)\lambda \geqslant \frac{4}{9} \tag{13}$$

由例 2，$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = 3$. 从而 $\lambda + \mu = 3\lambda\mu$，

$$(1-\lambda)\mu + (1-\mu)\lambda = \lambda + \mu - 2\lambda\mu = \frac{1}{3}(\lambda + \mu)$$

$$= \frac{1}{9}(\lambda + \mu)\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}\right) \geqslant \frac{4}{9}\sqrt{\lambda\mu} \cdot \sqrt{\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{\mu}} = \frac{4}{9}$$

于是(13)、(12)成立.

解法二　不妨设 $S_{ABC} = 1$. 取 BC 的中点 D，连 DB_1，DC_1，AD（图 6），则 G 在 AD 上，

$$S_{BB_1GC_1} + S_{CC_1GB_1} = 2S_{GB_1C_1} + S_{BB_1C_1} + S_{CB_1C_1}$$

$$= 2S_{GB_1C_1} + 2S_{BCB_1C_1} - S_{BCB_1} - S_{BCC_1}$$

$$= 2(S_{GB_1C_1} + S_{BCdB_1C_1} - S_{DBB_1} - S_{DCC_1})$$

$$= 2(S_{GB_1C_1} + S_{DC_1B_1}) = 2S_{DC_1GB_1}$$

$$= 2(S_{GB_1D} + S_{GC_1D}) = S_{AB_1G} + S_{AGC_1}$$

$$= \frac{\lambda}{3} + \frac{\mu}{3}$$

这里$\lambda=\dfrac{AB_1}{AB}$，$\mu=\dfrac{AC_1}{AC}$.

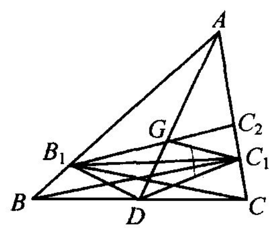


图 6

设B_1G的延长线交AC于C_2，$\dfrac{AC_2}{AC}=\mu'$，则由例 2，

$$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu'}=3$$

而$\mu\geqslant\mu'$，所以$\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}\leqslant\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu'}=3$，

$$\frac{\lambda}{3}+\frac{\mu}{3}\geqslant\frac{1}{9}(\lambda+\mu)\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}\right)\geqslant\frac{4}{9}$$

两种解法都多次将同一块面积用不同的形式表出.

【例 4】 $\triangle XYZ$是$\triangle ABC$的内接三角形：X,Y,Z分别在边BC,CA,AB上. 如果$\angle ZXY$、$\angle XYZ$、$\angle YZX$分别与$\angle A,\angle B,\angle C$相等，试确定$X,Y,Z$的位置，使$\triangle XYZ$的面积为最小.

解 当X,Y,Z为三边中点时，$\triangle XYZ$与$\triangle ABC$的角对应相等. 我们猜测这时$\triangle XYZ$的面积达到最小值.

证明的第一个关键是注意$\triangle XYZ$，$\triangle AYZ$，$\triangle BXZ$，

$\triangle CXY$ 的外接圆相等. 这可以由 A,X 对线段 YZ 所张的角相等(或正弦定理)立即得出.

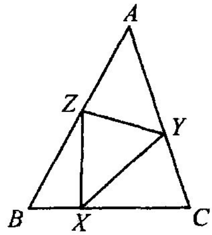


图 7

第二个关键是注意 BC 有两种算法：设$\triangle ABC$ 的外接圆半径为 1，$\triangle XYZ$ 的外接圆半径为 r，则一方面，在$\triangle ABC$ 中，由正弦定理

$$BC=2\sin A \tag{14}$$

另一方面，与(3)类似，

$$BC=BX+XC \tag{15}$$

容易知道

$$\angle BZX+\angle XYC=\angle BAC+\angle YXZ=2\angle A$$

(例如连 AX，利用 $\angle BZX=\angle ZAX+\angle ZXA$，$\angle XYC=\angle XAY+\angle AXY$ 即得). 我们设

$$\angle BZX=\angle A-\alpha,\quad \angle XYC=\angle A+\alpha$$

则与(14)类似，

$$BX=2Y\sin(A-\alpha),\quad XC=2r\sin(A+\alpha) \tag{16}$$

将(14)、(16)代入(15)得

$$2\sin A=2r\sin(A-\alpha)+2r\sin(A+\alpha)=4r\sin A\cos\alpha$$

从而

$$r=\frac{1}{2\cos\alpha}\geqslant\frac{1}{2}$$

最小值 $r=\dfrac{1}{2}$ 在 $\alpha=0$ 时达到. 易知这一条件等价于 X,Y,Z 为三边的中点.

下面举几个立体几何中的例子.

【例 5】 圆锥的母线为 l,侧面的展开图是一个圆心角为 α 的扇形. 求圆锥的底面半径 r.

解 这是一个很容易的问题. 一方面,展开图中扇形的弧长为 $l\alpha$. 另一方面,这弧长就是圆锥底面的周长 $2\pi r$. 因此,

$$l\alpha=2\pi r$$

$$r=\frac{\alpha l}{2\pi}$$

【例 6】 四面体 $ABCD$ 的每一组对棱的和都不超过 1. 证明它的四个面中,至少有一个的内切圆半径不超过$\frac{\sqrt{3}}{12}$.

解 首先证明对于三角形,恒有

$$r\leqslant\frac{s}{3\sqrt{3}} \tag{17}$$

这里 r 为内切圆半径,s 为半周长. 为了证明(17),考虑面积的两种表示方法得

$$rs=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

这里 a,b,c 为边长. 于是

$$r=\frac{1}{\sqrt{s}}\cdot\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{s}}\sqrt{\left(\frac{s-a+s-b+s-c}{3}\right)^3}=\frac{s}{3\sqrt{3}}$$

设四面体 $ABCD$ 的四个面的内切圆半径分别为 r_1,r_2,r_3,r_4,半周长分别为 s_1,s_2,s_3,s_4. 则

$$\begin{aligned}2(s_1+s_2+s_3+s_4)&=2(AB+BC+CA+AD+BD+CD)\\&\leqslant2\times3\end{aligned}$$

即

$$s_1+s_2+s_3+s_4\leqslant 3 \tag{18}$$

由(17)、(18)，

$$r_1+r_2+r_3+r_4\leqslant\frac{1}{3\sqrt{3}}(s_1+s_2+s_3+s_4)=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

从而 r_1,r_2,r_3,r_4 中至少有一个不超过

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{12}$$

最后一步利用了计数论证(第 6 节).

下例需要利用凸多面体的欧拉公式

$$v-e+f=2 \tag{19}$$

其中 v,e,f 分别为多面体的顶点、棱、面的个数.

【例 7】 设凸多面体的顶点 $A_i(1\leqslant i\leqslant v)$处的面角之和为 α_i，则 $2\pi-\alpha_i$ 称为 A_i 处的角亏. 证明凸多面体各个顶点处的角亏的总和为 4π.

解 熟知在平面几何中凸多边形的外角和为 4π. 因此，要证明的结论可以看成是外角和定理在三维空间中的推广，它是笛卡尔首先发现的.

和 $\sum\alpha_i$ 可以用另一种方法计算：先求出各个面的面角之和，然后再求这些和的和.

设多面体有 f_3 个面为三角形，f_4 个面为四边形，…….则由于凸 K 边形的内角和为$(K-2)\pi$，我们有

$$\begin{aligned}\sum\alpha_i&=\sum(K-2)\pi f_K\\&=\pi\sum Kf_K-2\pi f\end{aligned} \tag{20}$$

其中 $f=\sum f_K$ 是多面体的面数.

注意 $\sum Kf_K$ 是各个面的边数的总和，也就是多面体棱数 e 的 2 倍(每条棱属于两个面)，所以角亏的和

$$\begin{aligned}\sum(2\pi-\alpha_i)&=2\pi v-\sum\alpha_i\\&=2\pi v-\pi\sum Kf_K-2\pi f\\&=2\pi(v-e+f)=4\pi\end{aligned}$$

2 图的启发

图形可以给我们很多启发.本节举一些与自然数有关的例子.

一个图,可以横看,可以竖看.各种不同的看法结合起来便可导出有用的公式或所需的证明.

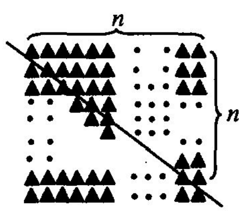


图 8

【例 1】 图 8 中共有 $n(n+1)$ 个▲,对角线上方占总数的一半.于是

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2} \qquad (1)$$

这就是传说中高斯童年时导出的公式.它是算两次(用两种方法计算右上方的▲的个数)的产物.

我们称 $1+2+\cdots+n$ 为三角(形)数,并记为 t_n.(1)即

$$t_n=\frac{n(n+1)}{2} \qquad (2)$$

【例 2】 在上图中去掉最后一行,所得的图表明

$$n^2=t_n+t_{n-1} \qquad (3)$$

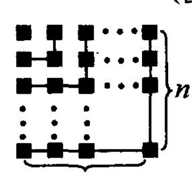


图 9

【例 3】 图 9 中正方形的个数为 n^2.如果先计算每个曲尺形“!!!”上的正方形的个数,然后再求总数,两种算法导出公式

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2 \tag{4}$$

【例 4】 正 k 边形点阵中点的个数称为 k 角数. 4 角数就是平方数. 记第 n 个 6 角数为 h_n，则图 10 表明

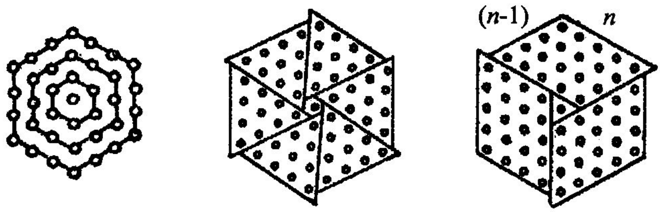


图 10

$$h_n=6t_{n-1}+1=3n(n-1)+1 \tag{5}$$

【例 5】 证明

$$h_1+h_2+\cdots+h_n=n^3 \tag{6}$$

解 将每边由 n 个点组成的立方体点阵"剥去"下、左、后三个"表面"，得到一个每边由 $n-1$ 个点组成的立方体点阵. 这三个面共有点 $3n(n-1)+1$（见图 11 自明）. 由(5)，这就是 h_n. 由此易知(6)式成立.

例 5 不借助图形也不难证明（只需利用(5)及 $n^3-(n-1)^3=3n(n-1)+1$）. 但下面的一些问题则以利用图形为好.

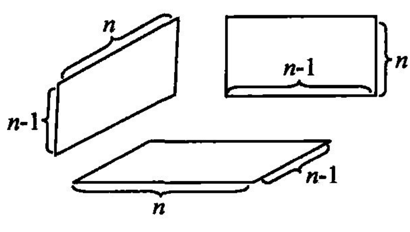


图 11

【例 6】 d_K 表示某城市中住人不少于 K 名的房子数（显然 $d_1\geqslant d_2\geqslant d_3\geqslant\cdots$），$c_K$ 表示该市中住人数为第 K 位（依从大到小排列）的那种房子