JINPAI

南师大教辅·一课一练丛书

第一推荐 第一选择

金牌 MO KUAI JIAO YU LIAN

# 模块教与练

## 高中数学【选修2-2】

苏教版

本书编写组 组编

南京师范大学出版社

金牌 MO KUAI JIAO YU LIAN

# 模块教与练

## 高中数学【选修2-2】

苏教版

本书编写组　组编

南京师范大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

模块教与练·高中数学·选修 2-2(苏教版)/本书编写组组编.—南京:南京师范大学出版社,2009.8

ISBN 978-7-81101-887-5/G·1317

Ⅰ.模… Ⅱ.本… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 153436 号

| | |
|---|---|
| 书　　名 | 模块教与练·高中数学·选修 2-2(苏教版) |
| 组　　编 | 本书编写组 |
| 责任编辑 | 王　娟　王书贞 |
| 出版发行 | 南京师范大学出版社 |
| 地　　址 | 江苏省南京市宁海路 122 号(邮编:210097) |
| 电　　话 | (025)83598077(传真)　83598412(营销部)　83598297(邮购部) |
| 网　　址 | http://press.njnu.edu.cn |
| E－mail | nspzbb@njnu.edu.cn |
| 印　　刷 | 盐城市华光印刷厂 |
| 开　　本 | 850×1168　1/16 |
| 印　　张 | 5.25 |
| 字　　数 | 175 千 |
| 版　　次 | 2009 年 10 月第 1 版　2009 年 10 月第 1 次印刷 |
| 书　　号 | ISBN 978-7-81101-887-5/G·1317 |
| 定　　价 | 11.00 元 |

# 目录

CONTENTS

# 第 1 章　导数及其应用

## 1.1　导数的概念

### 1.1.1　平均变化率

理解平均变化率的概念，体会变化率的广泛应用性.

**新课导航**

**要点 1**　函数的平均变化率定义.

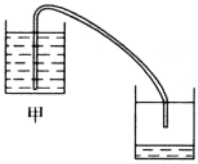
一般地，已知函数 $y=f(x)$，$x_0$，$x_1$ 是定义域内不同的两点，记

$\Delta x=x_1-x_0$，

$\Delta y=y_1-y_0=f(x_1)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，

则当 $\Delta x\neq 0$ 时，商 $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$，就称作函数 $y=f(x)$ 在区间 $[x_0,x_0+\Delta x]$ 的平均变化率.

**例 1**　水经过虹吸管从容器甲流向容器乙，$t$ s 后容器甲中水的体积 $V(t)=5e^{-0.1t}$（单位：$cm^3$），试计算第一个 10 s 内 $V$ 的平均变化率.




**【归纳】**(1)依据平均变化率定义，先求出 $\Delta V$，再求 $\Delta t$，得平均变化率 $=\dfrac{\Delta V}{\Delta t}$.

(2)平均变化率反映的是在某个范围内的变化趋势.

**要点 2**　求函数 $y=f(x)$ 在区间 $[x_1,x_2]$ 的平均变化率的步骤：

(1)求函数值的增量 $\Delta y=f(x_2)-f(x_1)$.

(2)计算平均变化率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

**例 2**　已知函数 $f(x)=2x+1$，$g(x)=-2x$，分别计算在下列区间上 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的平均变化率.

(1)$[-3,-1]$；

(2)$[0,5]$.

**【归纳】**(1)要求平均变化率，首先求出 $\Delta y$ 与 $\Delta x$，再根据平均变化率公式求出平均变化率.

(2)一般地，一次函数 $y=kx+b$ 在区间 $[m,n]$ 上的平均变化率可证明是 $k$.

**例 3**　甲用 5 年时间挣到 10 万元，乙用 5 个月时间挣到 2 万元，如何比较和评价甲、乙两人的经营效果？

**【归纳】**(1)平均收益大的经营效果肯定较好，因此只要利用平均变化率公式分别求出甲、乙两人的平均收益.

(2)平均变化率是曲线陡峭程度的“数量化”，或者说曲线陡峭程度是平均变化率的“可视化”.

## 课内训练

**1.** 如果质点 $M$ 按规律 $s=2t^2-2$ 运动，则在一小段时间 $[2,2+\Delta t]$ 中相应的平均变化率等于______.

**2.** 在曲线 $y=x^2+x$ 上取点 $P(1,2)$ 及临近点 $Q(1+\Delta x,2+\Delta y)$，则 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 等于______.

**3.** (1)线性函数 $y=2x+6$ 从 1 到 2 的平均变化率为______.

(2)线性函数 $y=ax+b$ 从 1 到 2 的平均变化率为______.

**4.** 若一质点 $M$ 按规律 $8+t^2$ 运动，则在一小段时间 $[2,2.1]$ 中相应的平均速度为______.

**5.** 若物体位移公式为 $s=s(t)$，从 $t_0$ 到 $t_0+\Delta t$ 这段时间内，下列说法中错误的是______.

①$\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0)$ 叫物体的位移；

②$\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0)$ 叫位置改变量；

③$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$ 叫这段时间内物体的平均速度；

④$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ 一定与 $\Delta t$ 无关.

**6.** 求函数 $y=x^3$ 在 $[x_0,x_0+\Delta x]$ 上的平均变化率.

# 1.1.2　瞬时变化率——导数

了解导数概念的某些实际背景（如光滑曲线的切线斜率，物体运动的瞬时速度等）；掌握函数在一点处的导数定义和导数的几何意义；体会建立数学模型刻画客观世界的“数学化”的过程，同时对变量数学的思想方法有新的感悟.

## 新课导航

**要点 1**　求曲线 $C: y=f(x)$ 上某一点 $P(x_0,f(x_0))$ 处切线斜率的方法.

设 $P(x_0,f(x_0))$，$Q(x_0+\Delta x,f(x_0+\Delta x))$ 是曲线上的两点，$P$ 是定点，$Q$ 是动点，则割线 $PQ$ 的斜率：

$$k_{PQ}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

当 $\Delta x$ 无限趋近于 0 时，$k_{PQ}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 无限趋近于 $P$ 点处切线的斜率.

**例 1**　过曲线 $y=x^2$ 上两点 $A(2,4)$ 和 $B(2+\Delta x,4+\Delta y)$ 作割线 $AB$，分别求出当 $\Delta x=1$ 及 $\Delta x=0.1$ 时割线 $AB$ 的斜率，并求出曲线在点 $A$ 处的切线斜率.

**【归纳】按斜率公式求出割线 $AB$ 的斜率，当 $\Delta x$ 无限趋近于 0 时，割线 $AB$ 趋近于点 $A$ 处的切线，此时割线 $AB$ 的斜率即为曲线 $y=x^2$ 在点 $A$ 处切线的斜率.**

**例 2**　在抛物线 $y=x^2$ 上过哪一点的切线平行于直线 $y=4x-5$？

**要点 2**　平均速度：设物体的运动规律 $s=s(t)$，则物体在 $t$ 到 $t+\Delta t$ 这段时间内的平均速度为

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}.$$

瞬时速度：如果 $\Delta t$ 无限趋近于 0 时，平均速度无限趋近于某一常数，此常数即为物体在时刻 $t$ 的瞬时速度.

瞬时加速度：设物体作加速运动，速度变化规律为 $v=v(t)$，则物体在 $t$ 到 $t+\Delta t$ 这段时间内平均加速度 $\overline{a}=\dfrac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}$，当 $\Delta t$ 无限趋近于 0 时，$\overline{a}$ 无限趋近于某一常数，此常数即为物体在时刻 $t$ 的瞬时加速度.

**例 3**　质点 $M$ 按规律 $s=2t^2+3t$ 作直线运动（$s$ 的单位：cm，$t$ 的单位：s）.

(1) 设 $t_0$、$\Delta t$ 已给定，求相应的 $\Delta s$、$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ 和当 $\Delta t$ 无限趋近于 0 时，$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ 趋近于什么常数，并说明它们的物理意义；

(2) 求质点 $M$ 在 $t=2$ s 时的瞬时速度.

**【归纳】**从 $t_0$ 到 $t_0+\Delta t$ 这段时间内，$\Delta s$ 是质点的位移，$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ 是质点的平均速度，当 $\Delta t$ 趋近于 0 时，$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ 是质点在时刻 $t_0$ 的瞬时速度.

**要点 3**　(1) 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $(a,b)$ 上有定义，$x_0\in(a,b)$，当 $\Delta x$ 无限趋近于 0 时，比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 无限趋近于一个常数 $A$，则称 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可导，并称此常数 $A$ 为函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的导数，记作 $f'(x_0)$.

(2) 导函数 $f'(x_0)$ 的几何意义就是曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率.

**例 4**　已知 $f(x)=x^2+2$.

(1) 求 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的导数；

(2) 求 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的导数.

**要点 4**　若 $f(x)$ 对于区间 $(a,b)$ 内任一点都可导，则 $f(x)$ 在各点的导数也随着自变量 $x$ 的变化而变化，因而也是变量的函数，该函数称为 $f(x)$ 的导函数，记作 $f'(x)$.

**例 5**　已知函数 $f(x)=x^3-2x$，根据导数的定义，求：

(1) $f'(x)$；

(2) $f(x)$ 在 $x=2$ 处的导数.

**【归纳】**利用定义求导数关键是掌握一般方法.

(1) 求函数的改变量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$；

(2) 求平均变化率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$；

(3) 当 $\Delta x$ 无限趋近于 0 时，求 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 无限趋近于哪一常数.

记忆为："一差（作差）；二化（化简）；三趋近（即令 $\Delta x\to 0$）."

## 课内训练

**1.** 过曲线 $y=\dfrac{1}{2}x^2+1$ 上的点 (2,3) 的切线的斜率为______.

**2.** 如果某物体作 $s=2(1-t)^2$ 的直线运动，则其在 $t=1.2$ 秒时的瞬时速度为______.

**3.** 一质点作直线运动，假设 $t$ s 时的速度为 $v(t)=2t^2+1$，则此质点在 $t_0=2$ s 时的瞬时加速度为______.

**4.** 曲线 $f(x)=2x-x^3$ 在点 (1,1) 处的切线方程是______________.

**5.** 函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $x=2$ 处的导数是______.

**6.** 根据导数的定义，求 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 的导数.

# 1.2　导数的运算

## 1.2.1　常见函数的导数

了解用导数定义求导的流程图；初步掌握基本导数公式，会求某些简单函数的导数；初步掌握创设条件，灵活运用基本导数公式解决综合问题.

### 新课导航

**要点 1**　基本初等函数的导数公式：

$C'=0$($C$ 为常数)；

$(x^n)'=nx^{n-1}, n\in \mathbf{N}^*$；

$(a^x)'=a^x\ln a$；$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a \mathrm{e}=\frac{1}{x\ln a}$；

$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$；$(\ln x)'=\frac{1}{x}$；

$(\sin x)'=\cos x$；$(\cos x)'=-\sin x$.

**例 1**　求下列函数的导数：

(1)$y=x^{12}$；

(2)$y=\frac{1}{x^4}$；

(3)$y=\sqrt[5]{x^3}$.

**【归纳】**(1)根据所给问题的特征，恰当地选择求导公式，将题中函数的结构进行调整，函数 $y=\frac{1}{x^4}$ 和 $y=\sqrt[5]{x^3}$ 分别改写成 $y=x^{-4}$ 和 $y=x^{\frac{3}{5}}$ 的形式. 这样，在形式上它们都满足幂函数的结构特征，可以直接应用幂函数的导数公式求导.

(2)对于简单函数的求导问题，关键是合理转化函数关系式，创设使用公式的条件，灵活运用基本导数公式，掌握运算、化简的基本方法，提高变换能力.

**例 2**　下列结论中正确的有______个.

(1)$(\cos x)'=\sin x$；

(2)$(\sin \frac{\pi}{3})'=\cos \frac{\pi}{3}$；

(3)若 $f(x)=\frac{1}{x^2}$，则 $f'(3)=-\frac{2}{27}$；

(4)$(\frac{1}{\sqrt{x}})'=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$.

**【归纳】**化简后可转化成基本初等函数的函数，一般可以不用定义法求导，而直接用基本初等函数求导公式解决.

**要点 2**　对基本初等函数的导数公式，要准确理解公式的内容，并能用公式解决有关问题.

**例 3**　求过曲线 $y=\cos x$ 上的点 $P(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2})$ 且与过这点的切线垂直的直线方程.

**【归纳】**要求与切线垂直的直线方程，关键是确定切线的斜率，光滑曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处切线的斜率 $k=f'(x_0)$.

**例 4**　求过曲线 $y=x^2$ 上哪一点的切线，

(1)垂直于直线 $2x-6y+5=0$；

(2)与 $x$ 轴成 $135°$ 的倾斜角.

**【归纳】**注意导数的几何意义.

### 课内训练

1. $y=\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt{x}$的导数 $y'=$______.

2. $y=x^3$ 在点 $P(2,8)$处的切线方程是______________.

3. 若对任意 $x\in\mathbf{R}$, $f'(x)=4x^3$ 且 $f(1)=-1$，则 $f(x)=$______.

4. 曲线 $y=\sin x$ 在点 $P(\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2})$处的切线斜率是______.

5. 一质点运动方程为 $s=\frac{1}{t^4}$，则质点在 $t=2$ 时的瞬时速度是______.

6. $y=\sqrt[4]{x^3}$在 $Q(16,8)$处切线的斜率是______.

7. 直线 $y=\frac{1}{2}x+3$ 能作为函数 $y=f(x)$的图象的切线吗？若能，请求出切点坐标；若不能，请说明理由.

(1) $f(x)=\frac{1}{x}$;

(2) $f(x)=-\frac{1}{x}$;

(3) $f(x)=\sin x$;

(4) $f(x)=e^x$.

## 1.2.2　函数的和、差、积、商的导数

初步掌握两个函数和、差、积、商的求导法则；能根据常见基本初等函数的导数公式及两个函数四则运算的求导法则，求简单初等函数的导数.

### 新课导航

**要点 1**　函数和、差、积、商的求导法则：

$[f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x)$;

$[f(x)-g(x)]'=f'(x)-g'(x)$;

$[C\cdot f(x)]'=C\cdot f'(x)$($C$ 为常数);

$[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$;

$[\frac{f(x)}{g(x)}]'=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}(g(x)\neq 0)$.

**例 1**　求下列函数的导数.

(1) $f(x)=x^2+\sin x$;

(2) $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$.

**【归纳】**函数和、差、积、商的求导过程中，要正确运用可导函数的求导法则，一般应分析函数 $y=f(x)$的结构和特征，将问题等价转化为基本函数的导数，实现由未知转化为已知，再选择恰当的求导法则和导数公式进行求导. 另外要熟记常见函数的导数公式.

**例 2**　求下列函数的导数.

(1) $y=\frac{\sqrt{x^5}+\sqrt{x^7}+\sqrt{x^9}}{\sqrt{x}}$;

(2) $y=\sin^4\frac{x}{4}+\cos^4\frac{x}{4}$;

(3) $y=\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}+\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$;

(4) $y=-\sin\frac{x}{2}(1-2\cos^2\frac{x}{4})$.

**【归纳】**对于函数求导，一般要遵循先化简，再求导的基本原则. 求导时，不但要重视求导法则的应用，而且要特别注意求导法则对求导的制约作用. 在实施化简时，首先必须注意变换的等价性，避免不必要的运算失误.

**要点 2** 导数的综合运用.

**例 3** 设 $f(x)=2x^3+3x-\ln x$，求 $f'(x)$、$f'(2)$、$(f(2))'$.

**【归纳】** 符号 $f'(x)$ 是指函数在任一点 $x$ 的导函数(简称导数)；函数 $f'(2)$ 是指函数 $f(x)$ 在点 $x=2$ 处的导数. 它们之间的关系是导函数 $f'(x)$ 在 $x=2$ 处的函数值就是 $f'(2)$. 而 $f(2)$ 是个常数，故其导数为 0.

**例 4** 设 $y=f(x)$ 是二次函数，方程 $f(x)=0$ 有两个相等的实根，且 $f'(x)=2x+2$，求 $y=f(x)$ 的表达式.

## 课内训练

**1.** 函数 $y=(2x-1)^2$ 的导数为______.

**2.** 若 $f(x)=\ln x^5+e^{5x}$，则 $f'(x)$ 等于______.

**3.** 已知某物体的运动方程是 $s=t+\frac{1}{9}t^3$，则当 $t=3$ 时的瞬时速度是______.

**4.** $y=2x^3+\sqrt[3]{x}+\cos x$，则 $y'$ 等于______.

**5.** 已知函数 $f(x)=\frac{x^2}{\sin x}$，则 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 等于______.

**6.** 求下列函数的导数.

(1) $f(x)=\frac{(x-2)^2}{x+1}$；

(2) $f(x)=(x^2+9)\cdot\left(x-\frac{3}{x}\right)$；

(3) $f(x)=\frac{e^x}{x}$；

(4) $f(x)=x\ln x$.

# 1.2.3 简单复合函数的导数

初步掌握复合函数求导法则；会利用复合函数求导法则对一些简单的复合函数进行求导.

## 新课导航

**要点 1** 若 $y=f(u)$，$u=ax+b$，则有 $y_x=y'_u\cdot u'_x$，即 $y'_x=y'_u\cdot a$.

**例 1** (1) 设函数 $f(x)=(1-2x^3)^{10}$，则 $f'(1)=$______.

(2) 函数 $y=\frac{1}{(3x-1)^2}$ 的导数是______.

**【归纳】** (1) 由复合函数的定义可知，中间变量的选择应以基本初等函数为标准.

(2) 正确分清复合函数是由哪些简单函数复合而成，然后利用基本函数求导公式和复合函数求导法则进行求导，求导过程中必须每层必求，不可遗漏.

**例 2** 求下列函数的导数.

(1) $y=\cos(1-2x)$；

(2) $y=\left(2x^3-x+\frac{1}{x}\right)^4$.

**【归纳】** 求复合函数的导数，一般是运用复合函数的求导法则，将问题转化为基本函数的导数解决.

(1) 分析清楚复合函数的复合关系是由哪些基本函数复合而成，适当选定中间变量.

(2) 分析计算中的每一步都要明确是对哪个变量求导，而其中特别要注意的是中间变量的系数.

(3) 根据基本的函数的导数公式及导数的运算法则，求出各函数的导数，并把中间变量转换成自变量的函数.

**要点 2**　导数的综合应用.

**例 3**　求曲线 $y=\sqrt[3]{3x^2+1}$ 在点$(1,\sqrt[3]{4})$处的切线方程.

**【归纳】关键是求导不能出错,求出在该点处的导数,也就是在该点处的斜率,再由点斜式求解.**

### 课内训练

**1.** $y=\sin^2 3x+5\cos x^2$ 的导数是______.

**2.** 下列结论中正确的是______.

(1) $y=\sin 2x$, $y'=\cos 2x$;

(2) $y=\sin x^2$, $y'=2x\cos x^2$;

(3) $y=\cos x^2$, $y'=2x\cos x^2$;

(4) $y=\cos \frac{1}{x}$, $y'=-\frac{1}{x}\sin \frac{1}{x}$.

**3.** 设 $y=\sin^2(2x+\frac{\pi}{3})$,则 $y'=$______.

**4.** 设 $y=\sqrt{1+a}+\sqrt{1-x}$,那么 $y'=$______.

**5.** $y=(2x+a)^2$ 且 $y'|_{x=2}=20$,则 $a=$______.

**6.** 若曲线 $y=\frac{1}{(x^2-ax)^2}$ 在点 $M(2,\frac{1}{4})$ 处切线的斜率为 $\frac{1}{4}$,则 $a=$______.

**7.** 曲线 $y=e^x$ 在 $x=0$ 处的切线方程为________________.

**8.** 设 $f(x)=(2x+5)^3(3x-1)^4$,求 $f'(x)$.

**9.** 求下列函数的导数.

(1) $f(x)=\frac{(x-2)^2}{x+1}$;

(2) $f(x)=\ln(5x+1)$.

# 1.3　导数在研究函数中的应用

## 1.3.1　单调性

进一步理解函数单调性的概念,了解可导函数的单调性与其导数的关系;初步掌握利用可导函数确定可导函数单调区间的方法,并能灵活运用导数判断函数的单调区间和单调性.

### 新课导航

**要点 1**　可导函数在某个区间内的单调性:

设函数 $y=f(x)$,如果在某区间上 $f'(x)>0$,那么 $f(x)$为该区间上的单调增函数;如果 $f'(x)<0$,那么 $f(x)$为该区间上的单调减函数.

**例 1**　试判断函数 $y=\sin x-x$ 在$(0,\pi)$内是否单调.

**【归纳】**(1)利用导数研究函数的单调性,一般应先确定函数的定义域,再求导数 $f'(x)$,通过判断函数定义域被导数为零的点所划分的各区间内 $f'(x)$的符号,来确定函数 $f'(x)$在该区间上的单调性.

(2)要使函数单调,则 $f'(x)$只大于 0 或只小于 0,若 $f'(x)>0$,则函数为增函数,若 $f'(x)<0$,则函数为减函数.

**例 2**　讨论函数 $f(x)=\frac{bx}{x^2-1}(-1<x<1,b\neq 0)$的单调性.

**【归纳】**当给定函数含有字母参数时,分类讨论难以避免,不同的化归方法和运算程序往往使分类方法不同,应注意分类讨论的准确性.

**要点 2**　求函数的单调区间的一般步骤是：

(1)确定 $f(x)$ 的定义域；

(2)计算导数 $f'(x)$；

(3)求出 $f'(x)=0$ 的根，以及定义域区间内的间断点；

(4)分若干区间，列表考查这若干区间 $f'(x)$ 的符号，进而确定 $f(x)$ 的单调区间.

**例 3**　确定下列函数的单调区间：

(1) $y=x^3-9x^2+24x$；

(2) $y=x-x^3$；

(3) $y=ax^2+bx+c(a>0)$.

**【归纳】**函数单调性的判断是函数导数的重要应用之一，一般情况下由解不等式 $f'(x)>0$，得 $f(x)$ 的增区间；解不等式 $f'(x)<0$，得 $f(x)$ 的减区间，但要注意函数的定义域.

**例 4**　若函数 $f(x)=\ln x-\frac{1}{2}ax^2-2x$ 存在单调递减区间，求实数 $a$ 的取值范围.

**【归纳】**函数 $f(x)$ 存在单调区间，就是不等式 $f'(x)\leqslant 0$ 有实数解，再结合函数的定义域求解.

**要点 3**　利用函数的单调性证明不等式.

**例 5**　已知 $x>1$，求证：$x>\ln(1+x)$.

**【归纳】**构造函数，采用求导的方法，利用函数的单调性证明不等式，是证明不等式的常用方法，它是作差法的一个延伸. 对本题而言，$f(1)>0$ 的证明是一个难点，它是判断大小的重要依据.

## 课内训练

**1.** 在区间 $(a,b)$ 内，$f'(x)>0$ 是 $f(x)$ 在区间 $(a,b)$ 内单调递增的______条件.

**2.** 若函数 $f(x)=ax^3-x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是减函数，则 $a\in$______.

**3.** $f(x)=x\cdot\ln x$ 在 $(0,5)$ 上是在______上为单调减函数，在______上为单调递增函数.

**4.** 能使函数 $y=ax^3+bx^2+cx+d(a>0)$ 为增函数的条件是______________.

**5.** 若函数 $y=-x^3+bx^2+5$ 的一个单调递减区间是 $(2,+\infty)$，则 $b=$______.

**6.** 求下列函数的单调区间.

(1) $y=x-x^3$；

(2) $y=\sin x,x\in[0,2\pi]$.

## 1.3.2　极大值与极小值

了解函数极值的概念，了解可导函数在某点取得极值的条件；掌握利用导数求可导函数极值的方法.

### 新课导航

**要点 1**　可导函数极值的概念.

设函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 附近有定义，如果对 $x_0$ 附近的所有的点，都有 $f(x)<f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大值；如果对 $x_0$ 附近的所有的点，都有 $f(x)>f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极小值.

**例 1**　求下列函数的极值：

(1) $f(x)=x^2-x-2$；

(2) $f(x)=x^2\cdot e^{-x}$.

**【归纳】**列表能直观清楚地表明极值与导数之间的关系.

**要点 2**　判断可导函数极值的基本方法.

设函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 及其附近可导，且 $f'(x_0)=0$.

(1) 如果 $f'(x)$ 的符号在点 $x_0$ 的左右由正变负，则 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的极大值；

(2) 如果 $f'(x)$ 的符号在点 $x_0$ 的左右由负变正，则 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的极小值；

(3) $f'(x)$ 的符号在点 $x_0$ 的左右不变号，则 $f(x_0)$ 不是函数的极值.

**例 2**　求函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+\frac{1}{3}$ 的极值.

**【归纳】**求可导函数极值的基本步骤：

(1) 确定函数的定义域；

(2) 求导数 $f'(x)$；

(3) 求方程 $f'(x)=0$ 的全部实根；

(4) 检查 $f'(x)$ 在方程 $f'(x)=0$ 的根的左右两侧值的符号，完成表格，写出极值.

**要点 3**　可导函数的极值点一定是导数为零的点，但函数的导数为零的点，不一定是函数的极值点，因此导数为零的点仅是该点为极值点的必要条件，其充分条件是这点的两侧的导数异号.

**例 3**　设 $x=1,x=2$ 是函数 $f(x)=a\ln x+bx^2+x$ 的两个极值点.

(1) 试确定常数 $a,b$ 的值；

(2) 判断 $x=1,x=2$ 是函数 $f(x)$ 的极大值还是极小值，并说明理由.

**【归纳】**$f'(x_0)=0$ 只是可导函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处取得极值的必要条件，而不是充分条件. 例如，$f(x)=x^3$ 函数在原点 $x_0=0$ 处的导数为 0，但 $f(0)=0$ 不是函数 $f(x)=x^3$ 的极值.

**要点 4**　综合应用：利用函数的单调性，极值与导数的关系.

**例 4**　已知函数 $f(x)=x^3-3ax^2+2bx$ 在点 $x=1$ 处有极小值 $-1$，试确定 $a,b$ 的值，并求出 $f(x)$ 的单调区间.

【归纳】函数在极值点处的导数值为 0；

满足 $f'(x)>0$ 的 $x$ 的范围为 $f(x)$ 的增区间；

满足 $f'(x)<0$ 的 $x$ 的范围为 $f(x)$ 的减区间.

## 课内训练

**1.** 下列结论中正确的是______.

(1)如果 $f'(x_0)=0$，则 $f(x_0)$ 为函数 $y=f(x)$ 的一个极值.

(2)如果 $x_0$ 附近的左侧 $f'(x_0)>0$，右侧 $f'(x_0)<0$，那么 $f(x_0)$ 是函数 $y=f(x)$ 的一个极大值.

(3)如果 $x_0$ 附近的左侧 $f'(x_0)>0$，右侧 $f'(x_0)<0$，那么 $f(x_0)$ 是函数 $y=f(x)$ 的一个极小值.

(4)如果 $x_0$ 附近的左侧 $f'(x_0)<0$，右侧 $f'(x_0)>0$，那么 $f(x_0)$ 是函数 $y=f(x)$ 的一个极大值.

**2.** 函数 $y=2+3x-3x^3$ 有极小值______；极大值______.

**3.** 函数 $y=x\cdot e^{-x}$ 的极大值为______.

**4.** 函数 $f(x)=2x^3-3x^2+a$ 的极大值为 6，则 $a$ 等于______.

**5.** 三次函数当 $x=1$ 时有极大值 4，当 $x=3$ 时有极小值 0，且函数图象过原点，则此函数的解析式为______________.

**6.** 已知函数 $f(x)=x^3-3x^2+2$.

(1)写出函数的单调区间；

(2)讨论函数的极大值或极小值，如有，试写出极值；

(3)画出它的大致图象.

# 1.3.3　最大值与最小值

能借助几何直观理解闭区间上连续函数的最大值与最小值概念与性质；初步掌握 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上最值的求法；理解函数的极值与最值的区别与联系.

## 新课导航

**要点 1**　函数最值的概念.

如果函数定义域 $I$ 内存在 $x_0$，使得对任意 $x\in I$ 总有 $f(x)\leqslant f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 为函数在定义域上的最大值；如果总有 $f(x)\geqslant f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 为函数在定义域上的最小值.

**例 1**　求函数 $y=x^5-5x^4+5x^3+1(x\in[-1,2])$ 的最大值与最小值.

【归纳】求函数的最值与求函数的极值相似（但最值与极值不一定相同），先列出表格，再进行判断，从而求出最值.

**要点 2**　可导函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上最值的求法.

求 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最值可以分两步：

(1)求 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 上的极值；

(2)将(1)中求得的极值与 $f(a)$、$f(b)$ 比较，得到 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最值.

**例 2**　求 $f(x)=\frac{1}{4}x^2(x-2)^2+4$ 在 $\mathbf{R}$ 上的最值.

**【归纳】**尽管 $\mathbf{R}$ 是个开区间，但当 $x\to\infty$ 时，显然 $f(x)\to+\infty$，函数无最大值，而最小值只能在区间内的点处取得，因此，使 $f(x)$ 取得最小值的点一定是极值点，讨论函数在区间内的极值情况，即可求得函数的最小值.

**要点 3**　函数最值的运用：利用函数最值的求法.

**例 3**　设 $\frac{2}{3}<a<1$，函数 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}ax^2+b$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 的最大值为 1，最小值为 $-\frac{\sqrt{6}}{2}$，求常数 $a,b$ 的值.

**【归纳】**(1)本题属于逆向探究题型. 解这类问题的基本方法是待定系数法，从逆向思维出发，实现由已知向未知的转化.

(2)依据求函数最值的一般方法列表寻找极值点从而比较极值与函数在端点处的函数值的大小，确定最大值与最小值，建立方程组求出未知量 $a$ 与 $b$.

## 课内训练

**1.** 函数 $y=\frac{x}{e^x}$ 在 $[0,2]$ 上的最大值是______.

**2.** 当 $x=$______时，函数 $f(x)=x+2\cos x$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上取得最大值.

**3.** 下列命题中，真命题是______.

(1)函数的最大值一定不是这个函数的极大值.

(2)函数的极大值可以小于这个函数的极小值.

(3)函数在某一闭区间的极小值就是函数的最小值.

(4)函数在开区间内不存在最大值和最小值.

**4.** 若函数 $f(x)=x^3-ax^2+(2a-3)x$ 在区间 $[1,2]$ 上的最大值是 $f(1)$，最小值是 $f(2)$，则 $a$ 取值范围是______.

**5.** 函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x$ 在区间 $[-4,4]$ 上的最大值是______.

**6.** 设 $0\leqslant x\leqslant a$，求函数 $f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x$ 的最大值和最小值.

# 1.4　导数在实际生活中的应用

通过使利润最大、用料最省、效率最高等优化问题，体会导数在解决实际问题中的作用；通过实际问题的研究，促进学生分析问题、解决问题以及数学建模能力的提高.

## 新课导航

**要点 1**　利用导数解决生活中的优化问题的一般步骤：

(1)分析实际问题中各个量之间的关系，建立实际问题的数学模型，写出实际问题中变量间的函数关系式 $y=f(x)$，根据实际问题确定定义域；

(2)求函数 $y=f(x)$ 的导数 $f'(x)$，解方程 $f'(x)=0$，得出定义域内的实根，确定极值点；

(3)比较函数在区间端点和极值点的函数值的大小，获得所求函数的最大(小)值；

(4)还原到原实际问题中作答.

**例 1**　(面积、容积最大问题)

用总长 11 m 的钢条制作一个长方体容器的框架. 底面矩形一边比另一边长 1 m，求这个容器的最大容积及容积最大时的高.

【归纳】长方体的容积是所求最值的"目标函数". 选择框架底面矩形的一边长作为自变量，注意自变量 $x$ 的许可范围，写出这个"目标函数"的解析式再求其最大值.

**例 2**　(费用最省问题)

统计表明，某种型号的汽车在匀速行驶中每小时的耗油量 $y$(L)关于行驶速度 $x$(km/h)的函数解析式可以表示为：

$$y=\frac{1}{128\ 000}x^3-\frac{3}{80}x+8(0<x\leqslant 120).$$

已知甲、乙两地相距 100 km.

(1)当汽车以 40 km/h 的速度匀速行驶时，从甲地到乙地要耗油多少升？

(2)当汽车以多大的速度匀速行驶时，从甲地到乙地耗油最少？最少为多少升？

**例 3**　(用料最省问题)

挖一条隧道，截面拟建成矩形上方加半圆，如果截面面积为 20 平方米，当宽为多少时，使截面周长最小，而用料最省？

【归纳】用导数解决实际问题，也就是用导数求函数的最值问题，一般先写出目标函数求其极值，极值为一个时也就是最值.