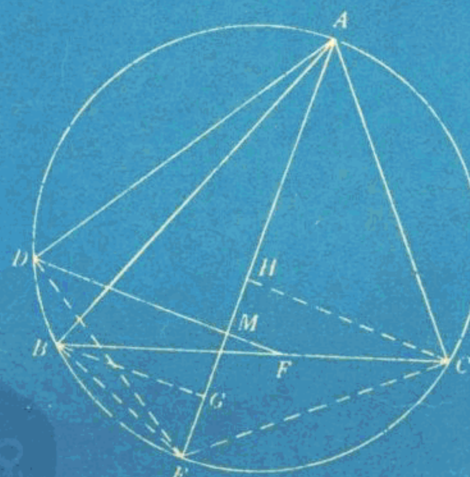
怎样添设辅助线

——平面几何解题技巧



胡琛 编著

河海大学出版社

怎样添设辅助线

——平面几何解题技巧

胡 琛 编著

河海大学出版社

（苏）新登字第013号

责任编辑：陈　菁

怎样添设辅助线

胡　琛　编著

出　　版：河海大学出版社

（南京西康路1号，邮政编码：210024）

发　　行：江苏省新华书店

印　　刷：无锡市毛巷印刷厂

（地　　址：无锡市北门毛巷街　　邮政编码：214173）

开本787×1092毫米　　1/32　　印张9.75　　字数249千

1994年5月第1版　　1994年5月第1次印刷

印数1-10,000册

ISBN7—5630—0720—2

O·49　　定价5.00元

前　　言

初中学生学习平面几何，最大的困惑有两个方面：一是几何命题为什么要进行证明和如何进行证明；二是面对一个难度较大或结构较为复杂的几何证明题或计算题，如何着手添设辅助线。特别是后者，往往通过较长时间的解题实践，仍难以掌握要领。本书试图采用以例说理的手法，通过大量的实例，归纳出一套添设辅助线的科学方法，以期帮助读者学会分析和思考问题，总结并掌握添设辅助线的一般规律，做到“明其原理，得其方法，通其变化”。

本书除向读者介绍有关辅助线的基础知识外，主要的篇幅在于阐述常用辅助线的种类和如何通过添设辅助线变换图形，以寻觅解题途径，并结合实例，启发思维，指点思路，交代方法。为兼顾中学生课外阅读和作为数学竞赛辅导教材的需要，全书除列入了大量基本题外，还选入一些难度较大的例题。基本题、中等题与难题的数量比约为6：3：1。本书的第四章筛选了一部分难度较大的例题，给出其解答，并加以评注，目的在于帮助读者鉴别解题方法的优劣，做到选优汰劣。最后为了便于读者练习和思考，书中还配置了一定数量的习题。

无锡县教育局祁士清局长审阅了本书初稿，提出了许多中肯而有益的指导性意见。无锡县天一中学宋水根校长，堰桥中学尹榴根校长，无锡县教育局教研室吴永华副主任以及蒋国华、童大成、胡[illegible]玮、贾建明诸先生对本书的出版给予

了极大的支持，在此谨向他们致以诚挚的谢意。

限于作者水平，加之成书时间仓促，书中谬误和疏漏难以避免，敬请读者批评指正，本书如能在添设辅助线解几何题方面对读者有所裨益，则将感到无比欣慰。

作者

1993年12月

目　　录

第一章　关于辅助线的基础知识

解几何题，不可避免地要添设辅助线，特别是那些难度较大、要求较高的几何问题，往往离不开添设辅助线。那么，什么是辅助线？为什么要添设辅助线和怎样添设辅助线呢？对于这些和辅助线有关的基础知识是首先应该了解和掌握的，为此，在问题展开之前，我们先把有关辅助线的基础知识向读者扼要地作一介绍。

一　什么是辅助线

辅助线(又名补助线)，顾名思义，是在几何解题中起辅助作用的直线或曲线。大凡几何证明题或计算题，在解题过程中，一般要根据题设作出符合题意的图形，而有些难度较大、曲折较多的几何命题，往往依靠按题设作出的图形还难以解出，这时就要根据需要作出某些辅助图形，这些辅助图形就是通常所说的辅助线，为了和按题设作出的图形相区别，辅助线一般都用虚线表示。

例如要证明“圆内两条相交弦(直径除外)不能互相平分”这一命题，先要作出如图1—1—1所示的图形(实线部分)，图中 O 是圆心，AB、CD 相交于 P，要

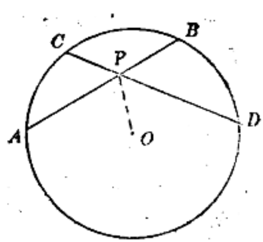


图1—1—1

证明$AP=BP$与$CP=DP$不能同时成立，通常都要添设辅助线。

证法一：∵ AB、CD不是直径，所以点P与O不重合，设$AP=PB$且$CP=PD$，连OP（如图1—1—1），由垂径定理的逆定理知$OP\perp AB$，$OP\perp CD$，即经过P点可以引两条直线AB、CD同时和OP垂直，这将和垂线的基本性质："过一点只能引一条直线和已知直线垂直"相矛盾，∴ $AP=PB$和$CP=PD$不能同时成立，即AB、CD不能互相平分。

证法二：设 $AP=PB$且$CP=PD$，连 AD、DB、BC、CA（图1—1—2），则四边形$ACBD$是平行四边形，

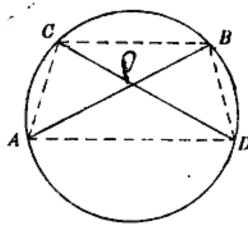


图1—1—2

$$\left.\begin{array}{l}\angle CAD=\angle CBD,\\ \angle CAD+\angle CBD=180°,\end{array}\right\}\Longrightarrow \angle CAD=90°,$$

∴ CD是$\odot O$的直径，同样AB是$\odot O$的直径，与题设AB、CD不是直径相矛盾。

∴ $AP=PB$和$CP=PD$不能同时成立。

图1—1—1中的OP和图1—1—2中的AD、DB、BC、CA都是辅助线。

常见的辅助线有直线、射线、线段、圆或圆弧等，解题时可以根据需要选用其中的一种或几种。

二　为什么要添设辅助线

为什么要添设辅助线？总的来说，是出于解题的需要。

在一般情况下，难度稍大或结构较为复杂的几何题，都需要通过添设辅助线对已知图形进行补充，才能解出结果。为此，有必要对添设辅助线的目的和技巧作一番探讨，具体地说，添设辅助线的目的和作用，大致有以下几个方面：

1．沟通题设和题断，有一些几何命题，已知的条件相当简单，单凭这些已知的条件是无法证出结论的，以通常所说的蝴蝶定理为例，它的题设是在⊙O中有一条弦MN，A是MN的中点，过A任意引两条弦BC、DE，连结CD、BE交MN于P、Q两点（图1—2—1），题断是$AP=AQ$，这一命题的题设和题断，单靠图中已有的一些几何元素是很难用纯几何的办法将它们沟通的，因为几何中用以证明两条线段相等的各种办法，仅仅依靠图中的一组相等线段（$AM=AN$）和几对相等的角（$\angle E=\angle C$，$\angle B=\angle D$还有若干组对顶角）还无法证出。在这种情况下，就有必要在适当的地方添设辅助线。常用的办法是作出图中某些元素的对称图形（例如作E点关于过A点的直径的对称点E'），从而构造出两个全等三角形，这样题设和题断才能得到沟通。又如下面的一个命题：“若PAB为⊙O的割线，P为⊙O外任一点，R是⊙O的半径，求证

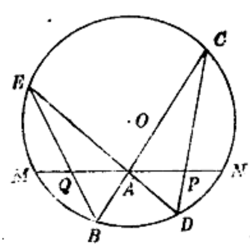


图1—2—1

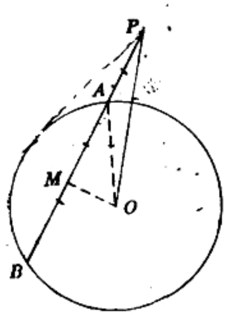


图1—2—2

$PA\cdot PB=PA(PA+2AM)$
$=AP^2+2PA\cdot AM$

$PO^2=PA\cdot PB+R^2$。”和上面的例子一样，如果不添设辅助线，本例的题设和题断也无法沟通，因此需要过P引$\odot O$的切线，利用切线的性质和切割线定理推出结论，或者过圆心O引AB的垂线OM，M是垂足，连结OA(图1—2—2)

由$PA\cdot PB=(PM-MA)(PM+MB)$

$=(PM-MA)(PM+MA)=PM^2-MA^2$

$=PM^2-(OA^2-OM^2)=PM^2+OM^2-OA^2$

$=PO^2-R^2$，移项即得 $PO^2=PA\cdot PB+R^2$。

以上两例说明了添设辅助线的作用之一是可以沟通题设和题断，从而寻找到解题的思路。

2.使分散的元素集中是添设辅助线的另一目的，例如“在正三角形ABC中，P是$\triangle ABC$中任意一点，求证$PA+PB>PC$”(图1—2—3)，由于图中的三条线段PA、PB、PC不是同一个三角形的三条边，无法用三角形三边间的和差关系证明，于是要通过添设辅助线变换图形，使$\triangle ACP'\cong\triangle ABP$，将$PA$、$PB$、$PC$加以集中，使之成为一个三角形的三条边，即图1—2—3中的$\triangle CPP'$的三边，这样不但可以证明$PA+PB>PB$，而且还可以引申出其它结论，例如：$|PA-PB|<PC$，以及如果$BP>PC$，则$\angle APC>\angle APB$

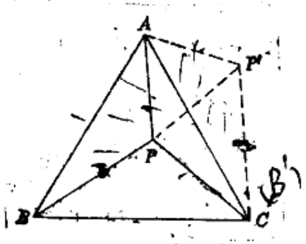


图1—2—3

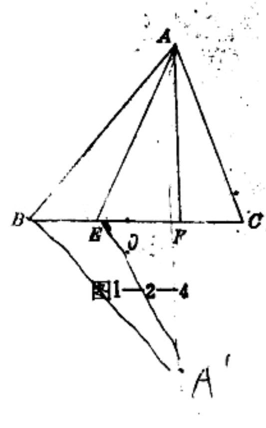


图1—2—4

AB- AC >

等等，再譬如有下面的命题："在$\triangle ABC$的BC边上截取$BE=CF$，连AE、AF（图1—2—4），求证$AB+AC>AE+AF$。"由于AB、AC、AE、AF四条线段的位置分散，难以证出结论。这时可以取BC的中点O，以O为对称中心对$\triangle AOC$作对称变换，设A的对称点为A'，则问题转化为"在$\triangle ABA'$中有一点E，求证$AE+A'E<AB+A'B$"。这样就成为一个读者熟知的命题，它的证法是非常容易掌握的。

3. 添设辅助线可以挖掘题目中的隐含条件，使隐含条件明朗化。读者在解几何题时遇到困难，其原因是多方面的，不善于挖掘隐含条件，则是重要原因之一，而添设辅助线有助于挖掘隐含条件。例如命题"PA、PB切$\odot O$于A、B，过弦AB上任一点C引OC的垂线分别交PA及PB的延长线于D、E（图1—2—5），求证$CD=CE$。"题中隐含着四个角相等，而这些相等的角正是解题的关键，读者如能掌握添辅助线的技巧，连结OA、OB、OD、OE，则由O、A、D、C；O、C、B、E分别共圆，立即可推得$\angle ODC=\angle OAB=\angle OBA=\angle OEC$，从而找到入境的门路。

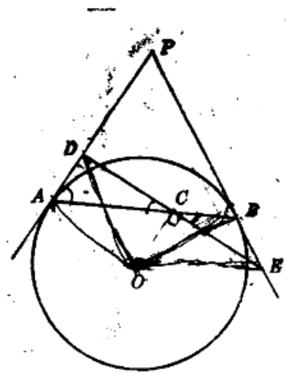


图1—2—5

再看命题"四边形$ABCD$是平行四边形，$AE=CF$，AE与CF相交于G（图1—2—6），求证$\angle ABG=\angle CBG$。"题中隐含着B点到AE和CF两相交直线的距离相等这一条件，而这一条件需要通过连结BE、BF利用等积三角形的关系挖掘出来，类似的例子是不

难枚举的，读者可以在解题实践中去观察研究和体会。

4.作辅助线可以创设使用定理的条件。例如题设中有圆的切线，解题时需要用到切线的性质，但图形中没有经过切点的半径，这时就需要将圆心和切点连结起来。又如在图形的适当位置引平行线是一种常见的添设辅助线的技巧。通过引平行线可以进行图形的很多变换，例如造全等三角形或相似三角形，可以利用全等三角形或相似三角形的性质，证明线段和角的相等，或线段成比例。又可以造等积三角形，利用三角形等积证明有关的命题，还可以造若干条平行线截两条直线，利用平行线截比例线段定理证明线段成比例或线段的乘积相等等。

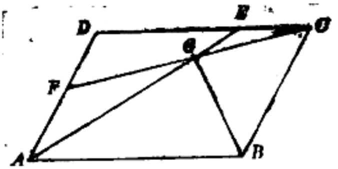


图1—2—6

从以上几个方面足以看出添设辅助线在几何解题中的作用，为了学好平面几何，提高分析问题和解决问题的能力，花费一定的时间对添设辅助线的有关问题潜心研究一下，不是没有价值的。

三　怎样添设辅助线

添设辅助线在几何解题中既然有十分重要的作用，那么应该怎样添设辅助线呢？这是一个更加值得探讨的问题。

办任何事情都要找规律性，作辅助线也不例外。有的读者总感到作辅助线变幻莫测。其实如能在平时做有心人，解题时多加观察思考和归纳总结，就不难逐步掌握添辅助线的规律。

1.从题设入手考虑

认真分析已知条件，往往可以了解添设什么样的辅助线的梗概。例如已知三角形的中线，要证明图中角和线段间的关系，常要将中线作等量延长，已知三角形的角平分线时，常以角平分线所在直线为对称轴作对称变换，题设中有线段中点出现时，要联想起作三角形的中位线，如要证明命题“四边形一组对边中点的连线，不大于另一组对边和的一半。”图中虽然没有三角形的中位线，但可以取四边形的任一对角线的中点，这样将有关中点两两连结，就有两个三角形的中位线出现，命题也就获证。又如已知圆的切线的问题，常用的辅助线有过切点的半径，这样可以运用切线的性质，或在适当地方作另一条切线，以运用切线长定理。当两圆相切时，常可考虑作连心线或公切线。如作连心线，应注意两个圆圆心间的距离等于两圆半径的和（或差）以及连心线经过切点，作公切线时，要注意运用弦切角定理或切线长定理。如果两圆相交，则要作公共弦并运用圆周角定理及其推论或圆内接四边形的性质，此外还有题设中有等腰三角形，要注意作底上的高或顶角的平分线，有等边三角形和正方形时，往往要作旋转变换，对于梯形问题，常用的作辅助线的手法有平移和作高两种，平移又可分为平移一腰或平移一对角线两类，以形成新的三角形，作高的目的是构作直角三角形或利用平行线间的距离相等这一性质解题。

2.从题断入手进行分析

从问题的结论入手进行分析，是探索添设什么样的辅助线的另一个重要角度。例如要证明线段相等，作辅助线的办法就很多，最基本的是造全等三角形或造相似三角形以后作等量代换，也可以证明两线段是同一三角形的两边，而这两

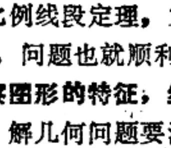
边所对的角相等。要证明一条线段是另外两条线段的和，可以用改折线为线段的方法即直线化法解决，或将作为和的线段分成两段，分别和两条小线段相等。要证明四条线段成比例或两两乘积相等，可以考虑作平行线或逆平行线，以形成相似三角形或利用平行线截比例线段定理。要证明面积相等可作等积变换和平移变换。如果结论是一条线段为另一条线段的½或2倍，常可考虑作三角形的中位线或作直角三角形斜边上的中线等等。

3.将题设和题断联系起来综合考虑

这是掌握添设什么样的辅助线的一个更重要的技巧，它可以使我们在考虑问题时加强针对性，避免盲目性。例如命题："在$\triangle ABC$中，$\angle A=2\angle B$，CD是$\angle ACB$的平分线，求证$BC=AC+AD$"，从题设出发，因为CD是$\angle ACB$的平分线，所以有可能要将$\triangle BCD$以CD所在的直线为轴作对称变换，但从题断出发分析，则可能要将折线化为线段，如将两者联系起来综合考虑，作什么样的辅助线就很明朗。又如命题"已知D为$\triangle ABC$中BC边上任一点，AB为$\odot O$的直径，过D作$DE\perp AB$，交AB于E，延长ED交$\odot O$于G，交AC的延长线于F，求证$EG^2=ED\cdot EF$。"从题设看，有$\odot O$的直径，从题断分析，要构作相似三角形，但EG、ED、EF不是相似三角形的对应边，需要作等量代换，联想起直角三角形中的比例线段定理，立即会发现，应将G点和直径AB的两端连结，问题也就顺利解出了。

4.注意观察图形的特征，结合考虑图形的有关性质

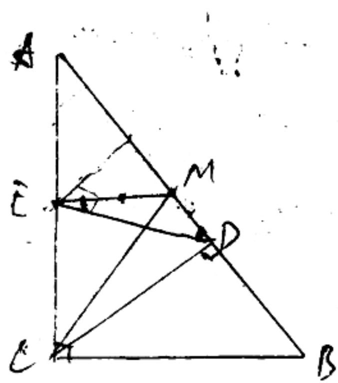
人们常说，解几何问题要注意"看图形，想性质"，这是很有道理的。它往往可以帮助我们悟出作辅助线的方法，例如："在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$，D是垂足，



M是AB的中点，$\angle A=2\angle B$，求证$AC=2DM$。”从图形看，$\triangle ACD$是直角三角形，AC是斜边，联想起它的性质，即AC等于这边上中线的2倍，于是AC边上的中线应和DM相等，设AC的中点为E。问题转化为证明$\triangle DEM$为等腰三角形，应该作什么样的辅助线的问题也就迎刃而解了。

要较熟练地掌握添设辅助线的技巧，除了要有理论指导外，另一个重要方面就是通过解题实践，所谓熟能生巧，题目做多了，如果再对解题的思路和方法多加总结，就一定会转化成娴熟的技巧。

由于几何问题的面貌迥异，题设和题断又千变万化，对如何根据已知条件添设辅助线难以作全面完整的概括，上述各点，只是几项建议，读者如能据之进行认真的思考、研究和实践，相信是能收到预期的效果的。



第二章　常用辅助线简介

几何命题的内容和形式千变万化，条件和结论间的关系千差万别，这些特点决定了几何辅助线的种类繁多，如不掌握一定的方法和顺序去学习和领会，碰到问题往往会盲目乱撞，理不出添辅助线的头绪，甚至连入境的门路也找不到。为了解决这一问题，在本章中我们将常见的辅助线进行粗略的分类，通过大量的实例，阐明一些常见辅助线的用处和用法。并结合实例，说明怎样进行分析和思考，借以启迪思维，指点思路，交代方法。多数例题的后面还附有提炼解题经验的说明，让读者在学习添辅助线的方法以后进行回顾和反思，以便逐步积累经验，培养较为熟练的添设辅助线的技能和技巧，下面分类介绍一些常见的辅助线。

一　连结两点的线段

连结两点的线段（也可引申为过两点的直线）是一种最常见的辅助线，如直线和圆相切时连结切点和圆心，两圆相切时的连心线，两圆相交时的公共弦等等，有时也可以根据需要在其它适当的地方连结两个已知点。

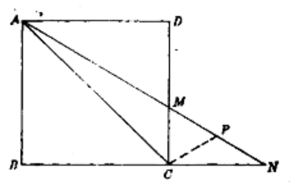


图2—1—1

例1　如图2—1—1，在正方形$ABCD$中，自A作任意直线