# 复变函数与积分变换

林　柯　田桂林　崔尚巍

# 复变函数与积分变换

林　柯　田桂林　崔尚巍

复变函数与积分变换
林　柯　田桂林　崔尚巍
责任编辑　李立鹏
＊
华中理工大学出版社出版发行
（武昌喻家山）
新华书店湖北发行所经销
华中理工大学出版社沔阳印刷厂印刷
＊
开本：787×1092　1/32　印张：11.125　字数：240 000
1992年8月第1版　1994年4月第2次印刷
印数：3 001-6 000
ISBN 7-5609-0699-0/O·94
定价：6.50元
（鄂）新登字第10号

# 内 容 提 要

本书共分两篇八章，第一篇为复变函数，其内容有复变函数与解析函数、复变函数积分、级数、留数、保角映射。第二篇为积分变换，内容有拉普拉斯变换、傅里叶变换，$z$-变换。本书的特点是充分体现专科学校的特色，内容上深入浅出，侧重于工程技术上的应用，在数学要求与实用之间取得了协调，必要的基础知识并未减少，且配备了大量的例题供教学选用。本书是为专科学校的相关专业编写的，但亦可作为工程技术人员学习此课程的自学用书。

# 前　言

本书系根据东北、华中地区教材编写协调委员会数学教材编写组，于1988年4月在华中理工大学出版社的审稿会上确定编写的，它是继线性代数，概率与统计之后，为专科学校使用的工程数学教材。经过沈阳冶金专科、哈尔滨机电专科、吉林电气化专科等学校的部分教师于1990年10月在吉林电气化专科学校讨论定稿。

复变函数与积分变换是当前工科性质的专科学校必修课程。根据专科学校的特点，本教材仍保持前面出版的高等数学、线性代数、概率与统计几门课程的主要优点和风格——文字上叙述较详尽，力求通俗易懂；概念的引入尽可能从实际出发，以便于读者了解它的应用所在；内容包括较广，不追求论证上的严格。在每一章每一节中都配备了一定数量的典型的例题，通过这些例题的示范，启发初学者做到举一反三，提高解题的基本技能，以便帮助学生透彻地弄清基本概念和基本理论。本教材分一、二两篇，第一篇为复变函数共五章，第二篇为积分变换共三章。复变函数的主要内容有复变函数与解析函数、复变函数的积分、级数、留数、保角变换。积分变换的内容有拉普拉斯变换、傅里叶变换、$z$-变换。考虑到各个专业需求不同，复变函数与积分变换之间，拉普拉斯变换与傅里叶变换之间，既有联系又有相互的独立性，可以根据专业的需要进行取舍。其中保角变换供选修用，用＊号标志。$z$-变换是研究离散型采样数据系统的有力工具，编入教材内，供给学生自学之用由（＊＊）号来区别。总学时为50—60之间。

本书第一篇由程敏（第一章），王欣欣（第二、三章），田桂林（第四章），崔尚巍（第五章）编写。第二篇由林柯、李守杰共同编写。全书由林柯任主编，田桂林、崔尚巍任副主编。梁维忠为主审。在这里仅向支持并组织本教材编写的沈恩秀和李守杰两位同志及参与审稿的徐玉清、杜忠复同志表示诚挚的感谢。限于编者水平，缺点和差错之处在所难免，敬请读者批评指正。

编　　者

1990年12月

# 目　　录

## 第一篇　复变函数

# 第二篇　积分变换

# 第一篇　复变函数

复变函数是在复数范围内进行的数学运算，可看作实变函数的微积分在复数域上的推广，它研究的主要内容是解析函数。解析函数的理论是18世纪末到19世纪前半期随着生产和自然科学的发展而发展起来的，今天已成为数学领域中的重要学科。由于解析函数有很好的性质，所以它不仅对纯数学（如代数学、微分方程、解析数论、拓扑学等）有直接推动作用，而且对各种应用学科（如流体力学、热力学、空气动力学、电磁学、天体力学、…）也有很多应用。20世纪以来，复变函数已被广泛应用于理论物理、电子技术、控制理论、弹性理论等方面。

复变函数这一数学学科作为工程数学的组成部分，是工科大专院校相关专业的必修课程，有些概念和运算方法直接关系到后继课程——积分变换。

复变函数的某些概念和理论是在实变函数的基础上发展和推广的，因此有许多和微积分平行的概念，有时几乎是逐字逐句的推广或极为类似，读来感到似曾相识。也正是由于这些熟悉的概念、性质、方法，随着域的变化，不断产生了许多新的性质、新的理论和新的方法。因此，在学习过程中，要善于分析和比较，分清同样的概念在实函和复函中的相异点，了解新概念，新性质，新理论和方法的发生和发展过程，这样一定会使读者受益匪浅。

# 第1章　复变函数与解析函数

本章首先介绍复变函数及其导数．我们可以看到有许多概念形式上与微积分学的一些基本概念有相似之处．在复变函数中，我们最感兴趣的是在大量实际问题中所接触到的带有某种特性的函数——解析函数．读者将会看到解析函数有很好的性质．最后介绍几个常见的初等函数．

## §1.1　复变函数

### 1.1.1　平面点集及其有关概念

复数$z=x+iy$与平面上的点$(x,y)$是一一对应的．这里把表示复数的平面称为**复平面**，记作$Z$．于是复平面上的任一点都表示一个复数．对于模为无穷大的复数$z$，记作$z=\infty$．按照某一个规则选取若干个复数（有限个或无限多个）就组成了一个复数集合，相应地在复平面上就有一个点集合．我们所研究的变量都是复数，因此称为**复变量**．复变量有它自己的变化范围，即它在复平面的某个点集上变化．

**例1**　求满足下列条件的$z$的点集．

（1）$\mathrm{Re}z=\mathrm{Im}z$；　　（2）$\alpha\leqslant\arg z\leqslant\beta$；

（3）$|z-z_0|<R$．

**解**　（1）设$z=x+iy$，则由题意得$x=y$，于是平面上的直线$x-y=0$上的全体点即为所求的点集．

（2）满足$\alpha\leqslant\arg z\leqslant\beta$的点集称为**一闭角域**．夹角边是从原

点出发的两条射线，它们与正实轴的交角分别是$\alpha$与$\beta$。

（3）这是以$z_0(x_0, y_0)$为中心，$R$为半径的圆的内部，即开圆域。

下面介绍有关平面点集的一些基本概念。

1．邻域和开集

在复平面上以$z_0$为中心，$\rho$（任意正数）为半径的圆之内部的点集：$|z-z_0|<\rho$称为点$z_0$的**邻域**。

设$E$为一点集，$z_0$为复平面上的点。若$z_0$的某个邻域包含在$E$内，则称点$z_0$为$E$的**内点**；如果点$z_0$的任意一个邻域，其中既含有属于$E$的点，又含有不属于$E$的点，则称$z_0$为$E$的**界点**，$E$的界点的全体称为$E$的**边界**。

若点$z_0$的任意一个邻域都含有点集$E$的无穷多个点，则称点$z_0$为$E$的**聚点**；属于$E$且不是$E$的聚点的点称为$E$的**孤立点**。

若集合$E$的所有点都是内点，则$E$称为**开集**。

例如，设点集$E$是由圆：$|z|<1$内的所有点组成，$E$中每一点$z$都是$E$的内点，圆周$|z|=1$上的每一点都是$E$的界点，而圆周$|z|=1$就是$E$的边界，易知$|z|<1$是一个有界开集。

2．区域、简单曲线

如果点集$D$具有下列两个性质：

1° $D$的每个点都是内点（开集性）；

2° $D$中任意两点都可以用一条完全属于$D$的折线连接起来（连通性），则称点集$D$为**区域**。简言之，连通的开集称为**区域**。区域$D$加上它的边

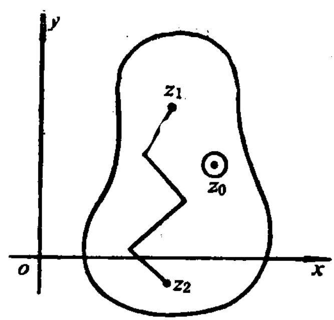


图 1.1-1

界称为**闭域**，记作$\overline{D}$(图1.1-1)。

如果一个区域$D$可以包含在一个以原点为中心的圆内，则称$D$为**有界区域**，否则称为**无界区域**。

例如，$|z|<R$和$|z-z_0|>r$都是区域，它们的边界分别是圆周$|z|=R$和$|z-z_0|=r$；$|z|<R$是有界区域，而$|z-z_0|>r$是无界区域；$|z|\leqslant R$是有界闭区域。

如果$x(t)$和$y(t)$是两个连续的实变函数，则方程

$$z=x(t)+iy(t)=z(t) \qquad (a\leqslant t\leqslant b)$$

在平面上确定了一条连续曲线，这就是平面曲线的复数表示式。若在区间$a\leqslant t\leqslant b$上，有$[x'(t)]^2+[y'(t)]^2\neq 0$，则称曲线为**光滑曲线**，由几段依次相接的光滑曲线所组成的曲线，称为**逐段光滑曲线**。

设有一连续曲线

$$c: \ z=z(t)=x(t)+iy(t) \qquad (a\leqslant t\leqslant b),$$

如果对于$(a,b)$内任意两个不同的点$t_1$及$t_2$，有$z(t_1)\neq z(t_2)$，那么就称连续曲线$c$为**简单曲线**。如果简单曲线$c$的两个端点重合，即$z(a)=z(b)$，则称曲线$c$为**简单闭曲线**。

任一条简单闭曲线$c$可以将平面分为两个区域，其中一个是有界的，称为$c$的**内部**；另一个是无界的，称为$c$的**外部**。

显然，圆就是一条简单闭曲线，它把平面分成两个没有公共点的区域，其中一个有界，另一个无界，且这两个区域的边界是所给的圆周。

**例2** 求证曲线$z=\cos t \quad (0\leqslant t\leqslant \pi)$是简单曲线。

**证** $z=\cos t$是一个连续且单调下降的函数，因此，当$t_1\neq t_2$($0\leqslant t_1\leqslant\pi$，$0\leqslant t_2\leqslant\pi$)时，有$\cos t_1\neq\cos t_2$。故$z=\cos t$是简单曲线。

### 3．单连通域与多连通域

设$D$是一区域，如果$D$内的任何简单闭曲线的内部仍都属于$D$，则称$D$为**单连通域**．（图1.1-2($a$)），不是单连通域的区域，称为**多连通域**（或复连通域），（图1.1-2($b$)）．例如，圆$|z|<R$是一个单连通域，而圆环$0<r<|z|<R$就是多连通域。

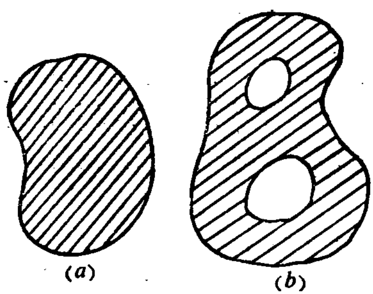

图 1.1-2

**例3** 求满足下列关系式中的$z$的集合，如果是区域，说明是单连通域还是多连通域？

(1) $\mathrm{Im}z=2$； (2) $\mathrm{Re}z>\frac{1}{2}$； (3) $0<|z-i|<1$.

**解** (1) 满足$\mathrm{Im}z=2$的所有点组成的集合为过$2i$点平行于实轴的直线，不是区域。

(2) 满足$\mathrm{Re}z>\frac{1}{2}$的所有点组成的集合是以过$\frac{1}{2}$点平行于虚轴的直线为边界的右半平面（不包括边界），是单连通区域。

(3) 满足$0<|z-i|<1$的所有点组成的集合是以$i$为中心