全国高等林业院校教材

林业机械建模理论

刘毅 沈瑞珍 编著

中国林业出版社

全国高等林业院校教材

林业机械建模理论

刘毅　沈瑞珍　编著

中国林业出版社

图书在版编目（CIP）数据

林业机械建模理论/刘毅，沈瑞珍编著．—北京：中国林业出版社，1999.6

全国高等林业院校教材

ISBN 7-5038-2099-3

Ⅰ．林…　Ⅱ．①刘…　②沈…　Ⅲ．林业机械-建立模型-理论

Ⅳ．S776.02

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 20751 号

中国林业出版社出版

（100009　北京西城区刘海胡同 7 号）

北京地质印刷厂印刷　新华书店北京发行所发行

1999 年 6 月第 1 版　　1999 年 6 月第 1 次印刷

开本：850mm×1168mm 1/32　印张：3.75

字数：87 千字　　印数：1～1000 册

定价：7.00 元

内容提要

本书在机械、力学、数学等知识基础上，介绍了建立机械动力学系统数学模型的理论和方法。全书包括数学模型，林业机械结构模型，机械动力学系统建模方法，林业机械底盘模型，林业机械劳动对象的模型，树捆及其悬挂件模型，模型的实际应用等内容。

该书可作为机械类专业高年级或研究生的教材，也可作为机械研究人员的参考书。

前　言

随着生产实践和科学技术的不断发展，计算机的普及，数学不仅解决自然科学中的问题，而且在社会科学等领域中得到了广泛的应用。

把数学方法应用到任何一个实际问题中去，都需要分析现象中起作用的因素，确定这些因素的参数，用这些参数建立数学表达式，用以描写现象的本质或特征，得出供人们作分析、预测、决策或控制的定量结果。这个过程就是人们通常所说的建立数学模型，而建立起来的数学表达式就叫数学模型。

由于传统及教学条件等多因素的影响，大学生大多都很好地掌握了数学理论，但解决实际问题时，却经常感到无从下手，不知道如何利用所学到的知识。对复杂的研究对象，不知道如何分析并确定现象中起作用的主要因素，不知道如何简化现象，把现象抽象为一个简单的数学模型。

为加强学生们这方面能力，并考虑到专业特点，本课程将重点讲述机械设计及研究中的数学模型的建立。

编著者

1999 年 2 月

目　录

第1章 数学模型

数学模型是今天科学研究和生产实践中经常言及的名词。轧钢工程师需要建立一个轧钢过程的数学模型，以实现过程的自动控制；汽车设计师需要建立一个人与汽车的人机系统的数学模型，用来分析车身振动对人体的影响；气象工作者要根据气压、温度、湿度、风速等的数学模型来预报天气。而我们机械工程师在设计及研究中需要建立怎样的数学模型呢？这就是本书要回答的问题。

本章作为绪论，主要简述什么是数学模型，它在科学研究中有什么意义，怎样建立数学模型及数学模型建立的原则。

1.1 数学模型在科学中的地位

数学模型与自然科学 众所周知，牛顿(1642～1727)在力学上的重大贡献之一是他发现了万有引力定律。他在开普勒(1571～1630)关于行星运行规律的三定律(从略)基础上利用自己创立的微积分理论推导出了万有引力定律。复杂的且具有普遍性的力学法则被他用单纯的数学式表达出来了。万有引力定律的数学表达式就是世间万物之间相互作用(力)的数学模型，是历史上最著名的模型之一。利用这个数学模型科学家发现了太阳系中新的行星，人类把卫星送上了天，并登上了月球……。由此可以看出，给现象建立正确的数学模型对自然科学的发展起着多么大的作用。

利用数学方法人们可以透过表面的现象和笼统的感性概念

认识现象的本质，确定其内部存在的具有普遍性的规律，从而更新并提高认识。

数学模型与机械工程学　实验研究和数学运算是机械工程学中不可分割的两个方面。随着现代科学技术的发展，数学在机械工程学中的作用显得越来越重要。

1)设计及研究的对象越来越复杂。随着现代科学技术的发展，机器逐渐成为由机构、液、电、气以及电脑构成的复杂系统，若不靠数学方法，是很难确定系统内各元素之间的关系。若只靠实验来确定，势必浪费人力、物力和时间。数学运算还可以为实验提供依据，少走弯路。

2)设计过程中，选择材料或者确定尺寸时，只靠定性的判断并不充分，必须定量地预测材料在机器中的状态，并根据其性能来确定尺寸。

3)有些东西只有使用数学模型方能了解其状态。例如在分析大批量生产的产品质量时我们不可能将所有的产品都检测到，只能抽出其部分产品检测，建立质量分布模型，以此来分析产品质量。

4)计算技术的发展及计算机性能的提高。应用计算机不但能模拟化学反应，而且可以对复杂的结构进行力的分析计算，甚至可以模拟整机受力状态。从这个意义上讲，可以把计算机看作是一个实验装置，它直接研究的是现象的数学模型。

1.2　建立数学模型的一般步骤

现象的多样性决定了建立数学模型的方法及步骤的多样性，一般来说，建立数学模型要经过哪些步骤并没有一定的模式，但建立数学模型的过程是由现象到数学式的过程，在某种程度上存在一些可以遵循或供参考的步骤。

1)在确定了建立数学模型的目的之后，要对现象进行观察分析。观察要全面细致，分析要抓住问题的本质，弄清研究对象的特征，做到尽可能理解现象，为下一步具体采用什么方法提供依据。

2)若分析的现象比较简单，我们可以直接得出其数学模型，不必作太复杂的运算就能够确定它的解，比如后面例题中的“孙膑赛马”。在机械设计过程中，有时不必去建立数学模型，只要利用已有的力学和数学知识进行运算，或查一查手册就可以解决问题。

在有些情况下，我们利用实验设备，对现象进行实验研究，确定我们需要的物理量，在此基础上进行加工处理，得出数学模型。实验为建立数学模型提供重要依据，它可以决定建立怎样的数学模型，对复杂的研究对象尤其如此。这种情况下所需要的理论知识相应地会复杂一些。

若研究的对象数量较大，而所要确定的量只有一个，这时用调查的方法搜集数据，然后用回归或统计等方法来建立数学模型。

多数情况是我们无法确定实际现象中的各种因素，这时就需要“假定”。恰当的假设会有助于问题的解决，使我们少走弯路，但实际情况却往往不同于假设。若所做的假设过于简单或不合理，会导致所建立的模型产生缺陷，失败或部分失败；若所做的假设过于详细，就会导致运算过程复杂，甚至下一步无法进行下去。要做好这一点，在分析现象的过程中必须抓住问题的本质，滤出主要因素，合理地抛弃次要因素，从而使问题明了且简单。

3)数学模型建立以后，接着就是对模型求解。求解可以用分析的方法进行理论计算，如解方程等。也可以用数值计算、图解、

计算机模拟等。

4)对所得的结果进行理论上的分析,检验模型的正确性,以此来判断“假定”等中间步骤的正确性。

5)在确定所得模型基本或完全正确后,把模型应用到实际中去。

以上所述的内容可以用框图表示(图 1-1)。

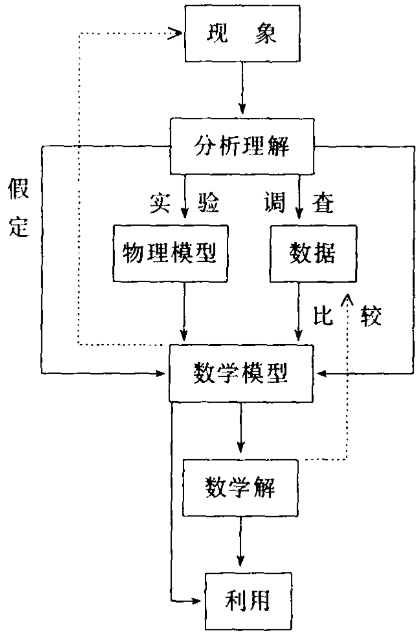

图1-1 数学模型建立过程简图

特别指出的是,建立数学模型的过程就像艺术家创作一样,要发挥自己的智慧、想象力和创造力,不要墨守成规,也不要生搬硬套,要根据实际情况灵活掌握,因为对于一个现象可能存在若干个可以认为是合适的模型。

科学上建立的数学模型，它最低必须满足下列两个条件：

1）它能说明多数同类现象，具有普遍性。

2）它对事物的说明或预测必须是成立的。

1.3 建模示例

例 1 看过气功师表演的人，大多都看见过下列情形：气功师躺在地上，腹上盖着一张毯子，上面压着一块大石板。另一个大汉手持大锤用力向石板砸去，结果石板被砸断，下面的气功师却安然无恙。下面我们来分析一下，是什么使气功师有如此之神功。如图 1-2 所示，气功师腹部及其上面盖着的毯子均为弹性体，可将其简化为弹性系数为 k 的弹簧。锤及石板的质量分别为 m、M。设锤与石板的碰撞为非弹性碰撞，碰撞前锤的速度为 v，碰撞后锤与石板的速度为 u，根据动量守恒定律：

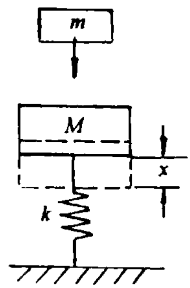

图 1-2 气功师受力计算图

$$mv = (m + M)u \tag{1—1}$$

可得：

$$u = \frac{m}{m + M}v \tag{1—2}$$

撞击后锤与石块的动能为：

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(m + M)u^2 \\ &= \frac{1}{2}(m + M)\left(\frac{m}{m + M}v\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{(mv)^2}{m + M} \end{aligned} \tag{1—3}$$

锤与石板运动停止的瞬间其动能在忽略能量损失和其它因素的情况下全部转化为势能：

$$T = V \tag{1—4}$$

即：
$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\frac{(mv)^2}{m+M} \tag{1—5}$$

$$x = mv\sqrt{\frac{1}{k(m+M)}} \tag{1—6}$$

人体所受的力为：

$$F = kx = mv\sqrt{\frac{k}{m+M}} \tag{1—7}$$

由式(1—7)可以看出F随着v的增大而增大，这就是说，持锤人的力气越大，气功师所受的力也就越大。这还不是问题的本质所在。下面我们看一看人体的弹性系数及石板质量对人体受力的影响。F随着k的减小、M的增大而减小，这就说明，人体越柔软，石板的质量越大，人所受的力就越小。这就是为什么气功师要把石板放在腹上，而不是头上，腹上放的是大石板，而不是小石块。

这是一个简单的力学问题，对这一问题的解决，不仅需要力学分析、对象的简化，同时还要进行必要的数学处理和分析。

例 2 孙膑赛马　战国时期，"齐威王暇时常与宗族诸公子弛射赌胜为乐。田忌马力不及，屡次失金"。孙膑发现，田忌的马和齐威王的马差不多，可三场赛全输了。原来三场赛中使用的马是不一样的，分上、中、下三档，上等马对上等马，中等马对中等马，下等马对下等马。孙膑暗告田忌，再约齐威王赛马时，你把下等马装饰成上等马对齐威王的上等马，上等马装饰成中等马对齐威王的中等马，中等马装饰成下等马对齐威王的下等马。每场赌金为一千金，结果田忌一负二胜，赢一千金。

由于齐国的好马几乎全在齐威王手中，按常规赛法，田忌定输无疑。而孙膑巧妙地改变了对阵中马的排列，使田忌败中获

胜。改变对阵中马的排列之后，双方马有六种对阵方式，如表 1-1 所示。

六种对阵方式中田忌只有一阵能获胜，即第五种方式，而且不是全胜，只有 2∶1。

由这个例子可以看出，有些模型未必要进行一系列的数学处理，通过简单的逻辑分析，就可得出结果。但在工程研究上，对象一般都很复杂，要得出比较理想的结果，必须进行一系列的数学分析。

表 1-1　对阵方式

对阵双方	齐威王∶田忌					
对阵次序	1	2	3	4	5	6
对阵方式	上∶上	上∶上	上∶中	上∶中	上∶下	上∶下
	中∶中	中∶下	中∶上	中∶下	中∶上	中∶中
	下∶下	下∶中	下∶下	下∶上	下∶中	下∶上
对阵结果	3∶0	2∶1	2∶1	2∶1	1∶2	2∶1

例 3　万有引力定律　万有引力定律的发现是牛顿对人类的重大贡献之一。牛顿利用自己创立的微积分法，在开普勒三定律基础上，推导出了万有引力定律(图 1-3)。

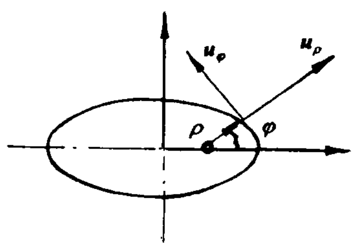

图 1-3　行星绕太阳运动的极坐标轨道

开普勒三定律的内容如下：

(1) 太阳系各个行星都沿着各自的椭圆轨道运行，而太阳在椭圆的一个焦点上。

行星运动的椭圆轨道的极坐标方程：

$$\rho=\frac{p}{1+e\cos\varphi};2a=\frac{2p}{1-e^2};$$

$$2b=\frac{2p}{\sqrt{1-e^2}};2c=\frac{2pe}{1-e^2} \tag{1—8}$$

式中：a,b—— 椭圆的长、短半轴；

e—— 离心率，$e=\frac{c}{a}<1$；

p—— 焦点参数，$p=\frac{b^2}{a}$；

$2c$—— 焦距。

(2) 连接太阳和行星的直线，在相等的时间内扫过的面积相等，即单位时间内矢径 ρ 扫过的面积为常数 s：

$$s=\frac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi} \tag{1—9}$$

(3)各行星绕太阳运行的周期 T 的平方与椭圆轨道长轴 a 的立方成正比。即

$$\frac{a^3}{T^2}=k \tag{1—10}$$

其中，k 是一个与太阳质量有关的常数，对所有的行星都一样。

开普勒的关于行星运动三定律可以看作是牛顿建立万有引力定律的基本假设，下面我们引入单位向量：

$$u_\rho=\cos\varphi i+\sin\varphi j$$

$$u_\varphi=-\sin\varphi i+\cos\varphi j \tag{1—11}$$

则矢径可表示为：

$$\rho=\rho u_\rho=\rho\cos\varphi i+\rho\sin\varphi j \tag{1—12}$$

利用(1—11)可以算出

$$u_\rho'=\dot{\varphi}u_\varphi$$

$$u_\varphi'=-\dot{\varphi}u_\rho \tag{1—13}$$

由式(1—12)(1—13)可得行星运动的速度和加速度：

$$\rho' = \rho' u_\rho + \rho\phi u_\varphi$$

$$\rho'' = (\rho'' - \rho\phi^2)u\rho + (p\phi' + 2\rho'\phi)u_\varphi \quad (1—14)$$

由式(1—9)可得：

$$\phi = \frac{2s}{\rho^2}, \phi' = \frac{-4s\rho'}{\rho^3} \quad (1—15)$$

由式(1—15)的结果可以看出，式(1—14)右边的第二项 $\rho\phi' + 2\rho''\phi = 0$，这样式(1—14)化为

$$\rho'' = (\rho'' - \rho\phi^2)u_\rho \quad (1—16)$$

将式(1—8)中的 ρ 对 φ 进行二次求导得：

$$\rho' = \frac{pe\sin\varphi}{(1+e\cos\varphi)^2}\phi = \left(\frac{p}{1+e\cos\varphi}\right)^2\phi\ \frac{e}{p}\sin\varphi$$

$$= \frac{2se}{p}\sin\varphi \quad (1—17)$$

$$\rho'' = \frac{2se}{p}\phi\cos\varphi = \frac{4s^2e}{p\rho^2}\cos\varphi = \frac{4s^2(p-\rho)}{p\rho^3} \quad (1—18)$$

将式(1—15)、(1—18)代入式(1—16)可得

$$\rho'' = \frac{-4s^2}{p\rho^2}u_\rho \quad (1—19)$$

这样我们可得行星受太阳的引力

$$f = m\rho'' = -\frac{4s^2m}{p\rho^2}u_0$$

$$u_0 = \rho/\rho \quad (1—20)$$

由式(1—9)可知，s 是行星与太阳连线在单位时间内扫过的面积，那么行星在一个周期内扫过的面积即为椭圆的面积：

$$Ts = \pi ab \quad (1—21)$$

由式(1—8)、(1—10)、(1—21)可以得出：

$$\frac{s^2}{p} = k\pi^2 \quad (1—22)$$

将式(1—22)代入(1—20)有：

$$f=-k\frac{4\pi^2 m}{\rho^2}u_0 \tag{1—23}$$

式(1—23)表明，太阳对行星的引力 f 与行星质量 m 成正比，与两者之间的距离平方 ρ^2 成反比。

利用式(1—23)牛顿由苹果落到地面上的重力加速度 g 推导出月球绕地球运动的加速度，结果与利用月球绕地球运动周期计算出的一样。由此牛顿得出下述结论：地球对月亮的吸引力和太阳对行星的吸引力是同一种力。接着牛顿又把引力公式中的常数 k 归因于太阳的质量 M，把 $4^2/k$ 写成 GM，这样太阳对行星的引力公式就写成了

$$f=G\frac{Mm}{\rho^2} \tag{1—24}$$

其中，G 为万有引力常数。

在牛顿之后约一百年，即 1798 年，英国人卡文迪许用实验的方法测出了两个物体之间的引力大小，证明了该引力的大小与两个物体质量乘积成正比，与它们之间距离的平方成反比，并由此得出了万有引力常数 G 的值。

万有引力定律是历史上最著名的数学模型之一，它的创立是建立在前人的研究成果基础上。前人的正确结论是牛顿研究万有引力定律的前提，即假设。从这个例子可以看出，正确的假设对得出正确的模型是多么重要。