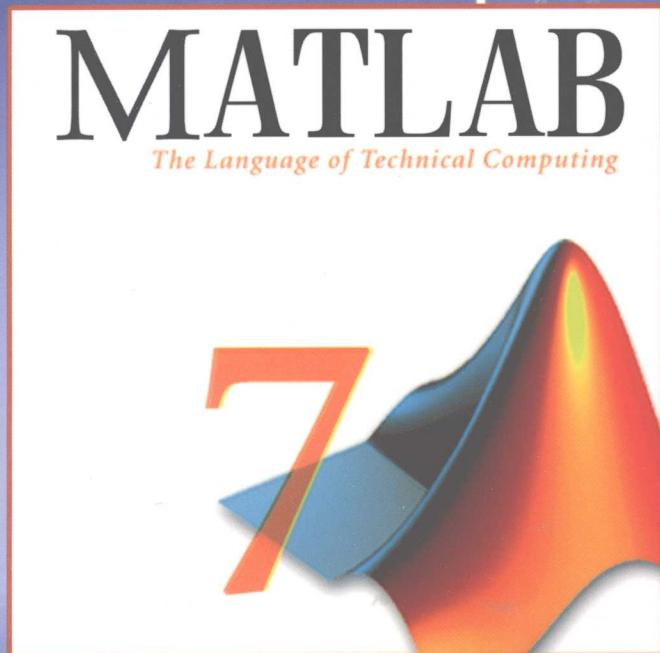


# MATLAB有限元 结构动力学分析与工程应用

徐斌 高跃飞 余龙 编著



清华大学出版社

# MATLAB 有限元结构动力学分析 与工程应用

徐 斌 高跃飞 余 龙 编著

清华大学出版社

北 京

## 内 容 简 介

本书共 8 章,系统地阐述了基于有限元和 MATLAB 软件的结构动力学计算和它在工程数值仿真中的应用,包括有限元的基本方法和步骤、结构的动力特性和响应分析、单元的质量矩阵和刚度矩阵的建立及典型结构的动力学分析、工程应用和数值仿真等内容。

本书可作为力学、机械、航空航天、土木、水利等专业的本科生和研究生教材,也可作为上述专业教师、工程师和科研人员的参考用书。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

### 图书在版编目(CIP)数据

MATLAB 有限元结构动力学分析与工程应用/徐斌,高跃飞,余龙编著. —北京:清华大学出版社, 2009.12

ISBN 978-7-302-21148-8

I. M… II. ①徐… ②高… ③余… III. 结构动力学—有限元分析:动力学分析—应用程序, MATLAB IV. O342-39

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 177073 号

责任编辑:刘天飞 桑任松

封面设计:杨玉兰

版式设计:北京东方人华科技有限公司

责任校对:周剑云

责任印制:王秀菊

出版发行:清华大学出版社

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座

<http://www.tup.com.cn>

邮 编:100084

社 总 机:010-62770175

邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, [c-service@tup.tsinghua.edu.cn](mailto:c-service@tup.tsinghua.edu.cn)

质 量 反 馈:010-62772015, [zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn](mailto:zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn)

印 刷 者:清华大学印刷厂

装 订 者:北京市密云县京文制本装订厂

经 销:全国新华书店

开 本:185×260 印 张:25 字 数:604 千字

版 次:2009 年 12 月第 1 版 印 次:2009 年 12 月第 1 次印刷

印 数:1~4000

定 价:37.00 元

---

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话:(010)62770177 转 3103 产品编号:032422-01

# 前 言

有限元法发展至今天,已成为工程数值分析的有力工具,在理论和实践上均取得了令人瞩目的成就,事实上它已经发展成为工程领域中一门不可或缺的技术。本书采用在当今工程和教育界非常流行的数学软件 MATLAB 来进行有限元的分析和应用,特别是进行结构的动力学分析。

本书的一大特色是采用 MATLAB 作为编程平台,利用 MATLAB 强大的科学计算和符号运算功能,帮助读者轻松跨越繁琐的公式推导和复杂的编程技巧,获得最佳的学习效率。国内基于 MATLAB 的有限元分析介绍主要停留在静力学问题分析上,很少或较少篇幅涉及动力学分析,基于此,系统、深入地介绍基于 MATLAB 的结构动力学分析,是本书的主要特色之二。本书除了介绍有限元的基本理论,还将介绍作者多年来基于 MATLAB 的工程仿真成果,是本书的主要特色之三。

本书详细、系统地介绍基于 MATLAB 的结构动力学的基本分析,在写作上,采用理论和程序紧密结合的方法,以加强读者的感性认识,更好地理解有限元理论,每章后面都配有丰富和详细的工程仿真和应用实例,这也是诸多与有限元应用有关的本科生、研究生、科研人员和工程技术人员所希望得到的资料。本书不仅能让不懂此软件分析的读者入门,而且能让入门者进阶,最后达到精通,能让精通者应用到工程实际中,解决实际工程计算仿真和应用问题。

本书的内容共分 8 章和 1 个附录。第 1 章主要介绍有限元的基本方法和应用步骤;第 2 章主要讲述结构的动力特性和响应分析;第 3~7 章主要介绍各种有限元单元以及各种典型工程结构,包括各种单元的质量矩阵和刚度矩阵的建立以及基本的结构动力学分析(固有频率的求解和动响应分析);第 8 章为工程应用和数值仿真部分,主要介绍基于 MATLAB 的结构动力学分析在结构领域的一些应用;附录针对 MATLAB 语言和其他高级编程语言的不同之处,对 MATLAB 在本书中使用到的功能进行简要的介绍。(另外,本书正文中用句点“.”表示一句话结束,含义与句号“。”相同。)

适用对象:本书内容专业,是一本难得的、系统的工程书籍,能够帮助读者更好地解决问题,可以作为在校大学生、研究生、教师、工程师和科研人员的参考手册,亦可作为广大工程技术人员的参考用书。

本书由徐斌(西北工业大学)、高跃飞(中北大学)和余龙(西北工业大学)等负责编写。第 2 章、第 6 章、第 8 章 8.1~8.3 节由徐斌编写,第 1 章 1.1 节和 1.2 节、第 4 章、第 5 章由高跃飞编写,第 1 章 1.3 节、第 3 章、第 7 章以及附录由余龙编写,第 8 章 8.5 节由杨永锋编写。全书的统稿及审校工作由徐斌负责。还要特别感谢家人在作者写作本书时所做的支持和理解。由于本书程序量大,为了方便读者学习,本书中的所有程序均已存在网站下载资源中。程序是按章分类的,每个文件名都有一个相应的序号,根据书中的模型名称,或者 M 文件名称直接在网站下载资源中查找相对应的文件名即可方便地找到。另外,书中所有程序都已上传至科研中国网站 <http://www.sciei.com>。如果有任何技术问题,

欢迎大家到科研论坛 <http://bbs.scie.com> 进行交流, 相信您能够得到满意的答复, 同时也欢迎 MATLAB 爱好者来这里展现您的能力。

由于作者水平有限, 时间仓促, 书中不妥之处在所难免, 敬请广大读者不吝指正! 任何意见和建议均可通过电子邮箱 [xubind@sina.com](mailto:xubind@sina.com) 发给作者。读者也可通过这个邮箱索取本书的源程序和数据文件。

徐 斌  
于西北工业大学

# 目 录

<b>第 1 章 有限元法基础</b> .....1	<b>第 3 章 桁架结构</b> ..... 69
1.1 有限元法简介 .....1	3.1 杆单元 ..... 69
1.2 建立有限元方程的基本方法.....2	3.1.1 局部坐标系下的杆件单元 刚度矩阵 ..... 69
1.2.1 加权余量法 .....2	3.1.2 坐标转换矩阵..... 70
1.2.2 变分方法 .....6	3.1.3 单元质量矩阵..... 72
1.2.3 Ritz 法.....8	3.1.4 三维杆单元..... 72
1.2.4 能量原理 .....9	3.2 算例 ..... 73
1.3 有限元法基本步骤 .....15	3.2.1 问题介绍 ..... 73
1.3.1 前处理部分 .....16	3.2.2 MATLAB 程序及说明 ..... 74
1.3.2 计算各单元矩阵和单元节点 载荷向量 .....18	3.2.3 计算结果 ..... 76
1.3.3 系统整体刚度、质量、阻尼 矩阵和节点载荷向量.....20	<b>第 4 章 等参单元</b> ..... 79
1.3.4 施加位移约束条件 .....23	4.1 一维单元 ..... 79
1.3.5 求解 .....24	4.2 四边形单元 ..... 81
<b>第 2 章 结构的动力特性和响应分析</b> .....26	4.3 三角形单元 ..... 84
2.1 动力特性分析 .....26	4.4 三维单元 ..... 85
2.1.1 矢量迭代法 .....26	4.5 等参单元用于弹性力学分析的 一般格式 ..... 87
2.1.2 子空间迭代法 .....27	4.6 数值积分方法..... 89
2.2 时域动力响应分析 .....28	4.6.1 一维数值积分..... 89
2.2.1 数值积分法 .....28	4.6.2 二维和三维 Gauss 积分 ..... 90
2.2.2 振型叠加法 .....34	4.7 应用问题及 MATLAB 程序..... 91
2.3 频响函数分析 .....38	<b>第 5 章 梁与刚架结构</b> ..... 106
2.3.1 比例阻尼系统(实模态分析).....38	5.1 基本单元分析..... 106
2.3.2 一般阻尼系统(复模态理论).....39	5.1.1 Euler-Bernoulli 梁单元..... 106
2.4 应用问题与 MATLAB 程序.....42	5.1.2 Timoshenko 梁单元..... 109
2.4.1 结构动力特性分析 .....42	5.1.3 考虑剪切变形的 Euler-Bernoulli 梁单元 ..... 112
2.4.2 结构时域动力响应分析.....45	5.1.4 混合梁单元..... 115
2.4.3 结构频响函数分析 .....49	5.2 平面刚架 ..... 117
2.4.4 本实例所用的 MATLAB 函数 .....50	5.3 空间刚架 ..... 120

5.4 应用问题与 MATLAB 程序.....125	7.9.2 计算 7.7 节中介绍壳体单元的 单元刚度矩阵..... 281
5.4.1 静力学问题分析 .....125	
5.4.2 特征值问题与模态分析.....151	
5.4.3 瞬态问题分析 .....161	
5.4.4 频响分析 .....170	
5.5 应用问题的 MATLAB 函数.....176	
<b>第 6 章 弹性问题.....211</b>	<b>第 8 章 工程应用 ..... 288</b>
6.1 平面问题 .....211	8.1 结构动力学优化设计 ..... 288
6.1.1 常应变三角形单元 .....211	8.1.1 优化问题基本描述..... 288
6.1.2 矩形双线性单元 .....219	8.1.2 动力学尺寸优化..... 289
6.2 空间与轴对称问题 .....222	8.1.3 动力学拓扑优化..... 304
6.2.1 常应变四面体单元 .....222	8.2 结构振动控制..... 334
6.2.2 轴对称问题 .....225	8.2.1 线性二次型最优控制..... 334
6.3 应用问题与 MATLAB 程序.....228	8.2.2 线性定常系统的极点配置..... 343
<b>第 7 章 板结构.....247</b>	8.2.3 线性定常系统的模态控制..... 345
7.1 经典薄板弯曲理论 .....247	8.3 结构边界参数优化设计 ..... 354
7.2 经典板弯曲元 .....249	8.4 结构故障诊断..... 362
7.2.1 四节点矩形单元 .....250	8.4.1 基于残余力向量的损伤 识别方法 ..... 363
7.2.2 三节点三角形单元 .....253	8.4.2 数值验证 ..... 366
7.3 剪切变形板元 .....254	8.5 转子动力学分析..... 370
7.4 具有位移自由度的板元.....256	8.5.1 Newmark- $\beta$ 数值算法..... 370
7.5 混合板元 .....259	8.5.2 影响系数法进行双面转子动 平衡 ..... 373
7.6 杂交板元 .....263	<b>附录 A MATLAB 简介 ..... 377</b>
7.7 非轴对称超参数壳体单元.....264	A.1 MATLAB 使用界面 ..... 377
7.7.1 曲面单元与映射 .....264	A.2 MATLAB 编程简介 ..... 378
7.7.2 位移函数 .....266	A.2.1 命令文件和函数文件..... 378
7.7.3 整体坐标中的应变 .....267	A.2.2 变量 ..... 379
7.7.4 局部坐标中的应变与应力.....268	A.2.3 算术运算符和算术表达式 ..... 380
7.7.5 单元刚度矩阵与节点载荷.....271	A.2.4 关系运算符和逻辑运算符 ..... 382
7.7.6 单元质量矩阵 .....272	A.2.5 程序流程控制..... 383
7.8 复合材料单元 .....273	A.2.6 函数 ..... 384
7.9 应用问题与 MATLAB 程序.....275	A.3 稀疏矩阵和符号变量及其运算 ..... 385
7.9.1 求一边固支方板的频率.....275	A.3.1 稀疏矩阵..... 385
	A.3.2 符号变量和符号运算 ..... 387
	<b>参考文献 ..... 390</b>

# 第 1 章 有限元法基础

## 1.1 有限元法简介

在工程与科学的现代系统分析中，对复杂系统计算模型的建立进行了大量的研究，人们已经能够得到系统应遵循的基本方程和相应的定解条件。这些方程一般为常微分方程或偏微分方程，只有少数问题能够用解析方法得到精确解，多数问题需要利用数值方法来求解。有限元法(又称有限单元法)是近代发展起来的解决复杂结构问题的一种有效数值方法。

有限元法的基本思想是将连续的求解区域离散为一组有限个、按一定方式相互联结在一起的单元的组合物。由于单元能按不同的联结方式进行组合，且单元本身又可以有不同的形状，因此可以模型化几何形状复杂的求解域。有限元法作为数值分析方法的另一个重要特点是利用在每一个单元内假设的近似函数来分片地表示全求解域上待求的未知场函数。单元内的近似函数通常由未知场函数或其导数在单元的各个节点的数值和其插值函数来表达。这样一来，一个问题的有限元分析中，未知场函数或其导数在各个节点上的数值就成为新的未知量(也即自由度)，从而使一个连续的无限自由度问题变成离散的有限自由度问题。一经求解出这些未知量，就可以通过插值函数计算出各个单元内场函数的近似值，从而得到整个求解域上的近似解。显然随着单元数目的增加，也即单元尺寸的缩小，或者随着单元自由度的增加及插值函数精度的提高，解的近似程度将不断改进。如果单元是满足收敛要求的，近似解最后将收敛于精确解。

从确定单元特性和建立求解方程的理论基础和途径来说，早期提出有限元法时是利用直接刚度法，它来源于结构分析的刚度法。1963—1964年，有限元法被证明是基于变分原理的 Ritz(里兹)法的另一种形式，从而使 Ritz 法分析的所有理论基础都适用于有限元法，确认了有限元法是处理连续介质问题的一种普遍方法。利用变分原理建立有限元方程和经典里兹法的主要区别是有限元法假设的近似函数不是在全求解域而是在单元上规定的，而且事先不要求满足任何边界条件，因此它可以用来处理很复杂的连续介质问题。从 20 世纪 60 年代后期开始，利用加权余量法来确定单元特性和建立有限元求解方程的方法得到了普遍的应用。有限元法中所利用的主要是 Galerkin(伽辽金)法，它可以用于已知问题的微分方程和边界条件，但是变分的泛函尚未找到或者根本不存在的情况，进一步扩大了有限元法的应用领域<sup>[1]</sup>。

近年来，随着计算机技术的快速发展和各种商业化有限元软件的不完善，有限元法逐渐成为动力学分析所普遍采用的一种有效方法。



## 1.2 建立有限元方程的基本方法

### 1.2.1 加权余量法

基于微分方程等效积分的加权余量法是求解微分方程近似解的一种有效方法,有限元法中可以用加权余量法来建立有限元方程.工程中的多数分析问题是以未知场函数应满足的微分方程和边界条件的形式表示的,一般可表示为未知函数  $u$  应满足的微分方程组

$$\mathbf{A}(u) = \begin{Bmatrix} A_1(u) \\ A_2(u) \\ \vdots \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{在 } \Omega \text{ 内}) \quad (1-1)$$

和应满足的边界条件

$$\mathbf{B}(u) = \begin{Bmatrix} B_1(u) \\ B_2(u) \\ \vdots \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{在 } \Gamma \text{ 上}) \quad (1-2)$$

式中,域  $\Omega$  可以是体积域、面积域等;而  $\Gamma$  是域  $\Omega$  的边界.上述的未知函数  $u$  可以是标量场(如温度),也可以是向量场(如位移、应力、应变等). $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$  是对于独立变量的微分算子.

由于式(1-1)在域  $\Omega$  中的任一点均必须为零,因而有

$$\int_{\Omega} \mathbf{V}^T \mathbf{A}(u) d\Omega = \int_{\Omega} (v_1 A_1(u) + v_2 A_2(u) + \dots) d\Omega = 0 \quad (1-3)$$

其中

$$\mathbf{V} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

是函数向量,是一组与微分方程个数相等的任意函数.

式(1-3)是与微分方程组(1-1)完全等效的积分形式.可以断言,若积分方程(1-3)对于任意的函数向量  $\mathbf{V}$  成立,则微分方程组(1-1)必然在域  $\Omega$  内任一点都满足.这是因为假定微分方程组(1-1)在域  $\Omega$  内某些点或一部分子域中不满足,相应地可找到适当的函数  $\mathbf{V}$  使式(1-3)亦不等于零.

同理若对边界上任一点式(1-2)成立,则对于一组任意函数  $\bar{\mathbf{V}}$  有

$$\int_{\Gamma} \bar{\mathbf{V}}^T \mathbf{B}(u) d\Gamma = \int_{\Gamma} (\bar{v}_1 B_1(u) + \bar{v}_2 B_2(u) + \dots) d\Gamma = 0 \quad (1-4)$$

因此,积分方程

$$\int_{\Omega} \mathbf{V}^T \mathbf{A}(u) d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{V}}^T \mathbf{B}(u) d\Gamma = 0 \quad (1-5)$$

对于所有的  $\mathbf{V}$  和  $\bar{\mathbf{V}}$  成立等效于满足微分方程(1-1)和边界条件(1-2).式(1-5)称为微分方程的等效积分形式,也称为等效积分的“强”形式.在上述的讨论中,假定积分  $\int_{\Omega} \mathbf{V}^T \mathbf{A}(u) d\Omega$  和  $\int_{\Gamma} \bar{\mathbf{V}}^T \mathbf{B}(u) d\Gamma$  是可计算的,这就要求函数  $\mathbf{V}$  和  $\bar{\mathbf{V}}$  的选取必须满足可积的条件.

在很多情况下, 对式(1-5)可进行分部积分, 得到另一种等效积分形式

$$\int_{\Omega} C^T(v)D(u)d\Omega + \int_{\Gamma} E^T(\bar{v})F(u)d\Gamma = 0 \quad (1-6)$$

式中,  $C$ 、 $D$ 、 $E$  和  $F$  是微分算子. 式(1-6)称为微分方程等效积分的“弱”形式. 积分方程(1-6)中所包含的导数的阶数较式(1-5)中的  $A$  低, 这就对函数  $u$  的连续性要求降低, 只需有较低阶的连续性就可以了. 在求解域  $\Omega$  中, 若场函数  $u$  是精确解, 则在域  $\Omega$  中任一点都满足微分方程(1-1), 同时在边界  $\Gamma$  上任一点都满足边界条件(1-2). 此时, 等效积分形式的式(1-5)或式(1-6)也必然满足. 但是对于多数应用问题, 这样的精确解是难以获得的, 因而人们致力于寻找具有一定精度的近似解. 加权余量法是获取微分方程近似解的一种有效方法.

对于式(1-1)和式(1-2)所描述的问题, 未知场函数  $u$  可用带有待定参数的近似函数来表示. 这种近似函数是一簇已知函数, 一般可表示为以下形式

$$u \approx \tilde{u} = \sum_{i=1}^n N_i \alpha_i = N\alpha \quad (1-7)$$

式中,  $\alpha_i$  是待定参数;  $N_i$  是称为试探函数的已知函数, 可取自线性独立的完全函数序列. 此外, 这种近似函数的选取应满足边界条件和连续性的要求.

一般在  $n$  取有限项数的情况下近似解不能精确满足微分方程(1-1)和边界条件(1-2), 将产生残差  $R$  和  $\bar{R}$

$$A(N\alpha) = R, \quad B(N\alpha) = \bar{R} \quad (1-8)$$

这种残差称为余量.

对于式(1-5), 用  $n$  个规定的函数来代替任意函数  $V$  和  $\bar{V}$

$$V = W_j, \quad \bar{V} = \bar{W}_j \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

则可得到近似的等效积分形式

$$\int_{\Omega} W_j^T A(N\alpha) d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{W}_j^T B(N\alpha) d\Gamma = 0 \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (1-9)$$

表示成余量的形式为

$$\int_{\Omega} W_j^T R d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{W}_j^T \bar{R} d\Gamma = 0 \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (1-10)$$

式(1-9)和式(1-10)说明通过选择待定参数  $\alpha$  可使余量在某种平均意义上等于零.  $W_j$  和  $\bar{W}_j$  称为权函数.

令余量的加权积分为零得到一组方程, 可用来求解近似函数的待定参数  $\alpha$ , 从而得到原问题的近似解. 展开式(1-9), 有

$$\int_{\Omega} W_1^T A(N\alpha) d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{W}_1^T B(N\alpha) d\Gamma = 0$$

$$\int_{\Omega} W_2^T A(N\alpha) d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{W}_2^T B(N\alpha) d\Gamma = 0$$

$$\vdots$$

$$\int_{\Omega} W_n^T A(N\alpha) d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{W}_n^T B(N\alpha) d\Gamma = 0$$

以上方程中若  $A$  中的元素个数为  $m_1$ , 边界条件  $B$  中的元素个数为  $m_2$ , 则权函数  $W_j$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) 是  $m_1$  阶的函数列阵,  $\bar{W}_j$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) 是  $m_2$  阶的函数列阵. 近似函数取的

项数  $n$  越多, 近似解的精度越高. 当项数  $n$  趋于无穷时, 近似解将收敛于精确解.

对于等效积分“弱”形式, 代入近似解的近似形式为

$$\int_{\Omega} \mathbf{C}^T(\mathbf{W}_j) \mathbf{D}(N\alpha) d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{E}^T(\bar{\mathbf{W}}_j) \mathbf{F}(N\alpha) d\Gamma = 0 \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (1-11)$$

这种采用使余量积分为零来求解微分方程近似解的方法称为加权余量法. 权函数可以从任何独立的完整函数集来选取. 按照权函数选取的不同可以给出不同的加权余量方法. 常见的权函数有以下几种(其他的方法可见参考文献<sup>[2]</sup>).

### 1. 配点法

该方法用 Dirac  $\delta$  函数作为权函数

$$\mathbf{W}_j = \bar{\mathbf{W}}_j = \delta(x - x_j) \quad (1-12)$$

若域  $\Omega$  是独立坐标  $x$  的函数, 则有: 当  $x \neq x_j$  时  $\mathbf{W}_j = 0$ , 且有

$$\int_{\Omega} \mathbf{W}_j d\Omega = \mathbf{I} \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

这种方法强迫余量在域  $\Omega$  内的  $n$  个点上等于零.

### 2. 最小二乘法

当近似函数取为

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^n N_i \alpha_i$$

权函数取为

$$\mathbf{W}_j = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial}{\partial \alpha_j} A \left( \sum_{i=1}^n N_i \alpha_i \right) \quad (1-13)$$

由

$$\int_{\Omega} \mathbf{W}_j^T \mathbf{R} d\Omega = 0$$

有

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j} \int_{\Omega} \mathbf{R}^2 d\Omega = \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \int_{\Omega} A^2 \left( \sum_{i=1}^n N_i \alpha_i \right) d\Omega = 0$$

其质是使积分

$$J(\alpha_i) = \int_{\Omega} A^2 \left( \sum_{i=1}^n N_i \alpha_i \right) d\Omega$$

取最小值.

### 3. Galerkin 法

在该方法中, 用试探函数的序列作为权函数. 取权函数为

$$\mathbf{W}_j = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \alpha_j}, \quad \bar{\mathbf{W}}_j = -\frac{\partial \bar{u}}{\partial \alpha_j} \quad (1-14)$$

或

$$\mathbf{W}_j = N_j, \quad \bar{\mathbf{W}}_j = -N_j \quad (1-15)$$

以上几种方法可以用下面的二阶常微分方程求解来说明。

【例 1.1】 对于问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = -x & (0 \leq x \leq 1) \\ u(0) = 0, u(1) = 0 \end{cases}$$

取二项式的近似函数

$$\tilde{u} = \alpha_1 x(1-x) + \alpha_2 x^2(1-x)$$

为近似解。显然该近似解满足边界条件，但不满足微分方程，产生的余量为

$$R(x) = x + \alpha_1(-2 + x - x^2) + \alpha_2(2 - 6x + x^2 - x^3)$$

其加权积分应为零，即

$$\int_0^1 W_j R dx = 0$$

(1) 配点法。

取  $x_1 = 1/3$ ,  $x_2 = 2/3$  作为配点，即有

$$W_1 = \delta\left(x - \frac{1}{3}\right), \quad W_2 = \delta\left(x - \frac{2}{3}\right)$$

代入  $\int_0^1 W_j R dx = 0$ ，可得

$$R\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{16}{9}\alpha_1 + \frac{2}{27}\alpha_2 = 0$$

$$R\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} - \frac{16}{9}\alpha_1 - \frac{50}{27}\alpha_2 = 0$$

求解上述的代数方程可得  $\alpha_1 = 0.1947$ ,  $\alpha_2 = 0.1731$ 。于是近似解为

$$\tilde{u} = 0.1947x(1-x) + 0.1731x^2(1-x)$$

(2) 最小二乘法。

取权函数为

$$W_1 = \frac{\partial R}{\partial \alpha_1} = -2 + x - x^2, \quad W_2 = \frac{\partial R}{\partial \alpha_2} = 2 - 6x + x^2 - x^3$$

代入  $\int_0^1 W_j R dx = \int_0^1 R \frac{\partial R}{\partial \alpha_j} dx = 0$ ，可得

$$\int_0^1 [x + \alpha_1(-2 + x - x^2) + \alpha_2(2 - 6x + x^2 - x^3)](-2 + x - x^2) dx = 0$$

$$\int_0^1 [x + \alpha_1(-2 + x - x^2) + \alpha_2(2 - 6x + x^2 - x^3)](2 - 6x + x^2 - x^3) dx = 0$$

求解上述的代数方程可得  $\alpha_1 = 0.1875$ ,  $\alpha_2 = 0.1695$ 。于是近似解为

$$\tilde{u} = 0.1875x(1-x) + 0.1695x^2(1-x)$$

(3) Galerkin 法。

取近似函数序列作为权函数。由于

$$\tilde{u} = N_1 \alpha_1 + N_2 \alpha_2 = \alpha_1 x(1-x) + \alpha_2 x^2(1-x) = N \alpha$$

其中,  $N = [N_1 \quad N_2]$ ,  $\alpha = [\alpha_1 \quad \alpha_2]^T$ 。

因而有

$$W_1 = N_1 = x(1-x), \quad W_2 = N_2 = x^2(1-x)$$

代入  $\int_0^1 W_i R dx = 0$ , 可得

$$\int_0^1 x(1-x)[x + \alpha_1(-2+x-x^2) + \alpha_2(2-6x+x^2-x^3)]dx = 0$$

$$\int_0^1 x^2(1-x)[x + \alpha_1(-2+x-x^2) + \alpha_2(2-6x+x^2-x^3)]dx = 0$$

求解上述的代数方程可得  $\alpha_1 = 0.1924$ ,  $\alpha_2 = 0.1707$ . 于是近似解为

$$\tilde{u} = 0.1924x(1-x) + 0.1707x^2(1-x)$$

对于该问题, 通过分部积分, 其近似等效积分的“弱”形式为

$$J = \int_0^1 W_j \left( \frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} + \tilde{u} + x \right) dx = \int_0^1 \left( -\frac{dW_j}{dx} \frac{d\tilde{u}}{dx} + W_j \tilde{u} + W_j x \right) dx + \left[ W_j \frac{d\tilde{u}}{dx} \right]_0^1 = 0 \quad (1)$$

由于近似函数为

$$\tilde{u} = N_1 \alpha_1 + N_2 \alpha_2 = N \alpha, \quad W_1 = N_1 = x(1-x), \quad W_2 = N_2 = x^2(1-x)$$

式(1)可写为

$$K \alpha = P$$

其中

$$K = \int_0^1 \left[ \left( \frac{dN}{dx} \right)^T \frac{dN}{dx} - N^T N \right] dx, \quad P = \int_0^1 N^T x dx$$

## 1.2.2 变分方法

对于一个连续介质问题, 未知函数  $u$  的泛函为

$$\Pi = \int_{\Omega} F \left( u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots \right) d\Omega + \int_{\Gamma} E \left( u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots \right) d\Gamma \quad (1-16)$$

其中,  $F$  和  $E$  是特定的算子,  $\Omega$  是求解域,  $\Gamma$  是  $\Omega$  的边界.

在变分方法中, 连续介质问题的解  $u$  是使泛函  $\Pi$  对于微小变化的  $\delta u$  取驻值, 即泛函的“变分”等于零

$$\delta \Pi = 0 \quad (1-17)$$

对于可以运用变分原理的问题, 可以建立其得到近似解的如下方法. 未知函数的近似解可表示成带有待定参数的试探函数

$$u \approx \tilde{u} = \sum_{i=1}^n N_i \alpha_i = N \alpha \quad (1-18)$$

式中,  $\alpha_i$  为待定参数,  $N_i$  是已知的函数序列. 将式(1-18)代入式(1-16), 得到用试探函数  $\tilde{u}$  和待定参数  $\alpha$  表示的泛函  $\Pi$ . 泛函的变分为零相当于将泛函对关于待定参数进行全微分, 并令其等于零, 即

$$\delta \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_1} \delta \alpha_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_2} \delta \alpha_2 + \dots + \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_n} \delta \alpha_n = 0 \quad (1-19)$$

由于  $\delta\alpha_1, \delta\alpha_2, \dots, \delta\alpha_n$  是任意的, 式(1-19)成立时必有  $\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_2}, \dots, \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_n}$  都等于零,

因而有

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_n} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (1-20)$$

由上述与待定参数的数目相等的方程组可求出  $\alpha$ .

如果在泛函  $\Pi$  中  $u$  及其导数的最高阶次为二阶, 则称泛函  $\Pi$  为二次泛函. 工程中的许多问题都属于二次泛函. 对于二次泛函问题, 式(1-20)退化为一线性方程组

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} = \mathbf{K}\alpha - \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (1-21)$$

对式(1-21)变分, 得

$$\delta \left( \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_1} \right) \delta \alpha_1 + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_1} \right) \delta \alpha_2 + \dots \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_n} \right) \delta \alpha_1 + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_n} \right) \delta \alpha_2 + \dots \end{bmatrix} = \mathbf{K} \delta \alpha \quad (1-22)$$

由矩阵  $\mathbf{K}$  的子矩阵

$$\mathbf{K}_{ij} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}, \quad \mathbf{K}_{ji} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \alpha_j \partial \alpha_i} \quad (1-23)$$

可知

$$\mathbf{K}_{ij} = \mathbf{K}_{ji}^T \quad (1-24)$$

即矩阵  $\mathbf{K}$  是对称矩阵.

由式(1-21)可将近似泛函表示成

$$\Pi = \frac{1}{2} \alpha^T \mathbf{K} \alpha - \alpha^T \mathbf{P} \quad (1-25)$$

这是因为对式(1-25)中的  $\Pi$  变分, 得

$$\delta \Pi = \frac{1}{2} \delta \alpha^T \mathbf{K} \alpha + \frac{1}{2} \alpha^T \mathbf{K} \delta \alpha - \delta \alpha^T \mathbf{P}$$

由矩阵  $\mathbf{K}$  的对称性, 有

$$\delta \alpha^T \mathbf{K} \alpha = \alpha^T \mathbf{K} \delta \alpha$$

因而

$$\delta \Pi = \delta \alpha^T (\mathbf{K} \alpha - \mathbf{P}) = 0$$

因为  $\delta \alpha$  是任意的, 可得  $\mathbf{K} \alpha - \mathbf{P} = 0$ , 即为式(1-25).

**【例 1.2】** 对于问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = -x & (0 \leq x \leq 1) \\ u(0) = 0, u(1) = 0 \end{cases}$$

建立其变分原理.

该问题的变分可表示为

$$\delta \Pi = \int_0^1 \left( -\frac{d^2 u}{dx^2} - u - x \right) \delta u dx + \left[ \frac{du}{dx} \delta u \right]_0^1$$

对方程中积分的第一项进行分部积分, 可得

$$\delta \Pi = \int_0^1 \left( \frac{du}{dx} \frac{d(\delta u)}{dx} - u \delta u - x \delta u \right) dx$$

利用变分算子的交换性

$$\delta \Pi = \delta \int_0^1 \left( \frac{1}{2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 - \frac{1}{2} u^2 - xu \right) dx$$

于是可得到泛函

$$\Pi = \int_0^1 \left( \frac{1}{2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 - \frac{1}{2} u^2 - xu \right) dx$$

### 1.2.3 Ritz 法

Ritz 法是从一族假定解中寻找满足泛函变分的最好解的近似方法. 在该方法中, 近似解的精度与试探函数的选择有关. 如果对所求解的性质了解, 则可通过选择反映解特性的试探函数来提高近似解的精度. 若精确解能够包含在试探函数中, 则 Ritz 法可求得精确解.

Ritz 法求解的过程与变分方法相同. 这里仍以例 1.1 中的算例来讨论.

**【例 1.3】** 对于问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = -x & (0 \leq x \leq 1) \\ u(0) = 0, u(1) = 0 \end{cases}$$

利用 Ritz 法求近似解.

方程中, 边界条件为强制边界条件. 可以选取不同的试探函数形式, 用 Ritz 法求解.

(1) 选取近似解为多项式.

$$\tilde{u} = \alpha_1 x(1-x)$$

满足边界条件, 且有

$$\frac{d\tilde{u}}{dx} = \alpha_1 - 2\alpha_1 x$$

将其代入该问题的泛函

$$\Pi = \int_0^1 \left( \frac{1}{2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 - \frac{1}{2} u^2 - xu \right) dx$$

可得到用待定参数  $\alpha_1$  表示的泛函

$$\Pi = \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} \alpha_1^2 (1-2x)^2 - \frac{1}{2} \alpha_1^2 x^2 (1-x)^2 - \alpha_1 x^2 (1-x) \right] dx = \frac{1}{2} \times \frac{3}{10} \alpha_1^2 - \frac{1}{12} \alpha_1$$

令泛函变分等于零

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_1} = 0$$

得

$$\alpha_1 = \frac{5}{18}$$

因而近似解为

$$\tilde{u} = \frac{5}{18} x(1-x)$$

(2) 选取近似解为正弦函数式。

$$\tilde{u} = \alpha_1 (\sin x - x \sin 1)$$

满足边界条件, 且有

$$\frac{d\tilde{u}}{dx} = \alpha_1 (\cos x - \sin 1)$$

将其代入该问题的泛函

$$\Pi = \int_0^1 \left( \frac{1}{2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 - \frac{1}{2} u^2 - xu \right) dx$$

可得到用待定参数  $\alpha_1$  表示的泛函

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} \alpha_1^2 (\cos x - \sin 1)^2 - \frac{1}{2} \alpha_1^2 (\sin x - x \sin 1)^2 - \alpha_1 x (\sin x - x \sin 1) \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \alpha_1^2 \sin 1 \left( \frac{2}{3} \sin 1 - \cos 1 \right) - \alpha_1 \left( \frac{2}{3} \sin 1 - \cos 1 \right) \end{aligned}$$

令泛函变分等于零

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_1} = 0$$

得

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sin 1}$$

因而近似解为

$$\tilde{u} = \frac{\sin x}{\sin 1} - x$$

上式等于精确解, 其原因是所选取的试探函数正好包含了该问题的精确解。

## 1.2.4 能量原理

在线弹性结构计算中, 通常要用到基于变分原理的最小势能能量原理和最小余能原理, 在此给出有关的表达式。



### 1. 弹性力学的基本方程

在线弹性力学中, 在载荷的作用下弹性体内任一点的应力状态可由 6 个应力分量  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\sigma_z$ 、 $\tau_{xy}$ 、 $\tau_{yz}$  和  $\tau_{zx}$  来表示, 写成矩阵形式为

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]^T \quad (1-26)$$

弹性体内任一点的位移可由沿直角坐标轴方向的 3 个位移分量  $u$ 、 $v$  和  $w$  来表示, 矩阵形式为

$$\boldsymbol{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [u \quad v \quad w]^T \quad (1-27)$$

弹性体内任一点的应变可由 6 个应变分量  $\varepsilon_x$ 、 $\varepsilon_y$ 、 $\varepsilon_z$ 、 $\gamma_{xy}$ 、 $\gamma_{yz}$  和  $\gamma_{zx}$  来表示, 矩阵形式为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}]^T \quad (1-28)$$

在弹性体  $V$  域内的平衡方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned} \quad (1-29)$$

且有

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (1-30)$$

式中,  $X$ 、 $Y$  和  $Z$  为单位体积的体积力在坐标轴上的分量.

力学边界条件(在力边界  $S_\sigma$  上)为

$$\begin{aligned} \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n - \bar{X} &= 0 \\ \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n - \bar{Y} &= 0 \\ \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n - \bar{Z} &= 0 \end{aligned} \quad (1-31)$$