三角學

何祚豐編

一

大東書局出版

三角學

何祚豐 編
沈傳良 校

大東書局出版

三角學內容提要

本書係根據蘇聯中等技術學校數學教學大綱編著，並作有系統的簡明敍述。書中開始即灌輸函數及動的觀念，羅列了大量機械工業及建築工程上的實用例題，在若干問題上特別介紹用圖解法使人清晰的概念。書的末章又補充了研究電機工程的必要知識——正弦曲線的討論。全書一冊，如採爲中等技術學校教本，可於六十四小時至八十小時間授完，有相當於初中及其以上文化程度的技工，亦可用以自修。

三　角　學　　　書號：5129

編著者	何　祚　豐
校閱者	沈　傳　良
出版者	大　東　書　局 上海福州路 310 號
印刷者	導　文　印　刷　所 上海威海衛路 357 弄

25 開　70 印刷頁　120,000 字　定價 7,000 元

一九五四年一月初版

(0001—3000)

上海市書刊出版業營業許可證出 043 號

上海市書刊發行業營業許可證發 061 號

三角學目錄

第一章　函數及圖象 …… 1
(1·1)　函數 …… 1
(1·2)　坐標 …… 2
(1·3)　角 …… 3
(1·4)　三角函數的定義 …… 4
(1·5)　三角函數的符號 …… 6
(1·6)　在單位圓上用線段來顯示函數 …… 6
第二章　銳角的三角函數 …… 9
(2·1)　銳角三角函數的定義 …… 9
(2·2)　按已知角的某種三角函數值求作該角 …… 10
(2·3)　角由 0° 變化到 90° 時每個函數的變化 …… 10
(2·4)　同角的三角函數間的相互關係 …… 13
(2·5)　餘角、餘函數 …… 14
(2·6)　30°、45° 與 60° 的三角函數值 …… 15
(2·7)　三角函數表的用法 …… 16
(2·8)　解直角三角形的四種基本類型 …… 20
(2·9)　一些例題 …… 22
第三章　角的弧度法 …… 37
(3·1)　弧度法的概念 …… 37
(3·2)　由度化弧度及由弧度化度 …… 37
(3·3)　最常用角的度數與弧度的換算 …… 38
(3·4)　一些例題 …… 40

第四章 任意角的三角函數……48
(4·1) 角由 0° 變化到 360° 時三角函數值的變化……48
(4·2) 用一個已知的三角函數表示該角的任意三角函數……49
(4·3) 按已知的三角函數值求作該角……51
第五章 誘導公式、三角函數的週期性、三角函數的圖象……54
(5·1) 化任意的三角函數爲銳角的三角函數……54
(5·2) 化負角的三角函數爲正角的三角函數……57
(5·3) 三角函數的週期性……58
(5·4) 三角函數的圖象……59
(5·5) 與一三角函數值對應的角的一般形式……61
(5·6) 一些應用題……62
第六章 和角、倍角與半角的三角函數……71
(6·1) 兩角和及兩角差的三角函數……71
(6·2) 倍角與半角的三角函數……73
(6·3) 一些練習題……74
第七章 三角函數的和差化積法……78
(7·1) 三角函數的和差化積公式……78
(7·2) 實用的練習題……80
(7·3) 用三角函數的對數來計算……84
第八章 反三角函數……87
(8·1) 反三角函數的概念……87
(8·2) 反三角函數是多值的……87
(8·3) 主值……88
第九章 斜三角形的計算……90
(9·1) 正弦定理……90
(9·2) 餘弦定理……91

(9·3) 斜三角形的解法 ……92
第十章 三角方程式 …… 104
(10·1) 三角方程式的種類 …… 104
(10·2) 練習題 …… 105
第十一章 關於正弦曲線的研究 …… 110
(11·1) 正弦曲線 …… 110
(11·2) 兩個或許多個正弦函數的代數和 …… 117
(11·3) 周期相同正弦函數的乘積 …… 121

第一章 函數及圖象

(1·1) 函數

在整個數學的領域內，我們將數量分成爲兩類：一類叫變數，一類叫常數。凡是在研究問題的過程中，一種數量是可以被任意地、或有限度地變動它的值的，它就被叫做爲變數。凡是在研究問題的過程中，那種數量是常保持着同等的值的，它就被叫做爲常數。在數學、物理、工業以及生活中，我們要研究的不祗是單獨在變動的一個變數，而却是要研究很多的變數及它們之間互相的連系與關係；祇有在掌握了它們——客觀的規律，我們才能進而發展到運用它們來爲我們人類謀幸福。

假如一個數與另一個變數間存在着一定的關係，當那變數變化時，這數就隨着它而變化，那末我們就稱這數爲因變數或函數，而稱那變數爲自變數。

例如在式子 $y=x+2$

中，x 爲自變數，y 就是 x 的函數。又例如圓的面積是半徑的函數。

不獨在數學中有函數存在，它在我們的日常生活、工程及經濟事業中到處存在。

例如在物理上，公式 $v=\frac{s}{t}$

中，如果 s 代表路程爲一定的長短時，它是一個常數，這時速度 v 便是變數時間 t 的函數。反過來說，時間 t 亦是速度 v 的函數。

音調的高低是振動數的函數。

三角學中要討論到三角函數，三角函數就是角的函數。那就是說

當角變化時，其它的量也隨着而變化。或者反過來時，其它的量變化時角也跟着變。

例如我們站在地上仰頭看旗杆頂，我們的頭與地平面成一個仰角，當我們仍站在原地將目光注視到在同一遠近距離旗杆旁的塔尖時，我們的頭與地平面所成的仰角就較大了（圖1）。從生活的經驗中，我們知道塔比旗杆高，因而覺察到角與高度之間的關係。這就是三角函數在生活中例子之一，以後要詳細地討論。

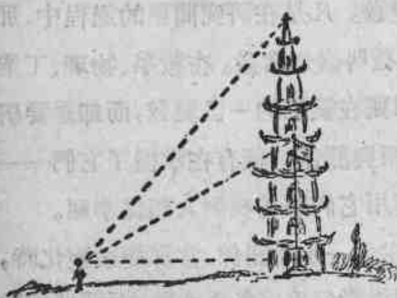

圖 1

(1·2) 坐標

爲了要敍說一個圖形的形象與位置，有一種方法是用直角坐標制來表示，在紙平面上打一個十字線，十字線的交點稱爲原點。橫線稱爲橫軸，或叫它爲X軸，豎線稱爲縱軸，或叫它爲Y軸，兩根軸相交分平面成四個象限（圖2）。在X軸上從原點O向右爲正，向左爲負；在Y軸上從原點O向上爲正，向下爲負。以正X軸與正Y軸相夾的象限爲第一象限，按照與時針運動相反的方向（反時針方向）定出其它象限的序次。於是在平面上的任何一點，就可被描述它的位置。過點P引一平行於Y軸的線交X軸於A點，AP就是P點的縱坐標（通常稱作y），OA就是P點的橫坐標（通常稱作x）（圖3）。

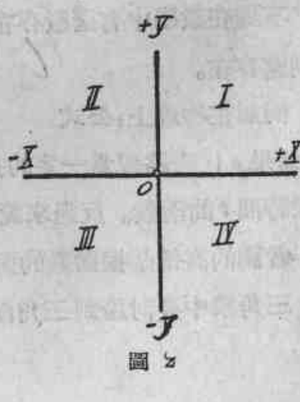

圖 2

所以祇要在選取了一個直角坐標軸與一個用來量坐標長度的長度單位時，於是在直角坐標系內的一個點就

總有兩個坐標，而兩個坐標也就能確定一點的位置。

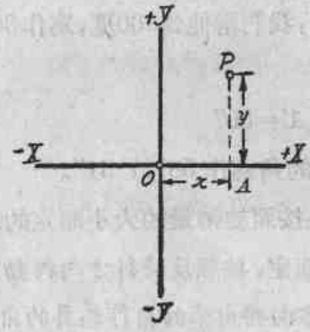

圖 3

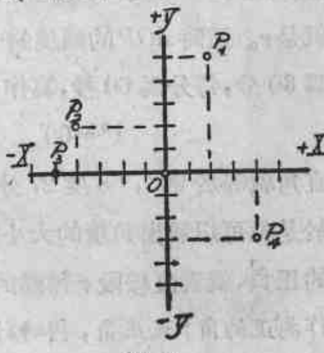

圖 4

例如圖 4 中 P_1 的 $x=2, y=5$，寫作 $P_1(2,5)$，P_2 應是 $P_2(-4,+2)$，P_3 是 $P_3(-5,0)$，$P_4(4,-3)$。

各個象限內任意點坐標的符號可歸納成表(1·1)

表 1·1

象　限	I	II	III	IV
橫坐標 x	+	−	−	+
縱坐標 y	+	+	−	−

(1·3) 角

選取一定長短的直線段 r，在直角坐標中將 r 的左端與原點 O 疊合，右端與 $+X$ 軸相疊合在 A 處。按反時針方向轉動直線段 r，OA 爲直線段 r 的開始時位置，叫它爲初邊或不動徑；OP 爲直線段 r 停止運動時的位置，叫它爲終邊或動徑(圖 5)。AOP 就是由旋轉開始到旋轉結束時 r 所經過的幅度，或者說 AO 與 OP 構成一個角度 AOP。無疑地 r 由初邊 OA 位置運動迴轉一圈到原

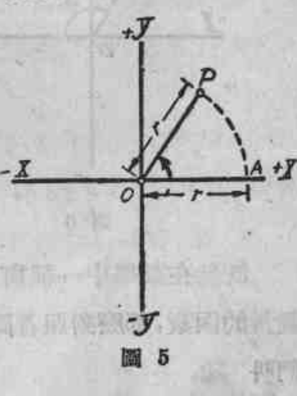

圖 5

來位置終止時，OP 與 OA 重疊，P 點所走過的路程為一個圓周，它的半徑就是 r。這時 AOP 的幅度為一個圓，我們稱他為360度，寫作360°，每度為 60 分，每分為 60 秒，寫作

$$1° = 60' \qquad 1' = 60''$$

一個直角就等於 90°，58 度 27 分 31 秒的角寫作 58°27′31″。

於是就可以看出角度的大小完全是按照旋轉量的大小而定的。至於角的正負，就看直線段 r 轉動的方向而定，按照反時針方向轉動出來的角作為正的角；或正角，與時針向同方向轉出來的角作為負的角；或負角。角度的終邊停止在那個象限內時，就是說那是第幾象限的角度。例如圖 5 是第一象限的角，而圖 6 卻是第二象限的角。

(1·4) 三角函數的定義

圖 7 中 P 點是在終邊上並與 O 點有區別的任意一點；它的坐標是 x 及 y，它離開 O 點的距離是 r。我們叫 r 為半徑，並在計算中總當它是正的。

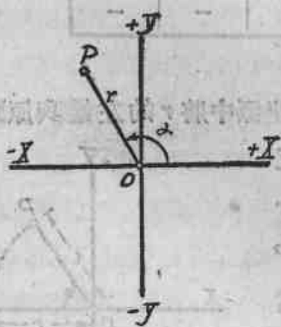

圖 6

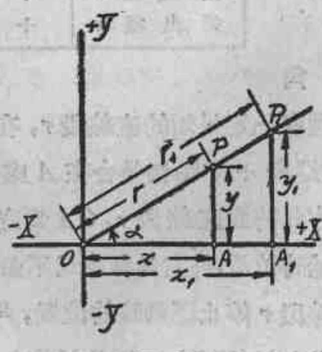

圖 7

既然在數學中一種與另一數量結着某種關係的數量，被稱為另一數量的函數，那麼對照着圖 7，我們就可以寫出以下一些三角函數。我們叫

$$\left.\begin{aligned}&\text{角 }\alpha\text{ 的正弦函數簡寫爲}\quad \sin\alpha=\frac{\text{縱坐標}}{\text{半徑}}=\frac{y}{r}\\&\text{角 }\alpha\text{ 的餘弦函數簡寫爲}\quad \cos\alpha=\frac{\text{橫坐標}}{\text{半徑}}=\frac{x}{r}\\&\text{角 }\alpha\text{ 的正切函數簡寫爲}\quad \tan\alpha=\frac{\text{縱坐標}}{\text{橫坐標}}=\frac{y}{x}\\&\text{角 }\alpha\text{ 的餘切函數簡寫爲}\quad \cot\alpha=\frac{\text{橫坐標}}{\text{縱坐標}}=\frac{x}{y}\end{aligned}\right\}\quad(1\cdot1)$$

除了這四個三角函數之外，還有兩個如下，不過以後在計算中將不再用它們了。

$$\text{角 }\alpha\text{ 的正割函數爲}\quad \sec\alpha=\frac{\text{半徑}}{\text{橫坐標}}=\frac{r}{x}$$

$$\text{角 }\alpha\text{ 的餘割函數爲}\quad \operatorname{cosec}\alpha=\frac{\text{半徑}}{\text{縱坐標}}=\frac{r}{y}$$

從上面我們可以看到凡是三角函數如正弦、餘弦、正切、餘切等都是兩個長度的比，因此它們都是不名數，或者說是它們都是沒有單位的。所以任何一個量被這些函數中之一來乘或除時，得出的積或商的單位仍與原量相同。例如一個“力”乘上一角的餘弦仍是一個“力”，一個“長度”被一個正弦去除時，仍得一個“長度”。

在式(1·1)中，各三角函數的大小並非孤立地與 x、y、r 的大小有關，而卻是正確地與那些比例值 $\frac{y}{r}$、$\frac{x}{r}$、$\frac{y}{x}$、$\frac{x}{y}$ 緊密地相關連。祇要是角度 α 不變，或者說，祇要是 P 點始終在這已停止運動的終邊上活動時，比例值 $\frac{y}{r}$、$\frac{x}{r}$、$\frac{y}{x}$、$\frac{x}{y}$ 總是保持它們的值不變，也就是說角 α 的三角函數不變。

我們可以很容易地從圖 7 中看出：當 P 點在終邊上移到 P_1 時，它距 O 點的距離爲 r_1，距 X 軸爲 y_1……。按照式(1·1)的叫法，對於 P_1 時的正弦函數，假如叫它爲 $\sin_1\alpha$，正切函數爲 $\tan_1\alpha$ 時，則

$$\sin_1\alpha=\frac{y_1}{r_1},\qquad \tan_1\alpha=\frac{y_1}{x_1}$$

從 $\triangle OPA$ 及 OP_1A_1 的相似來看，

$$\frac{y}{r}=\frac{y_1}{r_1}, \qquad \frac{y_1}{x_1}=\frac{y}{x} \cdots$$

所以 $\sin_1\alpha=\sin\alpha$, $\tan_1\alpha=\tan\alpha$。因而我們說：角度不變時，它的三角函數不變。反過來說，在以後我們也將看到，當角度變化時，那些比値都發生了變化，也就是說三角函數發生了變化。這也就是 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$、$\tan\alpha$、$\cot\alpha$ 等為什麼叫做為 α 角的三角函數的原因。

(1·5) 三角函數的符號

因為式(1·1)內含有坐標，所以從現在起每個三角函數都有符號；並且因為 r 總是被作為正的值，所以

正弦的符號就是縱坐標 y 的符號，

餘弦的符號就是橫坐標 x 的符號。

除此之外正切函數與餘切函數的符號總是相同的。

由式(1·1)並連同表(1·1)便得三角函數在各象限的符號列成表(1·2)

表 1·2

象　限	I	II	III	IV
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\tan\alpha$	+	−	+	−
$\cot\alpha$	+	−	+	−

表 1·3

sin	全
tan cot	cos

為了便於記憶起見，也可畫一個表如表(1·3)，各按象限的位置註上那種是正的函數。

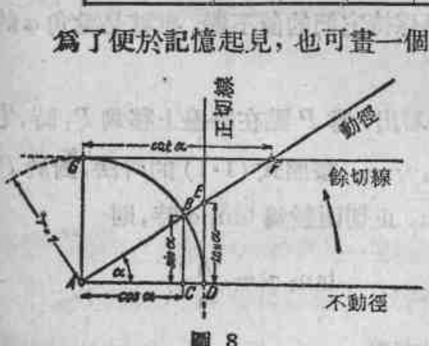

圖 8

(1·6) 在單位圓上用線段來顯示函數

一個任意角的所有三角函數值可以很簡單地用線段來顯示。在圖 8 中 α 是已知角；在

角頂 A 處用單位長度作半徑畫段圓弧（這就是單位圓的一部份）；並在點 D 及 G 處引切線。由圖中得如下的式子：

$$\sin\alpha=\frac{BC}{AB}=\frac{BC}{1}=BC \qquad \text{簡成 } \sin\alpha=BC$$

$$\cos\alpha=\frac{AC}{AB}=\frac{AC}{1}=AC \qquad \text{簡成 } \cos\alpha=AC$$

$$\tan\alpha=\frac{BC}{AC}=\frac{DE}{AD}=\frac{DE}{1}=DE \qquad \text{簡成 } \tan\alpha=DE$$

$$\cot\alpha=\frac{AD}{DE}=\frac{FG}{AG}=\frac{FG}{1}=FG \qquad \text{簡成 } \cot\alpha=FG$$

在這裏三角函數值是用線段表示出來了（在以前的說法它們都是一個純粹的數字）。其所以能如此的原因，是因爲我們在相比的分子式中將分母選爲 1 的原故。所以假如圓的半徑是 1 時，那些線段 BC、AC 等的長度就與那個與它相對應的三角函數值相等。這些線段就被稱作爲三角函數線。例如 BC 稱爲正弦線，ED 稱爲正切線等。

在圖 8 中圍着 A 點轉動動徑 AF 到另一個位置，於是角度 α 就變了，同時不難想像三角函數値亦變了。任意的一個角 α 都有它固定的四個函數値用線段 BC、AC、DE 及 GF 來顯示。

現在我們使式(1·1)中分數中的分母等於 1，於是便可得到式子

$$\sin\alpha=y \text{ 及 } \cos\alpha=x \qquad (1\cdot2)$$

卽是說：任意角的正弦值及餘弦值與動徑及單位圓相交點的坐標相同。（當然先應假定不動徑仍與橫軸相重疊，參考圖 9 及 10）。

$\tan\alpha$ 及 $\cot\alpha$ 亦可同樣地用線段來表示。假如將 P 點移至 C 點，

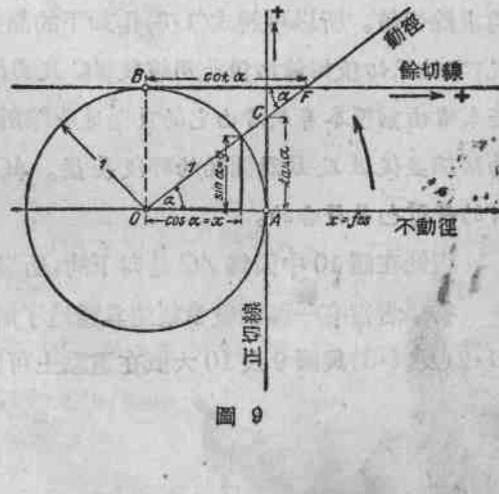

圖 9

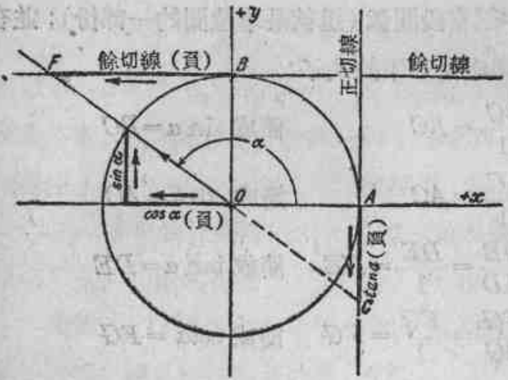

圖 10

就是 A 處切線與動徑相交的一點位置。於是，因爲 $OA=1$，所以 $\tan\alpha=AC$。F 點的坐標是 $x=BF$ 及 $y=BO=r=1$，所以 $\cot\alpha=x:y=BF$，於是得

$$\tan\alpha=AC \text{ 及 } \cot\alpha=BF \qquad (1\cdot3)$$

這兩個式子還需加以說明，假如角 α 是如圖 10 的一個鈍角，則動徑與垂直的那根正切線就踫不着了；這時我們定正切值就不再用動徑本身，而祇用它反向的延長線與 A 處的正切線相交線段，因爲從圖中三角形的相似，可得

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{AC}{OA}=AC$$

同樣的方法亦將用於第三象限的角求正切值及第三與第四象限的角求餘切值。所以可將式(1·3)作如下的簡括：*對於任何一個角度 α 來說，它的正切值與餘切值是用線段 AC 及 BF 來表示；這些線段是指那些或者由動徑本身或者由它的反向延長線所割出的，在 A 及 B 點所引的切線並從 A 及 B 點開始的那段長度。AC 及 BF 定出 $\tan\alpha$ 及 $\cot\alpha$ 時的符號也是符合的。*

因此在圖 10 中因爲 AC 是向下的，所以它是負的。

初學者常有一種願望希望能具體地了解或看見這些三角函數，式(1·2)及(1·3)與圖 9 及 10 大概在這點上可以有些幫助。

第二章　銳角的三角函數

(2·1) 銳角三角函數的定義

銳角的定義是小於 90° 的角，所以它一定在第一象限內。在四個象限之內，我們現在祇討論着這一特殊情形——第一象限的角——的時候，便可從圖 7 中畫出一個直角三角形如圖 11。

在這時候，比照着圖 7，圖 11 中角 α 的三角函數就成為以下的關係：

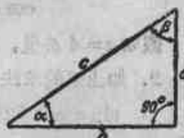

圖 11

1. 正弦　一個銳角的正弦就是這隻角的對邊比斜邊(圖 2)。

$$\sin\alpha=\frac{a}{c}=\frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}$$

2. 餘弦　一個銳角的餘弦是這隻角鄰邊與斜邊的比。

$$\cos\alpha=\frac{b}{c}=\frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}$$

3. 正切　一個銳角的正切是這隻角對邊與鄰邊的比。

$$\tan\alpha=\frac{a}{b}=\frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}$$

4. 餘切　一個銳角的餘切是這隻角鄰邊與對邊的比。

$$\cot\alpha=\frac{b}{a}=\frac{\text{鄰邊}}{\text{對邊}}$$

5. 正割　斜邊與鄰邊的比。

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{c}{b}=\frac{\text{斜邊}}{\text{隣邊}}$$

6. 餘割　斜邊與對邊的比。

$$\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{c}{a}=\frac{\text{斜邊}}{\text{對邊}}$$

所以要列出這關係,無非因爲是在日常遇見的問題上,常有直角三角形,對於它來計算時,這用邊來表示的辦法給予我們一定程度的便利。

練 習

以下的題中 a 及 b 總是代表直邊,c 代表斜邊,α 在 a 邊的對面,如圖 11。

1. $a=4$ 公分,$b=3$ 公分,求角 α 的各三角函數。

先求得 $c=\sqrt{4^2+3^2}=5$ 公分。所以

$\sin\alpha=4:5=0.8000,\quad \tan\alpha=4:3=1.333,$

$\cos\alpha=3:5=0.6000,\quad \cot\alpha=3:4=0.7500$。

假如 $a=4$ 公里,$b=3$ 公里;或 $a=16$ 公尺及 $b=12$ 公尺時,應得同樣的結果。

2. 如上題的求法,假使 $a=28$;$b=45$ 公分。求得

$\sin\alpha=0.5283,\quad \cos\alpha=0.8491,\quad \tan\alpha=0.6222,\quad \cot\alpha=1.607$

(2·2) 按已知角的某種三角函數值求作該角

例如已知 $\tan\alpha=0.8$,於是畫一個直邊相比等於 $a:b=0.8$ 的直角三角形。例如選 $a=8$;$b=10$ 公分或 $a=4$;$b=5$ 公分,這三角形中便有角 α。

練 習

1. 畫出角 α,假如 $\tan\alpha=1.6$;並從圖中定出 $\sin\alpha$ 及 $\cos\alpha$ 的大小。求得結果 $\sin\alpha=0.85,\quad \cos\alpha=0.53$。

2. 畫出角 α,假如:

$\tan\alpha=1,\quad \tan\alpha=0.2;\ 0.4;\ 0.6,\quad \sin\alpha=0.5,\quad \cos\alpha=0.5,$

$\cos\alpha=0.25,\quad \sin\alpha=1.2$ (不可能)。

(2·3) 角由 0° 變化到 90° 時的每個函數的變化

a) 正弦函數(圖 12) 圖 8 中的四分之一圓現在用較大的比例尺度畫如圖 12 的左面部份。圓弧上的分點是屬於角度 $\alpha=0°、10°、20°、\cdots\cdots 90°$ 的。動徑的每個位置就不再畫了,衹畫出它各個垂直的正弦線。爲了要使我們看清楚角度及其正弦値間的關係,就將單位圓上的正弦線高度平行地向右移到垂直坐標的各個對應位置上去,橫坐標的長度

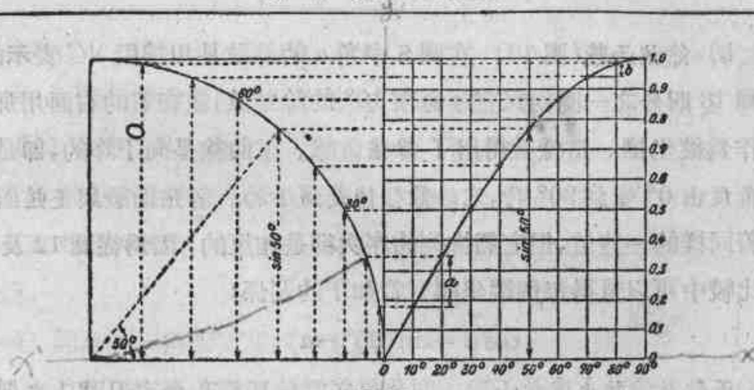

圖 12

單位可以選爲每隔相等距離相當於角的10°。將每個縱坐標的末端點相連成一個連續的曲線，就得到正弦曲線或正弦函數的幾何形象。在公厘方格紙上畫出圖12；半徑選爲10公分長；水平距離0°–10°、10°–20°……可以選爲1公分。在圖中我們將要學習到什麼呢？

這曲線是向上升的，卽是說：角度由0°變化到90°時，它的正弦亦隨着加大，並且是從0加大到1。在0°的附近是較90°的附近增加得更快些。在圖中可以比較一下，同樣是增加10°的角，在10°到20°間及70°到80°間相對應的增加段 a 及 b 是說明了怎樣一個情形，角度與正弦並非成正比。例如 sin 60° 並非 2 sin 30°。

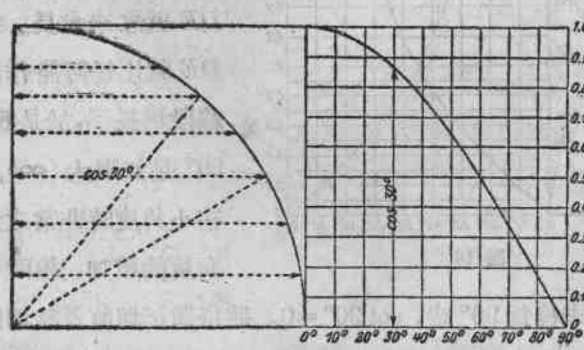

圖 13