〔澳〕陶哲轩(Terence Tao) 著
〔加〕于青林 译 潘承彪 校

## 解题·成长·快乐

# 陶哲轩教你学数学

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

# 陶哲轩教你学数学

# 解题·成长·快乐

〔澳〕陶哲轩(Terence Tao) 著
〔加〕于青林 译　潘承彪 校

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

著作权合同登记图字：01-2007-0729



**图书在版编目(CIP)数据**

解题·成长·快乐——陶哲轩教你学数学/〔澳〕陶哲轩(Terence Tao)著；〔加〕于青林译. —北京：北京大学出版社，2009.7

ISBN 978-7-301-15447-2

Ⅰ.解… Ⅱ.①陶… ②于… Ⅲ.数学-学习方法
Ⅳ.O1-4: G624.3

中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第111614号

书　　　名：解题·成长·快乐——陶哲轩教你学数学
著作责任者：〔澳〕陶哲轩(Terence Tao)　著　〔加〕于青林　译
责 任 编 辑：曾琬婷　孙　琰
标 准 书 号：ISBN 978-7-301-15447-2/G·2645
出 版 发 行：北京大学出版社
地　　　址：北京市海淀区成府路205号　100871
网　　　址：http://www.pup.cn　电子邮箱：zpup@pup.pku.edu.cn
电　　　话：邮购部62752015　发行部62750672　编辑部62752021
　　　　　　出版部62754962
印　刷　者：北京宏伟双华印刷有限公司
经　销　者：新华书店
　　　　　　650毫米×980毫米　16开本　9.25印张　100千字
　　　　　　2009年7月第1版　2009年7月第1次印刷
定　　　价：20.00元

---

# 中译版序言

这是一本适合中学生的数学读物。北京大学出版社和潘承彪教授嘱我为它写序言，因为我曾见过少年陶哲轩。1986年第27届国际数学奥林匹克(IMO)在波兰华沙举行。在颁奖大会的休息大厅，我见到了陶哲轩，当时他10岁，是年龄最小的参赛者。他获得了铜牌，又是华裔，我就主动和他交谈。可惜他一句中文也不会说，我就告诉他，他的姓“陶”怎样写。1987年28届IMO在古巴举行，他获得银牌。在颁奖大会上我又见到了他。因相距甚远，我们双方就招手致意。1988年，第29届IMO在澳大利亚举行，他获得了金牌，可惜我未能参加。他在IMO历程上逐年进步，是很受业内人士称道的“神童”式人物。1995年我应邀为澳大利亚数学竞赛出题，我向澳大利亚的朋友问起他的情况，知道他在美国某大学攻读研究生。现在他已经是非常出色的职业数学家。

这本书中的题目，我相信多数他都自己动手做过。在得到了答案之后，对解题过程做了尽情细致的回顾，才能对解答过程分析得十分透彻，从中对解答的思路、技巧有很好的积累。我认为这本书就是这样产生的，而且书中用的中学生语言，值得我们的中学生借鉴。我们的同学解题只要结果，而忽视过程中的精彩心得，因此做出的解答是对的，但不甚漂亮。我认为这也是我们在IMO中金牌已逾百枚，却没有一个人得特别奖(IMO特别奖是奖给对某一题解法巧妙独特的人)的原因之一吧！

书中多处讲到数学的美。他在第一版序言中说到“……

把一个漂亮的、简洁的几何题用解析几何教科书的方法变成丑陋怪物般的方程来解，就不会给予我们成就感”。其实在澳大利亚中学数学教学中几何内容不多，一个中学生有如此见解是难能可贵的。在学习过程中不断追求数学的美感，才会不时产生思想火花，从而有了精彩独到的思路。

我们的前辈、大数学家华罗庚曾说过“天才在于积累”。陶哲轩的才华亦是不断地积累的，在中学时代就写出这样一本书，就是阶段性积累过程。我也多次听到过国内有这个那个少年有数学才思的学生，一入初中，就把高中数学都学完了，但很遗憾的是后来就没有下文了。这里奉劝一些家长、老师，要尊重教育规律，不要做拔苗助长的事，天才不是天生的。

本书所选择的问题是恰当的，不太难又很有想法，很多题目都选自“环球城市数学竞赛”。这是俄罗斯举办的一个国际数学竞赛，应该说这一竞赛的题目是很好的。现在国内有中译本《环球城市数学竞赛问题与解答(I, II)》(北京：开明出版社，2004)，有兴趣者亦可一试之。

裘宗沪

2009年7月初

# 原版第二版序言

这本书写于15年前，对于今天的我来说等于半个人生以前。在成长的日子里，我离家远赴异国他乡，考取研究生，教书，撰写研究论文，辅导研究生，结婚，并有了一个儿子。显然，现在我对生活与数学的理解，较之于15岁时改变了很多。我已有很长时间没有涉足解题竞赛了，因此如果我今天来写这样题材的书，那么将会和你正在读到的很不一样。

数学是一门涉及多方面的学问，我们关于它的经验和鉴赏力会随着时间的推移与经历的丰富而变化。当我是小学生时，形式运算的抽象美及其令人惊叹的、通过简单法则的重复而得出非凡结果的能力吸引了我；当我是高中生时，通过竞赛，我把数学当做一项运动，并享受解答设计巧妙的数学趣味题(正像本书中的问题一样)和揭开每一个奥秘的“窍门”时的快乐；当我是大学生时，初次接触到构成现代数学核心的丰富、深刻、迷人的理论和体系，使我顿起敬畏之心；当我是研究生时，我为拥有自己的研究课题而感到骄傲，并从对以前未解决的问题提供原创性证明的过程中得到无与伦比的满足。直到自己开始作为一名研究型数学家的职业生涯后，我才开始理解隐藏在现代数学理论和问题背后的直觉力及原动力。当意识到无论多么复杂和深奥的结果往往都是由非常简单，甚至是常识性的原理导出时，我感到欣喜。当抓住这些原理中的一个，且突然领会到它是如何照亮一个巨大的数学体系并赋予其活力时，“啊！”脱口而出，这真是令人惊奇的非凡体验。然而，仍有很多方面的数学有待发现。直到最

近，当我了解了足够多的数学领域后，才开始理解整个现代数学的努力方向及其与科学和其他学科的联系。

由于本书是我开始职业数学生涯之前完成的，当时我并不具备现在的洞察力和经验，因此书中许多地方的写法具有某种无知，甚至是幼稚的东西。我并不想太多地改变它们，因为年轻时的我比现在的我更能融入高中生的解题世界。然而，我对本书做了若干结构上的调整：用 LaTex 编排格式；把材料组织得我个人认为更有逻辑性；修改那些用词不准确、不当、混淆或结构松散的部分。我还增加了习题的数量。某些地方，内容有些过时(例如费马(Fermat)大定理现在已有了严格的证明)。现在我也意识到，书中的有些问题可以用更便捷、更简洁的“先进”数学工具来解决。但本书的目的并不是对问题提供最简洁的答案或给出最新的结论综述；而是要指明，刚接触一个数学问题时，我们应该如何去处理它，如何通过努力从不同角度尝试一些想法和排除另一些想法，以及如何通过有计划地处理，最终得到一个满意的解答。

我非常感谢 Tony Gardiner 对本书再版所给予我的鼓励和支持，以及我父母多年来的全力支持。我也被所有的朋友和这些年来我遇到的读过本书第一版的人所深深感动。最后(但并非不重要的)，我要特别感谢我的父母和 Flinder 医疗中心的计算机技术人员的支持，是他们从我老旧的苹果计算机(Macintosh Plus) 中复原了本书 15 年前的备份电子版！

陶哲轩

美国加州大学洛杉矶分校(UCLA)数学系

2005 年 12 月

# 原版第一版序言

古希腊哲学家普罗克洛斯(Proclus)曾说过："这，就是数学：她提醒你灵魂有不可见的形态；她赋予自己的发现以生命；她唤醒悟性，澄清思维；她照亮了我们内心的思想；她涤尽我们有生以来的蒙昧与无知……"[0]

而我喜欢数学，因为她有趣。

数学问题或智力题，对于现实中的数学(即解决实际生活问题的数学)是十分重要的，就如同寓言、童话和奇闻逸事对年轻人理解现实生活的重要性一样。已被其他人发现了优美解法的数学问题是"净化了的"数学，因为问题的表面东西已被剥去，展现出了它的有趣且(有望是)发人深思的形式。如果把学习数学比做勘探金矿，那么解决一个好的数学问题就近似于为寻找金矿而上的一堂"捉迷藏"课：你要去寻找一块金子，你知道这块金子是什么样的，它就在附近的某个地方，要到达那个地方不是太困难，是在你的能力所及的范围内，同时适当地给了你去挖掘它的合适工具(例如已知条件)。因为金子隐藏在一个不易发现的地方，要找到它，比随意挖掘更重要的是正确的思路和技巧。

在本书中，我将解决若干具有不同难度及从不同数学分支中选择的问题。标星号 * 的问题是较难的，因为，它们要么需要某些较深的数学知识，要么需要某些更巧妙的想法；标双星号 ** 的问题难度更大。有些问题后会附带一些习题，它

---

⓪, ①, ②, …表示校者所加的注，这些注全在本书最后的校后记及校注中。

们能用类似的方法解决或涉及类似的数学知识。在解这些题的同时，我将试图阐明解题的一般技巧。解题的两个要素——经验和知识，是不容易被写进书里的：要想获得它们，必须经历时间的磨炼。但是，书里有许多不需要多少时间就可学会的较简单的技巧；有一些分析问题的方法，它们有助于我们较易找到合理可行的处理问题的方案；也有一些系统的分类方法，利用它们可以把一个问题简化为若干相关联的较简单的子问题。然而，解答问题并不是事情的全部。让我们再来看寻找金子的例子，与仔细测量，并用一点儿地质学知识进行小规模的挖掘相比，如露天采矿似地用推土机把邻近地块统统挖一遍就更显得十分笨拙了。一个解法应该相对简洁，容易理解，并且有望达到优美。同时，它也应该有发现的乐趣。把一个漂亮的、简洁的几何题用解析几何教科书中的方法变成丑陋怪物般的方程来解，就不会有只用两行向量的解法所给予我们的成就感。

作为一个典型例子，请看以下欧几里得几何中的一个标准结果：

| 一个三角形的三条边的垂直平分线是共点的。 |
|---|

这一简洁的“一句话”命题可以用解析几何方法来证明。请读者试着自己花几分钟(几小时？)做一做，然后再看下面的解法：

**证明**　令这个三角形为$\triangle ABC$。设点 $P$ 是边 $AB$ 和 $AC$ 的垂直平分线的交点(图 1)。因为点 $P$ 在 $AB$ 的平分线上，所以$|AP|=|PB|$；同样地，因为点$P$在$AC$的平分线上，故$|AP|=|PC|$。结合这两个式子，得到$|BP|=|PC|$。这就意味着点 $P$ 必须在 $BC$ 的平分线上。所以，这三条垂直平分线共点 (顺便指出，点 $P$ 是$\triangle ABC$的外接圆的圆心)。 □

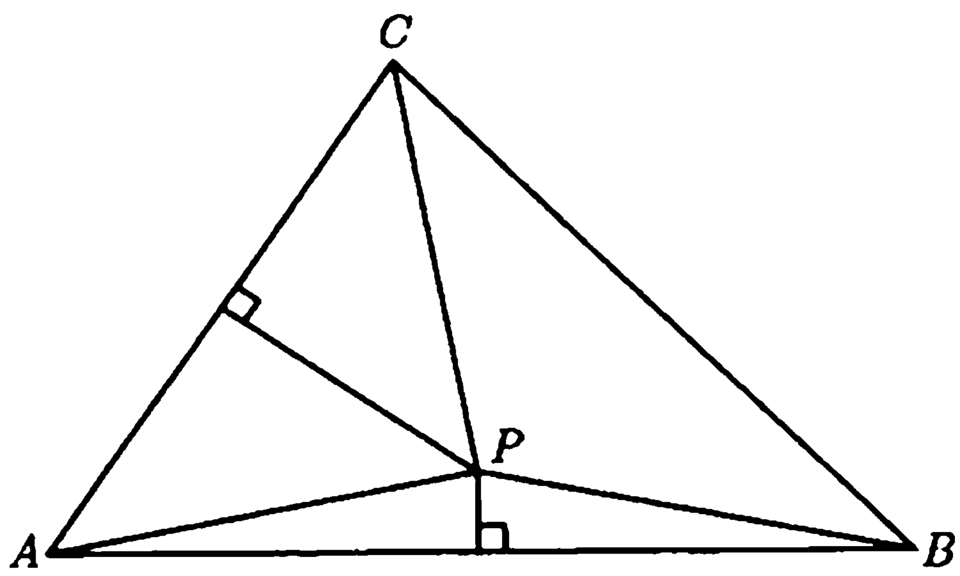


图 1

下面的简图(图 2)说明了如果点 $P$ 在 $AB$ 的垂直平分线上，为什么有结论$|AP|=|PB|$：用两个全等三角形就把这说清楚了。

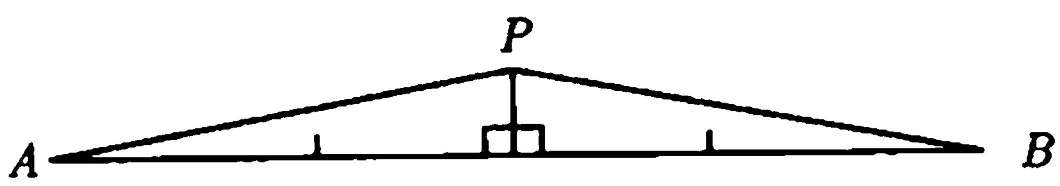


图 2

这种解法——把一些显然的事实相互结合在一起，导出一个不太显而易见的结论——正是数学之美的一部分。我希望你们也将欣赏到这种美！

**致谢**

感谢 Peter O'Halloran, Vern Treilibs 和 Lenny Ng 所提供的题目和建议。特别感谢 Basil Rennie 所做出的修正和有独创性的便捷解法。最后也感谢我的家庭所给予我的支持、鼓励，纠正我的拼写错误以及鞭策我完成写作计划。

书中几乎所有的题目都出自己出版的数学竞赛习题集；正文中标明了它们的出处，完整的信息见本书的参考文献。我也采用了少量从朋友处或其他数学出版物中获得的题目，这些则没有标明出处。

# 目 录

# 第一章 解题策略

千里之行，始于足下。

——老子

无论你是否认同这句格言，解答一个问题都起始，并继续，最终结束于简单、合乎逻辑的步骤。但是，只要有敏锐的目光，并以稳健的步伐朝着明确的方向前进，那么千里之行就将远远不需要走千千万万步。数学作为抽象的学问，并没有外部约束，人们总可以从头开始，尝试新的对策或随时返回前一步。而别的学问不一定有这样的灵活性(例如，当你回家迷路时要寻找回家的路)。当然，这并不能使解题变得容易；否则，这本书会薄很多。然而这样的特点却使解题变得可能。

有一些正确解题的一般策略和想法，波利亚的经典文献(Polya, 1957)谈到了其中的很多种。我们会在下面讨论某些策略，同时会简要说明其中每种策略如何运用于下面的问题：

> **问题 1.1** 一个三角形的三条边长构成公差为 $d$ 的等差数列，三角形的面积为 $t$。求这个三角形的边长和角度。

**理解问题**。这个问题属于哪种类型呢？数学中的问题主要分三类：

- “证明……”或“推算……”型问题。这类问题要求证明某个命题成立或推算某个表达式的值。
- “求……(值)”或“求所有的……(值)”型问题。这类

问题要求找出满足某些条件的一个或所有的值。

- “是否存在……”型问题。这类问题要求证明一个命题或给出一个反例。

问题的类型决定了解题的基本方法或方式，所以它至关重要。在“证明……”或“推算……”型问题中，从给定的信息入手，其目的是根据事先给出的信息推导出某个命题或计算出某个表达式的值。由于这类问题有清晰的目标，所以通常比另外两类问题来得容易。“求……(值)”型问题更依赖运气，通常要先猜一个相近的答案，再做些小的调整，使它更接近于正确答案；或者先修改题目的要求，使之更容易满足，再考虑原来的要求。“是否存在……”型问题通常是最难的，因为我们必须先判断讨论的对象是否存在，再提供证明或举出反例。



当然，并不是所有的问题都可以这样简单地归类。但通常问题的类型将提供解题的基本策略。例如，要解决这样的问题“在这座城市里找一个今晚可以睡觉的旅馆”，就应先把要求改成如“找一个在 5 km 以内的、有空闲房间的旅馆，且一晚房费不超过 100 美元”，然后采用排除法来找。这种策略比证明这样的旅馆存在或不存在要好，也可能比先随便选一家旅馆，然后证明是否适合休息要好。

在问题 1.1 这个“推算……”型问题中，需要在给定若干变量的情况下求出几个未知量。这就提示我们用代数方法建立多个联系 $d$, $t$ 以及三角形的三条边和三个角的方程，并最终求解未知量，而不是用几何方法。

**理解题目所给出的信息。**问题中给出了什么信息呢？通常，一个问题会提到若干个满足某些特定条件的对象。为了理解这些信息，需要观察它们和给定的要求之间是如何相互作用的。把注意力集中在选择恰当的技巧和符号上，这对解

决问题很重要。在我们的例题中，信息包括一个三角形、它的面积以及它的三条边长构成公差为 $d$ 的等差数列。因为有了一个三角形并考虑其边长和面积，所以我们就需要用有关三角形的边、角和面积的定理来解决问题，例如用正弦定理、余弦定理和面积公式等。我们还需要用符号来表示等差数列，例如三角形的边长可表示为 $a$, $a+d$ 和 $a+2d$。

**理解题目所要求的目标。**题目要求的目标是什么？也许是求一个值，证明一个命题，或决定一个具有某种特性的对象的存在性，等等。如同在“理解问题所给出的信息”部分所提到的那样，了解目标有助于我们集中精力选择最合适的解题工具，也有助于我们建立一个战术性的目标，使我们更接近于问题的解。在这个问题中，目标是“求这个三角形所有的边长和角度”。如前所述，这意味着我们需要有关三角形边长、角度的定理和公式。而我们的战术性目标是“找到有关三角形边长和角度的关系式”。

**选择恰当的符号。**我们理解了题意和目标后，还需要把它们用尽可能简单的形式有效地表达出来。这通常涉及前面所讨论的两种策略。在我们的例题中，已经考虑到建立有关 $d$, $t$ 以及三角形的边长和角度的方程。我们需要用变量表示三角形的边长和角度：可以设边长为 $a$, $b$, $c$；而角度记做 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$。然而我们可以用题目所给出的信息来简化这些符号：由于知道三条边长呈等差数列，因此可以用 $a$, $a+d$ 和 $a+2d$ 取代 $a$, $b$ 和 $c$。如果令边长为 $b-d$, $b$ 和 $b+d$，使之对称，这样会更好些。这种符号表示唯一的缺陷是，$b$ 必须大于 $d$。但进一步想，我们发现这不是一个真正的限制。实际上，$b>d$ 给我们提供了额外的信息。我们也可以做较大调整，把角度记为 $\alpha$, $\beta$, $180°-\alpha-\beta$。但是这种表示不好看，也不对称，所以最

好保持原来的符号，不过要记住 $\alpha+\beta+\gamma=180°$。

**用选定的符号表达你所知道的信息，并画一个示意图。**把所有的信息写在纸上，有三点好处：

(a) 解题时，便于参考；

(b) 陷入困境时，可以盯着纸进行思考；

(c) 把知道的写下来，这个过程本身可以激发新的灵感和联想。

但是请注意，不要写下过多的信息和细节。一种折中的办法是着重强调那些你认为最有用的事实，而把那些令人怀疑的、冗杂的或异想天开的想法写在另一张草稿纸上。下面是从这个问题想到的一些方程和不等式：

- (自然约束) $\alpha, \beta, \gamma, t>0$ 和 $b>d$。不失一般性地，我们还可以假设 $d\geqslant 0$。
- (三角形的三个角之和) $\alpha+\beta+\gamma=180°$。
- (正弦定理) $\dfrac{b-d}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{b+d}{\sin\gamma}$。
- (余弦定理) $b^2=(b-d)^2+(b+d)^2-2(b-d)(b+d)\cos\beta$，等等。
- (三角形面积公式)

$$t=\frac{1}{2}(b-d)b\sin\gamma=\frac{1}{2}(b-d)(b+d)\sin\beta=\frac{1}{2}b(b+d)\sin\alpha。$$

- (Heron 公式) $t^2=s(s-b+d)(s-b)(s-b-d)$，这里 $s=\frac{1}{2}[(b-d)+b+(b+d)]$ 是半周长。
- (三角不等式) $b+d\leqslant b+(b-d)$。

这些事实中，很多可能被证明是无用的或分散注意力的。但是利用某种判断法则，我们可以把有用的事实与无用的事实分离开来。由于我们的目标和信息都以等式的形式出现，

所以等式看上去比不等式更有用。另外，因为半周长可简化为$s=3b/2$，所以 Heron 公式看起来有望用得上。因此，我们把"Heron 公式"作为可能有用的事实重点标出来。

当然我们也可以画一张示意图(图 1)。通常这对于几何问题十分有用，但在我们的例题中这样的图似乎提供不了更多的信息。

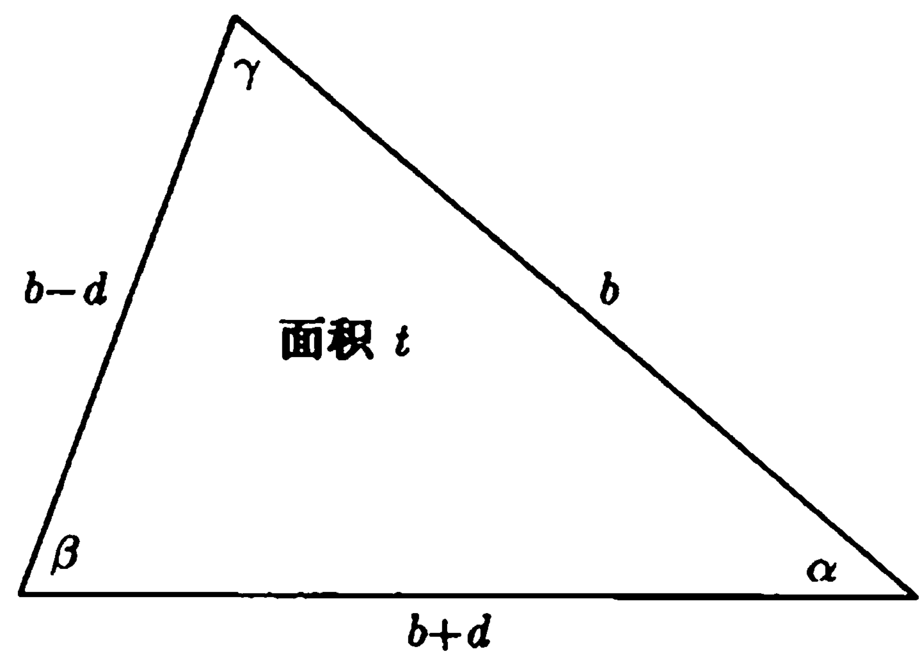


图　1

**对问题稍做修改**。可用很多种方法来修改问题，使其更容易处理，如：

(a) 考虑该问题的一种特定情形，例如极端情形或退化情形；

(b) 解决该问题的一种简化情形；

(c) 设计一个包含该问题的猜想，并试图先证明它；

(d) 导出该问题的某个推论，并试图先解决它；

(e) 重新表达该问题(例如用反证法证明其逆否命题，或者尝试其某种替代形式)；

(f) 研究类似问题的解；

(g) 推广该问题。

当你对一个问题无从下手时，上述方法是有帮助的，因为解决一个更简单的相关问题有时可以揭示解决原问题的思

路。同样地，考虑极端情形和解决带有附加假设的问题，也可以对问题的一般情形的解法有所启发。但是需要注意，特定情形本质上是特殊的，某些漂亮的技巧可以用来处理它们，却对一般情形毫无用处。这往往发生在特定情形过于特殊时。从适当地修改假设入手，可以保证你始终与原问题的本质尽可能地接近。

在问题 1.1 中，我们可以从 $d=0$ 的特定情形开始。这时，我们需要求出面积为 $t$ 的等边三角形的边长。用标准方法可计算得到 $b=2\sqrt{t}/\sqrt[4]{3}$ 。这说明一般解也应包括平方根或 4 次方根。可是，这个尝试并没有提供解决原问题的思路。别的类似的尝试也收获不大。这意味着，我们需要某种强有力的代数工具来解决这一问题。

**对问题做较大修改**。在这种大胆的策略中，我们对问题做出重要修改，例如去掉题目给出的条件，交换给出的条件和要求的目标，或者否定目标(例如尝试否定命题，而不是证明原命题)。我们不断尝试，直到找到问题的突破口为止，然后确定哪里是突破的关键，这样就确定了给定条件的关键所在以及难点所在。这种练习也有助于培养判断哪种策略可行而哪种策略不可行的直觉。



在我们这个特定的例题中，可以用四边形、圆等来代替三角形，只是收效甚微：问题变得更复杂了。但是，另一方面，可以看出，这个问题只需要求出三角形的边长和角度，而并不需要知道三角形所在的位置。因此，这进一步使我们确信，应把注意力放在三角形的边长和角度(即 $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$)上，而不是坐标几何或其他类似的方法。

我们可以忽略题目要求的某些目标，例如只求出三角形的三条边长，而不必求出三角形的角度。因为我们知道，根