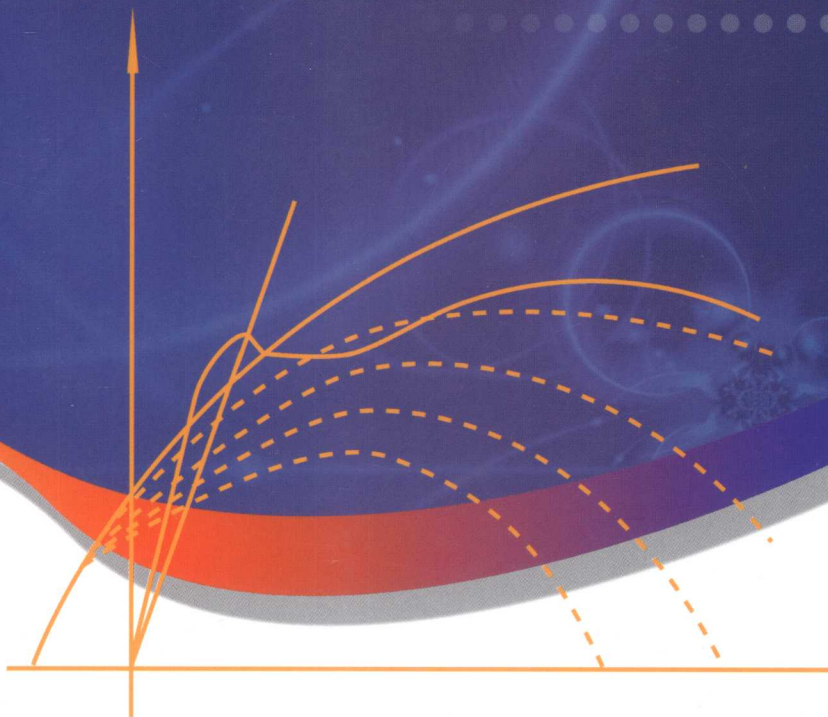




工程力学丛书



工程材料的本构演绎

卓家寿 黄 丹 编著



科学出版社
www.sciencep.com

工程力学丛书

工程材料的本构演绎

卓家寿 黄 丹 编著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书以连续介质体本构律为主线,系统论述了金属类、混凝土-岩石类和土壤类等常见工程材料的力学行为,剖析了经典的或实用的本构模型,通过详实的演绎导出各类材料的本构方程,并界定其适用条件,给出了确定有关本构参数的方法。

本书参照教科书格式编写,力求深入浅出,使其简明扼要;重点突出概念,使其思路明晰;演绎追求严密,使其结论明确。此外,全书的撰写始终保持广角度叙事和开放性分析的风格,使书中内容富有说理性、启迪性和可读性。

本书既可作为高等院校有关工科专业研究生和高年级本科生的教材,也可作为有关工程科技人员的自学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

工程材料的本构演绎/卓家寿,黄丹编著. —北京:科学出版社,2009
(工程力学丛书)

ISBN 978-7-03-024848-0

I. 工… II. ①卓…②…黄 III. 工程材料—材料力学—建立模型—研究
IV. TB301

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 103624 号

责任编辑:童安齐 / 责任校对:耿 耘

责任印制:吕春珉 / 封面设计:耕者设计工作室

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

双 青 印 刷 厂 印 刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009 年 7 月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2009 年 7 月第一次印刷 印张:14 3/4

印数:1—2 000 字数:335 000

定价:35.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈双青〉)

销售部电话 010-62134988 编辑部电话 010-62137026

版权所有,侵权必究

举报电话:010-64030229; 010-64034315; 13501151303

前 言

工程材料的本构行为一直是工程技术界和力学学术界关注的焦点之一。其研究热度之所以长盛不衰,一方面是由于它涉及工程的安全性,事关重大;另一方面则是因其机理复杂、个性突出,极富挑战性。面对这种势态,部分高校相继开设了有关材料本构行为的专门课程。

工程材料的本构研究由来已久,成果丰硕,但多半散见于科技文献或有关专业教科书的专门章节,而鲜有见到系统统一、演绎详实、论述集中的有关工程材料本构分析的专著或教材。为了满足有关工科专业研究生开课的需要,也为了给感兴趣的科技人员提供自学入门的读本,作者在总结、归纳前辈研究成果和个人科研体验的基础上,通过八年的教学实践,几经易稿,终于完成了这部统一以连续介质体本构律为主线、详实演绎工程材料物性的本构理论书稿,定名为《工程材料的本构演绎》,权当教材或参考书,冀望起到抛砖引玉的作用。

本书主要论述工程中常见材料的宏观本构行为,仅在描述某些异常宏观现象时引用物质微、细观结构的特性加以概括诠释。在这个框架内,本书采用宏观的唯象方法论述各类工程材料的本构行为,提出建模的思路与方法,即从分析和归纳宏观现象入手,提出假定、构建模型,通过力学数学的演绎导出本构方程,并给出其适用的条件以及有关参数的确定方法。

全书共分6章。第1章开宗明义,界定本构的含义和理想化的模型类别,给出普适的本构公理和完整的本构建模内涵。第2章和第3章是本书的基础模块,作为分析材料本构行为的铺垫;作者采用系统的归纳手法,广角度地阐述应力状态理论和应变状态理论,给出普适的静力平衡律和几何协调律的微分、积分和变分表达式,并论证不同表达方式的等价性。第4章、第5章和第6章是本书的主体模块,分别描述三类常见工程材料,即金属类、混凝土-岩石类和土壤类材料的本构行为,剖析传统的经典本构模型或具有代表性的实用本构模型,诠释其建模思路、依据和适用性。书中用较大篇幅阐述以金属类材料为背景的经典本构理论,并在此基础上加以推广,进而演绎出众多非金属类材料的半理论、半经验的实用本构方程,给出了完善模型的设想。

在书稿付梓之际,作者借此机会谨向关心和支持本书出版的河海大学土木工程学院工程力学系和众多同行、同事们表示诚挚的谢意。感谢博士后黄丹为全书稿进行校核和打印、制图,以及博士生秦剑峰在部分制图工作中所付

出的辛勤劳动,还特别感谢黄文雄教授在百忙之中为本书提供了宝贵的修改意见。本书的部分内容是作者在承担国家自然科学基金重点项目“深埋长大引水隧洞和洞室群的安全与预测研究”(项目编号:50539090)中获得的成果。此外,书中还引用了前辈、同行以及有关专家的研究成果和资料,在此一并表示衷心的感谢。

本书的出版得到了国家与江苏省重点学科——河海大学工程力学学科建设基金的支持,在此特致深切的谢意。

由于作者水平有限,书中不尽如人意之处在所难免,敬请读者不吝指正。

卓家寿

2009年3月

于南京清凉山

目 录

前言

第 1 章 绪论	1
1.1 本构关系概述	1
1.1.1 本构关系的泛义	1
1.1.2 理想物质的本构方程	1
1.1.3 本构律在固体力学中的地位	2
1.2 宏观物性的本构模型	2
1.2.1 弹性模型简介	3
1.2.2 弹塑性模型简介	3
1.2.3 粘弹塑性模型简介	3
1.2.4 弹塑性断裂与损伤模型简介	4
1.3 本构公理简介	4
1.4 本构建模的内涵	5
第 2 章 应力状态与平衡律	6
2.1 一点的应力与应力状态	6
2.1.1 应力与应力状态的定义	6
2.1.2 斜面上应力的求解	6
2.1.3 坐标转换的应力分量公式	7
2.2 应力张量的主值、主方向和不变量	8
2.3 最大(小)正应力与切应力	10
2.3.1 最大(小)正应力	10
2.3.2 最大(小)切应力	10
2.3.3 纯剪切状态的定义与充要条件	11
2.4 球应力与偏应力 偏应力张量的不变量	12
2.4.1 球应力与偏应力	12
2.4.2 偏应力张量的不变量	13
2.4.3 静水压力状态和纯剪切状态	14
2.5 应力空间与应力状态矢 偏平面与静水应力轴	16
2.6 s_i 、 σ_i 和 τ_i 的直接算式 Lode 参数	17
2.6.1 s_i 、 σ_i 和 τ_i 的直接算式	17
2.6.2 Lode 角与 Lode 参数	20
2.7 应力表示的图解法——Mohr 圆	22
2.8 静力平衡律 可能应力场	24

2.8.1	Lagrange 描述的平衡律(小变形问题)	25
2.8.2	Euler 描述的平衡律	27
2.8.3	平衡的普适性 可能应力场	30
第3章	应变状态与协调律	31
3.1	一点的位移	31
3.2	一点应变状态的多种等价表述	33
3.2.1	一点应变状态的应变张量表述	33
3.2.2	基于主应变或应变张量不变量的表述	35
3.2.3	基于应变球张量和偏张量的表述	36
3.2.4	一点应变状态的图解表示——应变 Mohr 圆	37
3.3	基于应变空间导出的 e'_i 、 ϵ_i 和 γ_i 公式	37
3.4	几何协调律 可能位移场	38
3.4.1	协调律的内涵	38
3.4.2	可能位移场	40
3.5	应变率 应变增量	40
第4章	金属类材料的本构理论	42
4.1	金属类材料的变形特性和本构解读	42
4.1.1	若干基本试验的成果	42
4.1.2	试验成果的启示与本构解读	45
4.2	弹性问题的本构研究	47
4.2.1	简述	47
4.2.2	线弹性材料的本构分析	50
4.2.3	非线性弹性材料的本构分析	54
4.3	弹塑性问题的本构研究	58
4.3.1	简述	58
4.3.2	屈服准则 应力空间中的屈服面	60
4.3.3	后继屈服准则与强化规律	64
4.3.4	塑性应变分析的理论基础	68
4.3.5	弹塑性体的本构关系	77
4.3.6	基于应变空间描述的弹塑性本构理论	82
4.4	粘弹塑性问题的本构研究	87
4.4.1	材料的黏性	87
4.4.2	粘弹性体的力学行为与本构建模	89
4.4.3	弹-粘塑性问题的本构建模	115
4.5	弹-粘塑性问题的有限单元法	123
4.6	关于损伤和断裂行为的本构研究	127
4.6.1	损伤行为的本构研究	127
4.6.2	断裂行为的本构研究	130

第 5 章 混凝土、岩石类材料的本构研究	134
5.1 混凝土岩石类材料的变形与受力特性	134
5.1.1 一维应力状态下混凝土的变形特性与强度	134
5.1.2 双轴受力状态下混凝土的变形特性与强度	136
5.1.3 三轴受力状态下混凝土的变形特性与强度	137
5.1.4 岩石变形的特性	138
5.1.5 对混凝土与岩石一类材料本构特性的若干认识	138
5.2 混凝土岩石类介质的破坏类型与准则	139
5.2.1 最大拉应力准则	140
5.2.2 Mohr-Coulomb 准则	141
5.2.3 Drucker-Prager 准则	144
5.2.4 Bresler 和 Pister 三参数模型	147
5.2.5 Willam-Warnke 破坏模型(W-W 模型)	148
5.2.6 Ottosen 四参数模型	153
5.2.7 Hsieh-Ting-Chen 四参数模型	154
5.2.8 Griffith 断裂破坏模型	156
5.3 混凝土作为非线性弹性介质的本构关系	158
5.3.1 一维应力状态下的应力-应变关系	158
5.3.2 二维应力状态下的应力-应变关系	159
5.3.3 三维应力状态下的应力-应变关系	162
5.4 混凝土岩石类材料作为弹塑性介质的本构关系	164
5.4.1 弹塑性理论	164
5.4.2 增量形式本构框架	166
第 6 章 土的本构分析	167
6.1 概述	167
6.2 土的变形与力学特性	168
6.2.1 典型土的变形特性	168
6.2.2 土的总应变与沉降	170
6.2.3 土体与金属受力特性的比较	171
6.3 土体本构分析的个性要点	171
6.4 土的非线性弹性本构模型	172
6.4.1 Duncan-Chang 模型	172
6.4.2 计及球张量和偏张量交叉效应的非线性弹性模型	176
6.5 土的弹塑性本构分析	179
6.5.1 简述	179
6.5.2 剑桥模型(弹塑性帽子模型)	184
6.5.3 修正的剑桥模型	187
6.5.4 基于修正剑桥模型的应力-应变关系	189

附录 固体力学问题的张量表述	193
1 指标符号	193
1.1 若干约定 哑标和自由标	193
1.2 Kronecker 记号 δ_{ij} 与排列(置换)符号 e_{ijk}	195
2 笛卡儿张量	198
2.1 坐标变换	199
2.2 笛卡儿张量的定义 并矢记号	201
3 张量代数 商法则	203
3.1 张量代数	203
3.2 商法则	206
4 常用的特殊张量	207
5 二阶张量	211
5.1 实对称张量的主方向和主分量	212
5.2 Cayley-Hamilton 定理	214
5.3 二阶张量的极分解(乘法分解)	214
6 张量场的若干常用公式	215
6.1 梯度	216
6.2 散度	216
6.3 旋度	217
6.4 Gauss 公式 Green 公式	218
6.5 Stokes 公式	219
7 物体的构形和坐标系	219
8 形变梯度(两点张量)和位移梯度	222
8.1 形变梯度	222
8.2 位移梯度	223
9 质点的速度 物质导数	223
参考文献	225

第1章 绪 论

1.1 本构关系概述

1.1.1 本构关系的泛义

本构关系(constitutive relations),泛指自然界中物体在某一类物理量作用下产生相关的响应量随物质而异的关系。该关系刻画了物质的属性,反映了物质特有的规律。例如,固体力学中应力与应变之间的关系,渗流力学中水力梯度与流速之间的关系,热力学中温度梯度与热流密度之间的关系,以及电学中电压与电流之间的关系等,都是描述某类相关物理量之间的本构关系。显然,材料的物性不同,其本构行为也不相同,相应的数学表达式(本构方程)也不一样。

本书主要论述工程中固体材料的本构行为和本构建模。

1.1.2 理想物质的本构方程

自然界中物质特性是复杂而又多样的,以至于在人们的思维王国中无法再现它。因此,试图建立一个普适的材料本构关系是不现实的,人们只能针对某一类具体物质及其所在的特定工作环境构造出理想物质的本构模型,通过研究揭示其物性规律,给出具体材料的本构方程。这里提出的理想物质的模型指的是实际物质在特定条件下的写照,所谓材料的本构方程其实就是抽象化理想物质本构行为的数学力学表述。

本构关系是介质区分的标志,连续介质力学的分科,正是以各分支学科采用不同的本构关系或本构方程来区分的。

例如弹性力学中研究的理想物质是胡克弹性体,所采用的本构关系是应力张量 σ_{ij} 与应变张量 e_{kl} 之间的线性关系,相应的本构方程为广义胡克定律的表达式

$$\sigma_{ij} = d_{ijkl} e_{kl} \quad (1-1)$$

式中, d_{ijkl} 为弹性常数张量。当弹性体材料为各向同性时,式(1-1)可简化为

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2G e_{ij} \quad (1-2)$$

式中, λ 和 G 为 Lamé 常数, δ_{ij} 为 Kronecker 记号。

实验表明,变形不大的大多数固体,其本构行为基本上与胡克弹性体相吻合。

又如牛顿流体力学中研究的理想物质是牛顿黏性流体,其本构关系是应力 σ_{ij} 与变形率(应变率) $\dot{e}_{kl}$ 之间的线性关系,相应的本构方程为牛顿黏性规律的表达式

$$\sigma_{ij} = d_{ijkl}^* \dot{e}_{kl} \quad (1-3)$$

式中, d_{ijkl}^* 为黏性系数张量。当流体为各向同性时,式(1-3)可简化为

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda^* \dot{e}_{kk} \delta_{ij} + 2G^* \dot{e}_{ij} \quad (1-4)$$

式中, λ^* 和 G^* 是黏性系数张量, p 为静压力。该式反映了各向同性牛顿黏性流的剪应力和剪应变率成正比的关系。

实验表明, 常温常压下的水或气体等一类流体, 其本构行为与牛顿黏性流体相一致。

此外, 还可列出其他连续介质力学分支所研究的不同理想物质类型, 如弹塑性力学中的弹塑性体, 粘弹塑性力学中研究的粘弹塑性体, 损伤力学中研究的损伤体以及非牛顿流体力学中研究的非牛顿流体等。显然, 不同的理想物质具有不同的本构方程。

本构方程可有不同的数学描述。不同理想物质的本构方程自然具有不同形式的数学表述, 如胡克弹性体的本构式是应力-应变关系, 而牛顿黏性流体的本构式却是应力-应变率关系; 就是同一类理想物质的本构方程也可能有等效的、采用不同数学工具描述的表达式, 如粘弹性体的本构方程, 既可以是微分形式的应力、应力率与应变、应变率之间关系的表述式, 又可以基于 Boltzmann 遗传积分原理采用积分形式的表述式(理论证明这两种表述的本构方程是完全等效的)。

1.1.3 本构律在固体力学中的地位

本构关系反映了特定材料本构行为的规律, 这在力学文献中简称为本构律, 它是构筑固体力学理论体系的三大基石之一。为了确定所考察变形体在外来因素作用下待求的全部响应量(含位移、应变和应力分量, 共 15 个), 必须同时满足三大定律(即力学中的平衡律、几何学中的变形协调律和物理学中的本构律), 缺一不可。

力学中的平衡律是基于牛顿力学建立的, 也可以从质量、动量、动量矩守恒律或能量守恒律导出, 在三维空间中可以列出 3 个平衡方程; 几何学中的变形协调律是基于连续性公理(含物质的不消失性和不可渗透性原理)推出的, 共有 6 个几何微分方程; 物理学中的本构律是反映材料物性的特有规律, 有 6 个本构方程。同时满足三大定律的考察体共可提供 15 个方程, 正好可以求解待求的 15 个独立的响应量。另一方面, 从物理观点分析, 平衡律和变形协调律是普适的, 是所有连续介质材料物性共有的, 而本构律才是考察体材料所特有的。只有同时反映材料的共性和个性、满足三大定律, 才能完整地反映考察体材料的真实力学行为。

1.2 宏观物性的本构模型

在固体的力学行为研究中, 材料的宏观物性可理想化地归纳为三大特性, 即**弹性、塑性和黏性**, 各自反映材料在不同特定条件下的本构关系, 其相应的理想化的本构模型分别是理想弹性模型、理想塑性(即刚塑性)模型和理想黏性(即不可压缩牛顿黏性流体)模型。而在实际应用时, 常常采用上述理想模型(元件)的组合模型来描述物体在复杂情况下的本构特征, 如弹塑性体、粘弹性体、粘塑性体以及粘弹塑性体等模型。随着断裂力学和损伤力学的兴起, 人们认识到材料中不可避免地存在微缺陷(微裂纹、裂隙、孔洞和夹杂等), 并且在材料变形过程中出现损伤累积、演化和扩展, 将对材料宏观的弹性、塑性产生影响, 于是又提出了弹性断裂、弹塑性断裂、弹性损伤(弹脆性损伤)和弹塑性损伤等模型。

1.2.1 弹性模型简介

所谓弹性,是指物体的应力与应变之间具有单值函数关系,而且在撤除外来作用因素后,又能恢复原来形状的物性。弹性体的应力只决定于变形前的初始状态和变形后的现时状态,而与加载变形的过程无关。闭合循环的加、卸载作用的弹性体虽然在过程中产生了变形,但最终物体还是回到原来的初始状态,而且对周围环境并不产生任何影响。因此,也可将弹性体材料视为无记忆的物质,与加载(变形)历史(过程)无关。

弹性体又有线弹性体和非线性弹性体之分。线弹性体的本构关系为广义胡克定律,反映了应力-应变的线性关系和变形可逆(弹性)的特性,而非弹性体虽然保留了变形可逆的特性,但其应力-应变关系却呈现非线性的特征,其几何图形为折曲状,如折线型、双曲线型和对数曲线型等。

1.2.2 弹塑性模型简介

弹塑性体是由弹性体和塑性体理想元件串联组合而成的一种本构模型。当材料应力尚未达到屈服极限时,其变形呈弹性特征,而当材料进入屈服状态后,其变形呈现弹塑性特征,总应变由弹性应变和塑性应变两部分组成,前者应用弹性理论计算、后者采用塑性增量理论获得。

弹塑性体的本构理论远比弹性体复杂,它包含判断从弹性状态进入弹塑性状态的识别准则——屈服准则、塑性应变发展的流动法则、加(卸)载条件、后继屈服的强化理论以及不同状态或条件下的本构方程等。

塑性应变是不可逆的变形,是卸载后留下的不可恢复的残余变形,它将导致现时应力与现时应变之间不存在单值对应关系,而与加载(变形)历史(过程)有关。这也表明塑性物体是有记忆(变形历史)特征的。显然,塑性物体的这些特性与弹性物体相比具有本质性的差别。

1.2.3 粘弹塑性模型简介

粘弹塑性体是比较全面地反映固体物质主要特性的本构模型。前面论述的弹性变形和塑性变形均是即刻变形,与时间无关;而黏性变形则是随时间变化而不断变化的,工程材料中出现的蠕变(creep,又称徐变,即常应力作用下随时间延续而增大的应变)或松弛(relaxation,也称应力松弛,即常应变状态下随时间延续而衰减的应力)现象均是材料黏性的典型体现。黏性应变中也有可恢复部分与不可恢复部分之分,前者称之为弹性后效或延滞回复,是在卸载一段时间内逐渐恢复的应变;后者称之为黏性流动,是卸载后留下的不可恢复的应变,有些文献将上述两部分黏性应变统称为蠕变或徐变。

粘弹塑性体是由理想化的弹性元件(弹簧)、塑性元件(滑移元件)和黏性元件(黏壶或阻尼元件)组合而成的本构模型,不同形式的串、并联组成将给出不同类型的本构方程。此外,粘弹塑性体还可派生出一些简化的本构模型,如粘弹性体、粘塑性体和弹-粘塑性体等。

1.2.4 弹塑性断裂与损伤模型简介

弹塑性断裂本构模型是针对具有宏观裂纹的变形体材料而建立的,它既能描述材料的断裂特性(起裂、扩展、止裂和失稳断裂),又体现材料的弹塑性。

弹塑性损伤本构模型是针对存在微细观缺陷的变形体材料而建立的。材料学的研究表明,材料总是存在微细观尺寸的缺陷,这种微细缺陷的存在和扩展无疑给变形体材料带来了损伤,导致其承载能力下降。在宏细观研究中,常采用损伤变量描述材料损伤的程度,采用损伤演化方程描述损伤的发展,最终构建计入材料损伤影响因素的弹塑性变形体本构模型,称之为弹塑性损伤模型。

1.3 本构公理简介

人们对本构律的研究开始是针对具体材料分别进行的,建立了诸多不同类型的本构方程,后来进而发现各种材料的本构关系具有内在的联系和共性,于是提出了本构理论所必须遵循的公理体系,并据此给出了本构建模的一般准则。

1958年诺尔(W. Noll)提出本构关系的具体形式应当服从下述的确定性、局部作用和客观性三个公理。

1. 确定性(或遗传性)公理

材料中某点 X_k 在时刻 t 的应力 $\sigma(X, t)$ 恒可由物体内各点的以往运动(变形)史唯一决定,而与未来的运动无关,即

$$\sigma(X_k, t) = f(x^{(i)}; X_k, t) \quad (1-5)$$

式中, $x^{(i)} = x^{(i)}(X, t - \tau) (t \geq \tau > -\infty)$, 是反映所有点以往变形史的函数; f 是 X_k, t 的普通函数,可反映应力在空间分布的非均匀性和时间效应,而且 f 又是函数 $x^{(i)}$ 的函数(即泛函),反映材料具有记忆能力或遗传性。

式(1-5)可视为抽象的本构方程,等号右端称之为本构泛函或响应泛函。

2. 局部作用公理

进一步研究表明,多数物质(特别是工程材料)给定质点处的应力只与该质点邻近质点的运动(变形)史有关,这就是局部作用公理。该公理指出物体内部诸点的运动对某点 X 的应力或其他物理量的影响,随离该点距离的增大而减小。对大多数物质,只有 X 点邻近质点的运动(变形)才对 X 点的应力有影响。

3. 客观性公理

物质的本构方程取决于某材料的物性,它不随观察者的不同(如一个是不动的,而另一个作相对运动)而变化,或者说本构关系对于刚体运动的参考系(架)具有不变性。

随着理性力学(rational mechanics)的发展,先后提出了另外一些补充的公理,如坐标系无差异公理(本构方程不随坐标系选择的不同而不同,若本构方程采用张量记法,可自动满足此公理)、物质对称性公理(反映物质所具有的某种等向性或对称性)、减退记忆公

理(离现时刻越远的过去历史对现时刻的应力影响越小)、相容性公理(本构方程应保持与连续介质力学及热力学中的质量、动量、动量矩和能量等守恒律以及熵不等式等相容)以及量纲一致性公理(本构方程中的各项量纲应当保持一致)。

本构公理为物性研究提供了建模的理论依据和检验模型仿真度的识别准则。

1.4 本构建模的内涵

材料的宏观力学行为通常可从力、变形以及力与变形的关系等三个方面进行描述,考虑其在空间分布的不同,更严格地应从一点的应力状态、应变状态和应力-应变关系入手开展建模研究。因此,材料本构建模研究必须涵盖有应力状态、应变状态、应力-应变关系和破坏机理等方面的内容。

应力状态分析部分包含:应力的定义;确定一点应力状态的各种表述,如应力张量、正应力与切应力、球应力与偏应力、应力空间的应力状态矢量、主应力、应力不变量、应力 Mohr 圆以及各类特定的应力(如等效应力、八面体应力等)等;应力场平衡律的不同表述,如基于牛顿定律的力矢平衡式、基于动量定理和动量矩定理的动量和动量矩表达式、基于虚功原理的虚功表达式以及基于最小势能原理的势能表达式等。

应变状态分析部分包含:应变的定义;确定一点应变状态的各种表述,如应变张量、正应变与切应变、球应变与偏应变、应变空间的应变状态矢量、主应变、应变不变量、应变的 Mohr 圆以及各类特定的应变(如等效应变、八面体应变等)等;应变场协调律的微分几何表述、余虚功表达式和余能表达式等。

应力-应变关系部分包含涉及材料物性的系列参数、应力(应变)状态转换的判别准则和应力-应变变化的规律。不同理想模型的应力-应变关系具有不相同的内涵。

若是弹性体模型,其物性参数有弹性模量 E 、泊松比 μ 、剪切模量 G 、体积模量 K 、Lamé 系数 λ 、纵波速度 c_p 和横波速度 c_s 等。对于各向同性的线弹性体,上述 7 个系数中独立的只有 2 个,且为常数,而对于非线性弹性体,上述弹性系数将与当前应力(或应变)状态有关,不再保持常量。弹性体的本构式包含弹性定义下应力-应变的弹性响应函数表达式(Cauchy 弹性材料的本构式)与基于热力学定律的能量偏微分表达式(Green 超弹性材料的本构式)等。此外,尚有在“增量弹性”定义下的亚弹性材料本构式。

若是弹塑性体模型,除了包含有上述弹性状态的物性参数外,还需要确定材料进入塑性后的新参数和有关判据,如屈服准则与屈服极限、强化法则与强化参数、加载准则与流动法则、强度极限与软化参数等。弹塑性体的本构式应当包含屈服前后、强化与软化、加载、卸载与再加载等不同情况下的应力-应变关系表达式。

若是粘弹塑性体模型,其物性参数应根据其组构元件形式而定,内含每一个弹性元件、塑性元件和黏性元件的一组参数,其本构式也随元件组构形式的不同而不同。

对于计入断裂特性或损伤演化的物体,还需在材料应力-应变关系中反映断裂或损伤的影响。

遵循本构公理体系中“坐标系无差异”公理,上述应力状态、应变状态和应力-应变关系的数学表达式均采用张量表述。为方便读者理解,本书在附录中介绍了有关张量表述和运算的基础知识。

第 2 章 应力状态与平衡律

2.1 一点的应力与应力状态

2.1.1 应力与应力状态的定义

连续介质力学中为了描述考察物体内部的一部分与另一部分之间的相互作用,建立了一点的应力和应力状态的概念。

应力矢量的定义如下式所示

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta S} = \frac{dT}{dS} \quad (2-1)$$

式中, ΔS 为考查点 M 在以 n 为法向的截面(简称为 n 截面)的微面积; ΔT 为作用在 ΔS 上面力(假设为均匀分布)的合力矢; σ 为 M 点 n 截面上的应力矢量。

应力矢量仅能描述一点在某一个方向截面上承受的应力,不足以反映一点的受力状态(应力状态);只有获得考察点所有可能方向截面上的应力矢量才能唯一地完全确定一点的应力状态。注意到材料中一点的应力具有双方向性(一是应力矢方向,另一个是截面法线方向),因而适宜采用二阶张量(并矢)的分量表示。进一步分析表明,该张量本身完全可以表述该点的应力状态。

设应力张量记号为 T_σ , 其分量为 σ_{ij} , 下标 i 表示所在截面, j 表示应力方向, 若用矩阵表示, 则有

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2-2)$$

由于剪切应力互等, 故 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, T_σ 是一个二阶对称张量, 其独立的分量只有 6 个。

2.1.2 斜面上应力的求解

T_σ 之所以能描述一点的应力状态, 是由于从式(2-2)的张量分量可以确定任意斜面 n 上的应力。

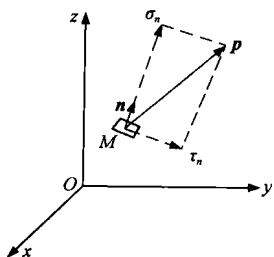


图 2-1 一点的应力

如图 2-1 所示, 设考察点 M 斜面 n (其法向为 n , 分量为 $n_x = n_1, n_y = n_2, n_z = n_3$) 上合应力矢量为 p , 其沿坐标轴方向的面力分量为 $p_x = p_1, p_y = p_2, p_z = p_3$, 其法向和切向的应力分量分别为正应力 σ_n 和切应力 τ_n 。

由于 $p_i (i=1, 2, 3)$ 和 σ_n, τ_n 均是作用在同一个斜面微面积上合应力矢的不同应力分量, 因而极易从力的分解原理中得到

$$\sigma_n = p \cdot n = p_i n_i \quad (2-3)$$

通过 M 点构建包围斜面与平行三个坐标面的四面体微元,基于力的平衡条件可得斜面上的面力公式

$$p_i = \sigma_{ij} n_j \quad (2-4)$$

将式(2-4)代入式(2-3)后得到基于 σ_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) 表示的斜面正应力公式

$$\sigma_n = \sigma_{ij} n_i n_j \quad (2-5)$$

或

$$\sigma_n = \sigma_x n_x^2 + \sigma_y n_y^2 + \sigma_z n_z^2 + 2(\tau_{xy} n_x n_y + \tau_{yz} n_y n_z + \tau_{zx} n_z n_x)$$

同样利用力的分解可获得斜面上的切应力公式

$$\tau_n = \sqrt{|p|^2 - \sigma_n^2} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - \sigma_n^2} \quad (2-6)$$

将式(2-4)代入上式,便可得到基于 σ_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) 表示的斜面切应力公式。

由式(2-5)和式(2-6)可知,基于 σ_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) 完全可以确定任意方向的斜面 n 上的应力,这就表明,考察点的应力张量 T_σ 能够充分描述该点的应力状态。

2.1.3 坐标转换的应力分量公式

采用应力张量 T_σ 描述一点的应力状态能自动满足“坐标系无差异”公理,但在具体量化运算时,仍需根据选定的坐标系确定该应力张量分量的大小。当遇到坐标变换时,不同坐标系中的应力分量之间遵循统一的变换规律[参见附录式(30)]

$$\sigma_{m'n'} = \beta_{m'i} \beta_{n'j} \sigma_{ij} \quad (2-7)$$

式中, σ_{ij} 是 $ox_1x_2x_3$ (或 $oxyz$) 坐标系中的应力分量,当 $i, j=1, 2, 3$ 时,分别表示 $\sigma_{11}=\sigma_x$, $\sigma_{12}=\tau_{xy}$, ... 应力分量; $\sigma_{m'n'}$ 是 $o'x'_1x'_2x'_3$ (或 $o'x'y'z'$) 坐标系中的应力分量,当 $m', n'=1, 2, 3$ 时,分别表示 $\sigma_{1'1'}=\sigma_{x'}$, $\sigma_{1'2'}=\tau_{x'y'}$, ... 应力分量; $\beta_{m'i}$ 是新老坐标系基矢 $e_{m'}$ 和 e_i 夹角的余弦。若取 $\beta_{m'1} (= \beta_{m'x'})$ 为 $l_{m'}$, $\beta_{m'2} (= \beta_{m'y'})$ 为 $m_{m'}$, $\beta_{m'3} (= \beta_{m'z'})$ 为 $n_{m'}$ ($m'=1, 2, 3$), 则式(2-7)可展开为

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{1'1'} = \sigma_{x'} = \sigma_x l_1^2 + \sigma_y m_1^2 + \sigma_z n_1^2 + 2\tau_{xy} l_1 m_1 + 2\tau_{yz} m_1 n_1 + 2\tau_{zx} n_1 l_1 \\ \sigma_{2'2'} = \sigma_{y'} = \sigma_x l_2^2 + \sigma_y m_2^2 + \sigma_z n_2^2 + 2\tau_{xy} l_2 m_2 + 2\tau_{yz} m_2 n_2 + 2\tau_{zx} n_2 l_2 \\ \sigma_{3'3'} = \sigma_{z'} = \sigma_x l_3^2 + \sigma_y m_3^2 + \sigma_z n_3^2 + 2\tau_{xy} l_3 m_3 + 2\tau_{yz} m_3 n_3 + 2\tau_{zx} n_3 l_3 \\ \sigma_{1'2'} = \tau_{x'y'} = \sigma_x l_1 l_2 + \sigma_y m_1 m_2 + \sigma_z n_1 n_2 + \tau_{xy} (l_1 m_2 + l_2 m_1) \\ \quad + \tau_{yz} (m_1 n_2 + m_2 n_1) + \tau_{zx} (n_1 l_2 + n_2 l_1) \\ \sigma_{2'3'} = \tau_{y'z'} = \sigma_x l_2 l_3 + \sigma_y m_2 m_3 + \sigma_z n_2 n_3 + \tau_{xy} (l_2 m_3 + l_3 m_2) \\ \quad + \tau_{yz} (m_2 n_3 + m_3 n_2) + \tau_{zx} (n_2 l_3 + n_3 l_2) \\ \sigma_{3'1'} = \tau_{z'x'} = \sigma_x l_3 l_1 + \sigma_y m_3 m_1 + \sigma_z n_3 n_1 + \tau_{xy} (l_3 m_1 + l_1 m_3) \\ \quad + \tau_{yz} (m_3 n_1 + m_1 n_3) + \tau_{zx} (n_3 l_1 + n_1 l_3) \end{array} \right. \quad (2-8)$$

式(2-8)表明,当坐标系平移时,新老坐标系中表述的应力分量完全相同,如 $\sigma_{x'}=\sigma_x$, $\tau_{x'y'}=\tau_{xy}$, ... 只有坐标系转动时,新老坐标系中表述的应力分量大小才有不同。必须强调:尽管新老坐标系所表述的应力分量不同,但所描述的该点的应力状态却是相同的。描述应力分量时必须具备四个要素:应力的作用点、应力的方向、应力的方向和应力所在的截面。

2.2 应力张量的主值、主方向和不变量

应力张量 $\mathbf{T}_\sigma$ 是由实数 σ_{ij} 为应力分量表述的二阶对称张量, 则其必然存在三个主值为实数的 σ_1 、 σ_2 和 σ_3 以及两两正交的三个主方向 $\mathbf{n}_1$ 、 $\mathbf{n}_2$ 和 $\mathbf{n}_3$, 力学文献分别称之为主应力值及应力主方向。

应力张量表述一点的应力状态时可以采用任意直角坐标系中的应力分量 σ_{ij} 来表示, 也可以采用沿主方向的直角坐标系中的主应力 σ_i 来表示。对此下面有相应的并矢和矩阵表达式

$$\mathbf{T}_\sigma = \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, \quad \text{或 } \mathbf{T}_\sigma = \sigma_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \sigma_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \sigma_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 \quad (2-9a)$$

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}, \quad \text{或 } \mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (2-9b)$$

式(2-9b)第一个等式右边的矩阵元素是以 $\mathbf{e}_x$ 、 $\mathbf{e}_y$ 和 $\mathbf{e}_z$ 为基矢的坐标系描述的应力分量 σ_{ij} , 定义 $\sigma_{11} = \sigma_x$ 、 $\sigma_{12} = \tau_{xy}$...; 而第二个等式右边的矩阵元素则是以 $\mathbf{e}_1$ 、 $\mathbf{e}_2$ 和 $\mathbf{e}_3$ 为主向基矢的坐标系描述的应力分量 σ_i , 定义 $\sigma_{11} = \sigma_1$ 、 $\sigma_{22} = \sigma_2$ 、 $\sigma_{33} = \sigma_3$ 、 $\sigma_{ij} (i \neq j, i, j = 1, 2, 3) = 0$ 。由此可知, 由主应力分量组成的应力矩阵是对角矩阵, 这就意味着主应力作用的截面(简称为主面)上切应力为零, 该截面上的主应力就是正应力。换句话说, 主应力就是该截面上无切应力时的正应力。

式(2-9b)还表明, 一点的应力状态既可以采用任意直角坐标系中的应力分量 σ_{ij} 表述, 也可以采用该点的主应力分量 σ_i 表述。前者 σ_{ij} 的大小与方向是随坐标系的转换而改变的, 而后者 σ_i 的大小和主方向是唯一的, 并不随参考坐标系的改变而变化(虽然其主向 $\mathbf{n}^{(i)}$ 的分量 $n_1^{(i)}$ 、 $n_2^{(i)}$ 和 $n_3^{(i)}$ 随参考坐标系而变, 但其实际的主向矢仍是唯一的)。

主应力及其相应的主向的确定可以如下进行:

考察图 2-1 所示的斜面, 当该斜面为主面时, 所作用的合应力矢量 $\mathbf{p}$ 的模 $|\mathbf{p}|$ 即为主应力的值 λ 。根据力的分解, 斜面上沿参考坐标轴方向的面力分量为 $p_i = \lambda n_i$, 而基于斜面四面体微元的平衡条件导出的该斜面的面力公式(2-4)为 $p_i = \sigma_{ij} n_j$ 。鉴于两个公式表达的是同一个斜面上的面力分量 p_i , 故有

$$p_i = \sigma_{ij} n_j = \lambda n_i$$

即

$$\sigma_{ij} n_j - \lambda \delta_{ij} n_j = 0$$

进而有

$$(\sigma_{ij} - \lambda \delta_{ij}) n_j = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2-10)$$

式中, n_j 为该斜面(此处即为主面)方向的方向余弦($j = 1, 2, 3$), 由于它满足下列几何关系

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad (2-11)$$

故 $n_j (j = 1, 2, 3)$ 不可能全为零, 则欲使式(2-10)成立, 必有

$$|\sigma_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = 0$$