中等專业学校函授教材

几何与三角

JIHE YU SANJUE

北京邮电学院函授部編

人民教育出版社

本书是北京邮电学院函授部为中等专业学校函授生编写的一套数学教材中的“几何与三角”部分，其特点是教材、学习指导书与习题三者合并在一起，又为适应函授教学的情况，有些地方的讲解比一般教材細致些，除了适用于中等邮电专业的函授生外，对其他中等专业的函授生与自学者也有参考价值。

中等专业学校函授教材

几何与三角

北京邮电学院函授部編

人民教育出版社出版　高等学校教学用书編輯部　北京宣武門内承恩寺7号

（北京市書刊出版业营业許可証出字第2号）

京华印書局印装　新华書店发行

統一書号 13010·837　开本 850×1168 1/32　印张 4 15/16

字数 125,000　印数 00001—20,000　定价（4）￥0.44

1960年7月第1版　1960年7月北京第1次印刷

目　　录

第一章　綫段的度量、比例綫段

学习本章的目的与要求

目的　1．为研究度量几何打基础；

　　　　2．为学习相似形作准备。

要求　1．弄清綫段与数的关系和懂得綫段成比、成比例以及能应用比和比例的性質的道理；

　　　　2．熟記比和比例的性質，特别是合比定理与分比定理；

　　　　3．掌握 §5 定理和推論并熟悉 §6、§7、§8 各定理；

　　　　4．会分已知綫段为已知比及作第四比例綫段。

I. 綫段的度量

§1. 度量　在初中平面几何里，我們曾把一条綫段放到另一条綫段上去比較，从而作出两条綫段相等和不相等的規定。如果两綫段不相等，又作出了一条綫段大于或小于另一条綫段的規定。对于角也有同样的处理。至于一条綫段比另一条綫段大多少或小多少，那时还不明确。

上面説过的綫段和綫段、角和角都是可以相互比較大小的。这些可以相互比較大小的同类的几何图形叫做**几何量**。綫段、角是两类不同的几何量。我們在某一类几何量中选擇一个图形做单位，把这个图形和同类的其他图形做比較，然后用一个数来表示比較的結果。例如以尺量竹竿，"尺"就是事先选擇的单位綫段。我們用数来表示尺和竹竿比較的結果，象 7.5 尺，这就説明竹竿是尺的七倍半。这一个数叫做**量数**。因此，几何量的度量，可以理解为：在确定了单位之后，怎样对其

他同类的几何量找出它的量数的問題。

§2. **綫段的度量** 取綫段 AB 和单位綫段 CD，用 CD 去量 AB，可能有三种情形产生：

第一种情形 AB 恰好被 CD 量尽。例如 5 次量尽，即 $AB=5CD$，亦即 AB 的长度等于 5 个单位。这时，表示綫段 AB 长度的数是整数。

第二种情形 AB 沒有能够被 CD 量尽，但能被 CD 的 $\frac{1}{n}$ 所量尽（这里 n 为正整数）。例如，AB 被 CD 量 4 次后，剩余 EB，而 EB 能被 $\frac{1}{10}CD$ 量尽，恰好等于 3 个 $\frac{1}{10}CD$，即 $AB = 4\frac{3}{10}CD$，亦即 AB 的长度等于 $4\frac{3}{10}$ 个单位（图 1）。又如，FG 能被 $\frac{1}{3}HK$ 量尽，即 FG 的长度等于 $\frac{1}{3}$ 个单位（图 1）。这时，表示綫段 AB、FG 长度的数是分数。

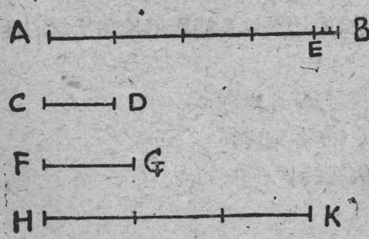

图 1

通常，表示綫段长度的数是用十进小数。为了把綫段长度的数表成十进小数，我們依次註 n 等于 10、100、1000、……等等来度量。例如，AB 用 CD 来度量（图 1），若表成十进小数即为 4.3；FG 用 HK 来度量，若表成十进小数，即为 0.333……。

第三种情形 AB 沒有能够被 CD 量尽，但也不能被 CD 的 $\frac{1}{n}$ 所量尽。这时，表示綫段长度的数是无理数。例如，綫段 AB 和 CD，在 AB 被 CD 量一次后，产生第一次剩余，而第一次剩余被 $\frac{1}{10}CD$ 量四次后，产生第二次剩余，而第二次剩余被 $\frac{1}{100}CD$ 量一次后，产生第三次剩余，……，如此継續度量下去，則永有剩余而量不完，所以 AB 长度所表

示的数是1.41……，这是个无限非循环的小数，即无理数。

按照代数上实数的分类，第一、第二两种情形的綫段度量所表示的数是有理数，第三种情形的綫段度量所表示的数是无理数。因为第一、第二两种情形中有公共度量单位，所以合称为**可公度的情形**，第三种情形，因无公共度量单位，則称为**不可公度的情形**。

II. 比例綫段

§3. 两綫段的比　两綫段的比就是用同一个长度单位来量它們所得的量数的比。根据这个意义，再参閱§2中的第一、第二、第三的三种情形，我們知道：

一条綫段的量数就是这条綫段和长度单位的比，这条綫段和长度单位的比，也就是用长度单位去量这条綫段所得的量数。例如，$AB=5CD$，即 $\frac{AB}{CD}=5$，亦即 $\frac{AB}{CD}=\frac{5CD}{CD}=5$。

如果两条綫段是属于可公度的情形，那末，它們的比是一个有理数；如果两条綫段是属于不可公度的情形，那末，它們的比是一个无理数。

§4. 比例綫段　如果两条綫段的比等于另外两条綫段的比，我們就說这四条綫段成比例。若設 a、b、c、d 依次代表这四条綫段，則 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$。与四数成比例一样，它們的各項也有內項、外項、第四比例項和比例中項等名称。在 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 中，a 和 d 叫做**外項**，b 和 c 叫做**內項**，d 叫做**第四比例項**。在 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ 中，b 叫做**比例中項**。

因为我們把綫段的长度理解为它的量数，所以两綫段的比和四条綫段成比例就分別具有数的比和由数組成的比例的性質，換句話說，即

有关比和比例的性質，都可以适用于綫段的比和比例。

有关数的比和由数組成的比例的性質，在初中代数里已学习过，为了便于我們应用，玆把这些性質重新写在下面，并对其中有些比較容易发生疑問的性質，給予証明。

比的性質：

1．比的两項用同一数乘或除，它的值不变。

2．如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots$，那末 $\frac{a+c+e+\cdots}{b+d+f+\cdots}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots$（等比定理）。

証：設 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots=r$，則 $a=br$，$c=dr$，$e=fr$，…。

$$\therefore\quad a+c+e+\cdots=br+dr+fr+\cdots,$$

即

$$a+c+e+\cdots=(b+d+f+\cdots)r。$$

用 $b+d+f+\cdots$ 除式子的两端，有 $\frac{a+c+e+\cdots}{b+d+f+\cdots}=r$。

但 $r=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots$，$\therefore\ \frac{a+c+e+\cdots}{b+d+f+\cdots}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}\cdots$。

比例的性質：

1．如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那末 $ad=bc$。

2．如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那末 $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$ 和 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$（更比定理）。

3．如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那末 $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$（反比定理）。

4．如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那末 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ 或 $\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}$（合比定理）。

証：　$\because\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，$\therefore\ \frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$，

即
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{b}=\frac{c}{d}+\frac{d}{d},$$

$$\therefore\quad \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}。$$

同理，可以証明
$$\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}。$$

5. 如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那末 $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ 或 $\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}$（分比定理）。

証：
$$\because\quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d},\ \therefore\quad \frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1,$$

即
$$\frac{a}{b}-\frac{b}{b}=\frac{c}{d}-\frac{d}{d},$$

$$\therefore\quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}。$$

同理，可以証明
$$\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}。$$

6. 如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那末 $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$（合分比定理）。

証：由合比定理，有
$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}。\tag{1}$$

由分比定理，有
$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}。\tag{2}$$

(1) ÷ (2)，$\frac{a+b}{b}\div\frac{a-b}{b}=\frac{c+d}{d}\div\frac{c-d}{d}$，

即
$$\frac{a+b}{b}\times\frac{b}{a-b}=\frac{c+d}{d}\times\frac{d}{c-d},$$

$$\therefore\quad \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}。$$

III. 关于比例綫段的定理及其应用

§5. **定理** 平行于三角形一边而与其他两边相交的直綫，分其他两边成比例綫段。

已知：在 $\triangle ABC$ 内，$DE \parallel BC$。

求証：$\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$。

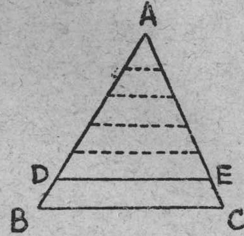

图 2

証：因为 $\dfrac{AD}{DB}$ 的量数，可以是有理数，也可以是无理数，所以这个定理必须从两方面来証明。

1. AD 与 DB 是可公度的情形：

假設 AD 能被 DB 量尽而沒有剩余，且 $AD=5DB$，则 $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{5DB}{DB}=5$。通过 AB 上各分点作直綫平行于 BC，由初中平面几何的定理“如果在角的一边上截取相等的綫段，并且过各綫段的端点作平行綫与角的另一边相交，那么这些平行綫在角的另一边上所截得的綫段也相等。”我們知道 AE 也分成 5 等分，每一分等于 EC，所以 $\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{5EC}{EC}=5$。因为 $\dfrac{AD}{DB}$ 和 $\dfrac{AE}{EC}$ 都等于 5，所以 $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$。

2. AD 与 DB 是不可公度的情形：

假設 AD 不能被 DB 量尽而有剩余，且 AD 被 DB 量 1 次后产生第一次剩余，而第一次剩余被 $\dfrac{1}{10}DB$ 量 4 次后产生第二次剩余，而第二次剩余被 $\dfrac{1}{100}DB$ 量 1 次后产生第三次剩余，……，则 $\dfrac{AD}{BD}=1.41\cdots\cdots$。

按照前已叙述的同样的过各分点作平行綫的方法，有 $\frac{AE}{EC}$ 也等于 1.41……。所以 $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$。

思考題：如果平行于三角形一边的直綫，与其他两边的延长綫相交，是否也分成比例綫段？为什么？

推論1．若平行于三角形一边的直綫与其余两边相交，則任一边与其一綫段的比等于他一边与其相对应綫段的比。

証：由剛才証明的定理，有 $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$（图2），根据比例性質中的合比定理，可以得到 $\frac{AD+DB}{DB}=\frac{AE+EC}{EC}$，或 $\frac{AD+DB}{AD}=\frac{AE+EC}{AE}$，

即 $\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{EC}$，或 $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$。

推論2．三条或三条以上的平行綫将任意二直綫截成比例綫段。

証：由 D 作 $DH \parallel AC$ 分别交 BE、CF 于 G、H。根据剛才証明的定理，有 $\frac{DG}{GH}=\frac{DE}{EF}$，再根据比例性質中的更比定理，有 $\frac{DG}{DE}=\frac{GH}{EF}$。但因 $ABGD$ 和 $BCHG$ 都是平行四边形，故 $DG=AB$ 和 $GH=BC$，所以 $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}$。

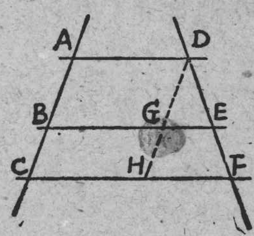

图 3

§6．逆定理　如果一直綫分三角形的二边为比例綫段，則此直綫必与第三边平行。

已知：在 $\triangle AEC$ 内，$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DE}$。

求証：$BD \parallel CE$。

証：

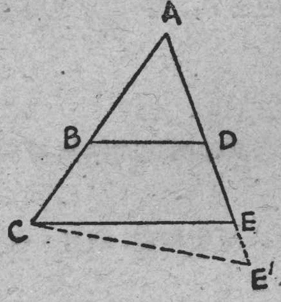
图 4

由 C 作 $CE' \parallel BD$，遇 AE 的延綫于 E'。根据 §5 定理，有 $\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DE'}$，但已知 $\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DE}$，故 $\frac{AD}{DE'}=\frac{AD}{DE}$，所以 $DE'=DE$，因之，E' 与 E 重合。所以 BD 也就平行 CE。

§7. **定理** 如果一直綫平行于三角形的底边，且与其他两腰相交，那末底边和这直綫被两腰截出的綫段的比，等于任一腰和这一腰上不与底边相邻的綫段的比。

已知：在 $\triangle ABC$ 中 $MN \parallel AC$。

求証：$\frac{AC}{MN}=\frac{AB}{BM}=\frac{BC}{BN}$。

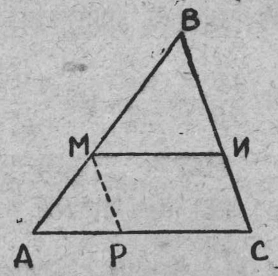
图 5

証：証明本定理的关鍵問題，在如何运用 §5 推論 1 先求出 $\frac{AC}{MN}$，进而再导出結果来。

由 M 作 $MP \parallel BC$ 并遇 AC 于 P。根据 §5 推論 1，有 $\frac{AC}{PC}=\frac{AB}{BM}$，但 $MNCP$ 为平行四边形，$\therefore PC=MN$，所以 $\frac{AC}{MN}=\frac{AB}{BM}$。由 §5 推論 1，我們知道 $\frac{AB}{BM}=\frac{BC}{BN}$，所以 $\frac{AC}{MN}=\frac{AB}{BM}=\frac{BC}{BN}$。

§8. **定理** 三角形內角的平分綫分对边成两条綫段，这两条綫段和两邻边成比例。

已知：AD 为 $\triangle ABC$ 的 A 角的平分綫，交 BC 于 D。

求証：$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$。

証：証明本定理，要注意以下两点：

(1) AB、AC、BD、DC 四綫段在成比例时，一定要考虑到綫段的长短相互对应問題，比如长一点的 BD 比上短一点的 DC 只能等于长一点的 AB 比上短一点的 AC，而不能等于短一点的 AC 比上长一点的 AB。

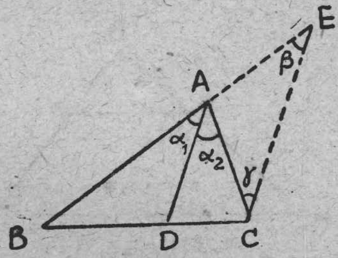

图　6

(2) 前面已学习过的定理的每个图形中都有平行綫，本定理是比例綫段，但图中无平行綫，因之，証明方法一定从作平行綫入手。

由 C 作 $CE \parallel AD$ 并遇 BA 的延綫于E。根据 §5 定理，有 $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AE}$。以 α_1、α_2、γ、β 分别表示 $\angle BAD$、$\angle DAC$、$\angle ACE$、$\angle E$。由初中平面几何的定理“两平行綫跟第三直綫相交所成的同位角相等”和“两平行綫跟第三直綫相交所成的內錯角相等”有 $\alpha_1=\beta$ 和 $\alpha_2=\gamma$，但已知 $\alpha_1=\alpha_2$，$\therefore\ \beta=\gamma$，所以 $\triangle ACE$ 是等腰三角形，故 $AE=AC$。以此代入 $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AE}$ 中，有 $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$。

例 1. C 点把綫段 AB 分成 $AC:CB=2:3$。$AC=48$ 厘米，求 AB 和 CB 的长。

解：因为已知 $\frac{AC}{CB}=\frac{2}{3}$，由比例性質中的合比定理，有 $\frac{AC+CB}{AC}=\frac{2+3}{2}$，即 $\frac{AB}{48}=\frac{5}{2}$，$\therefore\ AB=\frac{48\times5}{2}=120$ 厘米。

同理，有 $\frac{AC+CB}{CB}=\frac{2+3}{3}$，即 $\frac{AB}{CB}=\frac{5}{3}$，亦即 $\frac{120}{CB}=\frac{5}{3}$，

$\therefore\quad CB=\frac{120\times3}{5}=72$ 厘米。答：$AB=120$ 厘米；$CB=72$ 厘米。

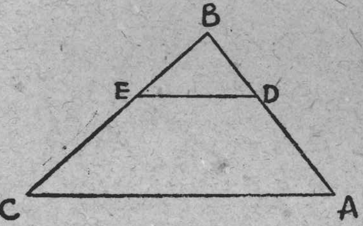

图 7

例 2. $\triangle ABC$ (图 7) 的一边 BA 被 D 点分成 $BD:DA=5:7$，过 D 点引平行于 AC 的直綫 DE 交 BC 于 E，如果 $AC=18$ 厘米，求綫段 DE 的长。

解： 因为已知 $DE \parallel AC$ 及 $AC=18$ 厘米，根据 §7 定理，有 $\frac{AC}{DE}=\frac{AB}{BD}$，即 $\frac{18}{DE}=\frac{AB}{BD}\cdots\cdots(1)$。由已知 $\frac{BD}{DA}=\frac{5}{7}$，通过合比定理，有 $\frac{BD+DA}{BD}=\frac{5+7}{5}$，即 $\frac{AB}{BD}=\frac{12}{5}\cdots\cdots(2)$。以(2)代入(1)，有 $\frac{18}{DE}=\frac{12}{5}$，

$\therefore DE=\frac{18\times 5}{12}=7.5$ 厘米。答：DE 的长为 7.5 厘米。

例 3. 在 $\triangle ABC$ (图 8) 中，$AB=15$ 厘米，$BC=10$ 厘米，$AC=20$ 厘米，B 角的平分綫 BD 和 C 角的平分綫 CE 相交于 M 点。求 BM 和 MD 的比。

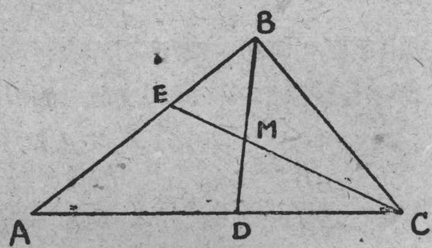

图 8

解： 在 $\triangle BCD$ 中，因为 CM 是 C 角的平分綫，根据 §8 定理，有 $\frac{BM}{MD}=\frac{BC}{CD}$。在 $\triangle ABC$ 中，因为 BD 是 $\angle B$ 的平分綫，根据同一个定理，有 $\frac{AD}{CD}=\frac{AB}{BC}$。由合比定理，得 $\frac{AD+CD}{CD}=\frac{AB+BC}{BC}$。但已知 $AD+CD=20$ 厘米，$AB=15$ 厘米，$BC=10$ 厘米，所以 $\frac{20}{CD}=\frac{15+10}{10}=\frac{25}{10}$，由此得 $CD=8$ 厘米。把

BC 和 CD 的值代入 $\frac{BM}{MD}=\frac{BC}{CD}$ 中，有 $\frac{BM}{MD}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$。

答：$BM:MD=5:4$。

例 4. 假設在 $\triangle OCE$ (图 9) 中，$BD \parallel CE$, $AD \parallel BE$。求証 $OA:OB=OB:OC$。

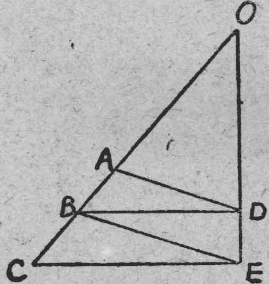

图 9

已知：在 $\triangle OCE$ 中，$BD \parallel CE$, $AD \parallel BE$。

求証：$\frac{OA}{OB}=\frac{OB}{OC}$。

証：因为 $BD \parallel CE$ 和 $AD \parallel BE$，根据 §5 推論 1，有 $\frac{OB}{OA}=\frac{OE}{OD}$ 和 $\frac{OC}{OB}=\frac{OE}{OD}$，所以 $\frac{OB}{OA}=\frac{OC}{OB}$。由比例性質中的反比定理，得 $\frac{OA}{OB}=\frac{OB}{OC}$。

§9. 作图 分已知綫段 AB 等于已知比 $m:n$。

已知：綫段 AB 和綫段 m 与 n (图 10)。

求作：分 AB 为两部分，使这两部分的比等于 $\frac{m}{n}$。

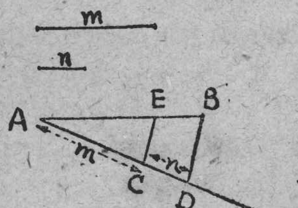

图 10

作法：要分 AB 为两部分并使这两部分的比等于 $\frac{m}{n}$，我們知道这是四綫段成比例，根据 §5 定理，必須先作个适宜的角，因此作法如下：过 A 点作不和 AB 重合的任意射綫 AK，并在 AK 上截取 $AC=m$ 和 $CD=n$。連接 D、B 两点，并过 C 点作 $CE \parallel DB$，它交 AB 于 E 点，根据 §5 定理，我們得到 $\frac{AE}{EB}=\frac{AC}{CD}$，即 $\frac{AE}{EB}=\frac{m}{n}$，亦即 AB 被分成两綫段的比等于 $m:n$。

§10. 作图　已知綫段 a、b、c。求作第四比例項綫段 x。

已知：綫段 a、b、c (图 11)。

求作：綫段 x，使 $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$。

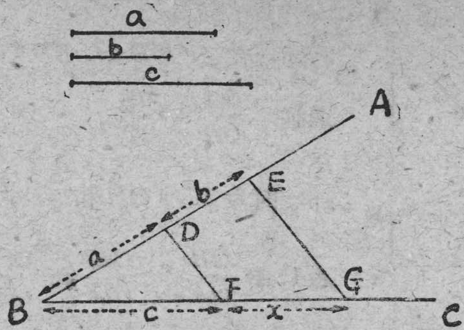

图 11

作法：作任意角 ABC。在 BA 上截取 $BD=a$，$DE=b$。在 BC 上截取 $BF=c$。連接 D、F 两点，并且作 $EG \parallel DF$，交 BC 于 G。根据 §5 定理，有 $\frac{BD}{DE}=\frac{BF}{FG}$，即 $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$。所以 x 就是所求作的第四比例綫段。

IV. 小　結

1. 通过綫段度量的三种情形，我們了解到綫段可以表示为数。既然可以表示为数，所以能够成比、成比例，也能够应用数的比和比例的性質。

2. 通过 §5 中推論的証明以及 §8 后例題的介紹，我們看到比和比例的性質的应用是很广泛的，特别是合比定理与分比定理的应用。因此，比和比例的性質必須熟記。

3．§5 定理是比例綫段中最主要的一个定理，由它不仅可以推导出其他的一些定理，并且还可以分已知綫段为已知比和作第四比例綫段图。要彻底弄懂这个定理以及它的推論。

习 题

1．C 点把綫段 AB 分成 $AC:CB=3:2$，求 AC 和 AB 的比。

2．二平行綫交 A 角的一边于 B 和 C 两点，交另一边于 D 和 M 两点，如果 $AC+AB=14$ 厘米，且 $AM:AD=4:3$，求 AB 的长。

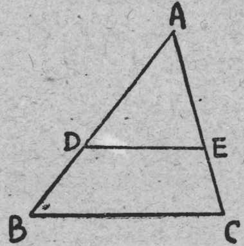

图 12

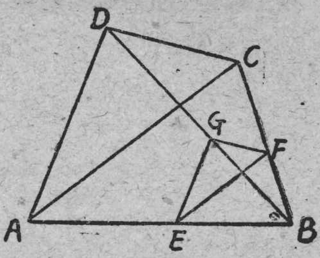

图 13

3．延长梯形 $ABCD$ 的两腰 AB 和 DC 相交于 F 点，如果 $FB:BA=8:5$，且 $FC-CD=2.25$ 厘米，求 CD 的长。

4．已知在$\triangle ABC$（图 12）中，$DE \parallel BC$，又$AD:DB=EC:AE$。求証 $AE=EC$。

5．在四边形 $ABCD$ 的对角綫 BD 上取一点 G。作 $GE \parallel DA$ 交 AB 于 E，作 $GF \parallel DC$ 交 BC 于 F，并且連接 EF。求証 $EF \parallel AC$（图 13）。

6．等腰三角形的底边等于 4 米，腰等于 6 米，平行于底边的直綫在这个三角形內截出一个梯形，梯形的上底等于两腰和的四分之一，求梯形各边的长。

7．梯形两底的比为 $7:12$，它的一个腰为 0.3 米，問延长这个腰多么长才能和另一个腰的延长綫相交？

8．A 和 B 两点之間有一个湖（图 14），为了测量 A 点到 B 点的距离，选擇一个 C 点，量出 CA 的长，并在 CA 上截取定长的綫段 CA_1，再作 $A_1B_1 \parallel AB$（使用經緯仪）。如果 $CA=1.8$ 公里，

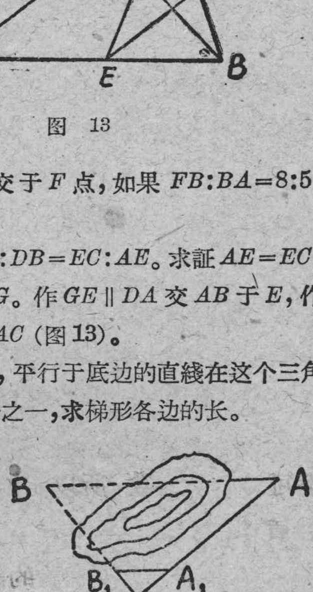

图 14