

陈 圣 德

平面几何一题多证



福建人民出版社

0123.1

G633.6

9)

2.

陈 圣 德

福建人民出版社

一九八四年·福州

平面几何一题多证

陈圣德 编

*

福建人民出版社出版

(福州得贵巷27号)

福建省新华书店发行

福建新华印刷厂印刷

开本850×1168毫米 1/32 16.75印张 2插页 400千字

1985年7月第1版

1985年7月第1次印刷

印数: 1—34,430

书号: 7173·663 定价: 3.05元

序

在数学的学习上，中学生通常从初二年段开始分化，分化点主要集中在几何：大多数学生不习惯于几何的论证，少数学生却对几何发生了新的特殊兴趣。至于师范院校的学生，他们在教学实习中，也是怕教几何的；走上工作岗位后，一般还是不愿意教这门课。其原因，除了几何作业不好批改之外，有些习题，自己做起来也感困难，更不用说课外可能被问到的难题了。他们学过高等几何，却被初等几何的问题所困扰，这是不足为怪的。初等几何的证题方法往往因题而异，缺乏一般规律，因而需要特殊技巧。这就是初等方法反而更难掌握的原因。但在中学又不能不先让学生学习初等几何，因为它毕竟是比较直观的。从某种角度上看来，初等几何内容浅显而方法灵活，前者有利于知识的传授，后者有利于智力的发展。作为中学数学教师，为了教好初等几何乃至满足部分学生的进一步要求，自己就要善于运用初等方法证几何题。在这方面，陈圣德先生的《平面几何一题多证》一书，将对教师乃至学生提供丰富的范例。

陈先生在旧社会没有升学的机会。在自学中，他对几何发生了特别浓厚的兴趣。他不满足于书本上的一题一证，总要旁敲侧击，另辟蹊径，务求“条条道路通罗马”。同时结合中学数学的教学实践，对初等几何的证题方法更取得了独到的经验。解放后他调福建师院（现福建师大）任教，仍不放弃“下里巴人”的低调。就在编写高等几何教材和讲授这门课程时，也是居高临下，紧密联系中学的初等几何内容，突出高师特点。历年来他在国内

外发表了许多有关论文，得到同行的赞赏。尤其可贵的是，陈先生不但刻苦自学，锲而不舍，而且乐于教人，善于教人。特别是解放后，他忠诚于党的教育事业，呕心沥血，鞠躬尽瘁，数十年如一日。关于平面几何一题多证，多年来他积累了大量资料。正在加工整理时，不幸因积劳成疾，溘然辞世，遗稿的整理工作只好由后人来完成。这就是本书的由来。

我们是陈先生的多年知交，对于他未及完成著作，深感惋惜！在这本书就要和读者见面的时候，我们除了缅怀陈先生自学不厌、诲人不倦的精神以外，也想对读者说几句话。读者也许把这本书作为“类书”以供检索之用，但是这并未尽其用。如果目的只在于证题本身，那末每题一种证法已经足够，多证似无必要。其实，对于一个几何命题，灵活运用各种有关知识，通过各种可能途径给予证明，既可以收起到思路开阔、左右逢源的效果，又可以领略到殊途同归、融会贯通的旨趣。对教师来说，熟悉某个题目可以联系哪些知识，预见到学生可能想出哪些证法，这样至少在教学中选例拟题就心里有数。对高师数学系学生、部分有兴趣的中学生和业余数学爱好者来说，这本书也是一本有益的参考读物。如能从中领略到几何证题的比较一般的规律，那就甚至可以或多或少地弥补陈先生来不及完成的工作了。

林 辰 欧阳琦

1984年5月

于福建师范大学数学系

目 录

1	线段相等的证法	[1]
2	等角的证法	[105]
3	和、差、倍、分的证法	[147]
4	平行线的证法	[217]
5	垂线的证法	[234]
6	不等量的证法	[251]
7	比例线段的证法	[273]
8	有关等积线段的证法	[321]
9	面积相等的证法	[369]
10	诸点共线的证法	[406]
11	诸线共点的证法	[450]
12	共圆点与共点圆的证法	[493]
13	切线与切圆的证法	[513]
附录	重要定理一览	[528]
	本书部分符号说明	[529]
	编辑后记	[530]

1

线段相等的证法

证明两线段相等，可用下列诸方法：

1.1 证明两线段是两个全等形的对应元素（如全等三角形的对应边、对应分角线、对应高线、对应中线，全等四边形的对应边、对应对角线，...）。

证明两个三角形全等，可用下列诸定理之一：

(1) 两个三角形有两边及夹角对应相等便全等 ($SA S$)。

(2) 两个三角形有两角及一对应边相等便全等 ($AA S$)。

(3) 两个三角形有两边及其中大边的对角对应相等便全等 (SSA)。

(4) 两个三角形三边对应相等便全等 (SSS)。

证明两个四边形全等，可用下列诸定理之一：

(1) 两个四边形有三边及其两夹角对应相等便全等 ($SA S A S$)。

(2) 两个四边形有三角及二夹边对应相等便全等 ($SA S A S A$)。

(3) 两个四边形有四边及一对角线对应相等便全等。

1.2 证明两线段是三角形中两个等角的对边（即等腰三角形性质的逆定理）。

1.3 利用等腰梯形性质的逆定理（即梯形的两底角或对角线相等，两腰便相等）。

1.4 利用等腰梯形的对角线相等的性质。

1.5 利用中垂线定理：线段的中垂线上任一点到该线段的两端等距离。

1.6 利用分角线性质：角的平分线上任一点到这角的两边等距离。

1.7 利用斜线定理：从直线外一点引这直线的垂线与一些斜线，如斜线是距垂足等远，或斜线与垂线夹角相等，两斜线便等长。

1.8 利用等腰三角形顶角平分线性质的逆定理：如一个三角形顶角的平分线同时平分底边，便是等腰三角形。

1.9 利用平行四边形对边相等的定理。

1.10 利用矩形的对角线相等的定理。

1.11 利用同圆或等圆的半径或直径相等的定理。

1.12 利用同圆或等圆内对等弧或等圆周角或等圆心角的弦相等的性质。

1.13 利用同圆或等圆内弦心距相等两弦便相等的定理或其逆定理。

1.14 利用切线长定理：从圆外一点引圆的两切线等长。

1.15 利用两圆的内公切线或外公切线等长的定理。

1.16 利用等积的两个三角形如等底必等高，等高必等底的定理。

1.17 利用等量公理：证明它们等于同一线段或分别等于两条相等线段。

1.18 证明它们的比等于其反比（即 $\frac{a}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow a = b$ ）。

1.19 证明它们与同一线段或两条相等线段成比例（即 $\frac{a}{x} = \frac{b}{x} \Rightarrow a = b$ ，或 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 且 $b = d \Rightarrow a = c$ ）。

1.20 证明它们是对称图形（不论轴对称或心对称）中两条对称线段（或两双对称点的连线）。

证明一线段为一直线所平分，除了应用相等线段的证法外，还可用下列诸定理之一：

(1) 利用平行截割定理：即由三角形或梯形一腰中点引平行于底边的直线必平分另一腰。

(2) 利用等腰三角形性质：即顶角平分线或底边的高线必平分底边。

(3) 利用平行四边形两对角线性质。

(4) 利用三角形重心性质。

(5) 利用圆内垂径分弦定理及其逆定理：即由圆心引弦的垂线必平分这弦及其对弧；或圆心引一弧中点的连线必垂直平分这弧所对的弦。

(6) 利用两相交圆的公共弦为连心线平分的性质。

1. 如图1-1, 在 $\triangle ABC$ 中, $AD = AE$, $\angle ADF = \angle AEG$, $DF = EG$.

求证: $AB = AC$,

【证 1】利用等腰三角形逆定理.

设 DF 、 EG 交于 O , 作 $\angle DOG$ 的平分线, 交 AB 、 AC 于 M 、 N .

$$\because \angle ADF = \angle AEG,$$

$$\angle DOM = \angle EON,$$

$$\therefore \angle OMD = \angle ONE, AM = AN.$$

$$\text{又} \because AD = AE, \therefore DM = EN,$$

$$\text{故 } \triangle DMO \cong \triangle ENO.$$

$$\therefore OD = OE.$$

$$\text{但 } DF = EG, \therefore OF = OG.$$

$$\text{因此 } \angle OGF = \angle OFG = \angle DOM.$$

$$\therefore MN \parallel BC, \text{ 易得 } \angle B = \angle C,$$

$$\text{即 } AB = AC.$$

【证 2】利用全等形的性质.

连结 AF , AG .

$$\because AD = AE, \angle ADF = \angle AEG,$$

$$DF = EG,$$

$$\therefore \triangle ADF \cong \triangle AEG.$$

$$\text{则 } AF = AG, \angle AFG = \angle AGF,$$

$$\therefore \triangle AFB \cong \triangle AGC. \text{ 故}$$

$$AB = AC.$$

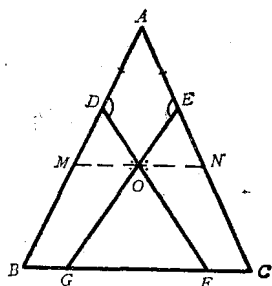


图1-1

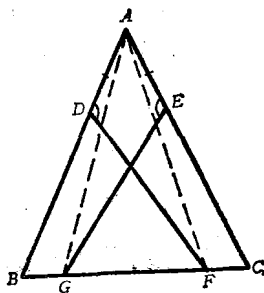


图1-2

【证 3】利用等腰三角形逆定理与全等四边形定理.

连结 DG, EF .

$$\because AD = AE, DF = EG,$$

$$\angle ADF = \angle AEG, \angle A = \angle A,$$

$$\therefore \text{四边形 } DAEF \cong \text{四边形 } EADF.$$

$$\therefore DG = EF.$$

由 $\triangle DFG \cong \triangle EGF$ 可得 $\angle 1 = \angle 2$.

$$\therefore \triangle DFB \cong \triangle EGC,$$

故 $\angle B = \angle C, AB = AC$.

【证 4】利用等腰三角形定理及逆定理

连结 DE , 因 $AD = AE$,

$$\therefore \triangle ADE \text{ 为等腰三角形,}$$

$$\angle ADE = \angle AED.$$

但 $\angle ADF = \angle AEG$,

$$\therefore \angle EDF = \angle DEG.$$

显然, $\triangle ODE$ 为等腰三角形,

$$OD = OE. \text{ 而 } DF = EG,$$

$$\therefore OF = OG, \angle 1 = \angle 2, \text{ 下同上证.}$$

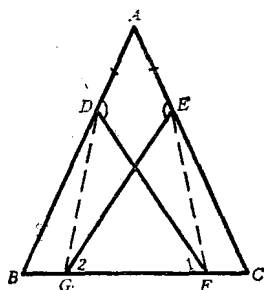


图1-3

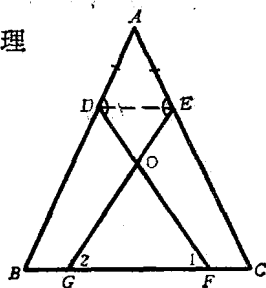


图1-4

2. 对角线相等的梯形是等腰梯形.

【证 1】利用全等形性质.

如图1-5, 引 $AE \perp BC, DF \perp BC$,
则 $AE = DF$.

$$\because AC = BD,$$

$$\therefore Rt\triangle AEC \cong Rt\triangle DFB,$$

$$\therefore \angle ACE = \angle DBF.$$

于是 $\triangle ACB \cong \triangle DBC, \therefore AB = CD$.

【证 2】利用平行移动法,

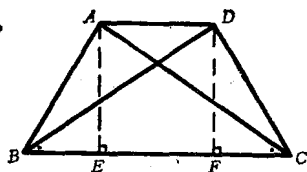


图1-5

引 $DE \parallel AC$, 交 BC 延长线于 E , 则 $ACED$ 为平行四边形。

因此 $DE = AC = BC$ 。

$\therefore \triangle DBE$ 为等腰三角形, $\angle 1 = \angle E = \angle 2$ 。

故 $\triangle ACB \cong \triangle DBC$, $AB = DC$ 。

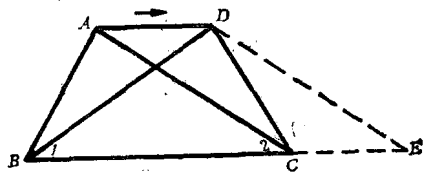


图1-6

【证 3】利用三角形中位线定理。

设 L, M, N 分别为底边 BC 及两腰 AB, CD 的中点, 连 LM, MN, LN 。则 LM, LN 分别是 $\triangle ABC, \triangle CBD$ 的中位线。

因此 $LM \parallel \frac{1}{2}AC, LN \parallel \frac{1}{2}BD$ 。

由 $AC = BD$,

得 $LM = LN, \angle 1 = \angle 2$ 。

又 MN 是梯形 $ABCD$ 的中位线,

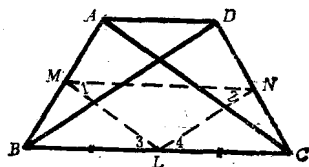


图1-7

$\therefore MN \parallel BC$ 。

因此 $\angle 1 = \angle 3, \angle 2 = \angle 4$ 。

$\therefore \angle 3 = \angle 4$ 。

故 $\triangle BLM \cong \triangle CLN, BM = CN$ 。

从而 $AB = CD$ 。

3. 直角 $\triangle ABC$ 斜边 BC 的中点 M 与三顶点等距离。

【证 1】利用全等形定理。

延长 AM , 取 $MA' = MA$, 连 CA' 。则 $\triangle MAB \cong \triangle MA'C$ 。

$\therefore AB = A'C, \angle B = \angle 1$ 。

但 $BA \perp AC$, 从而

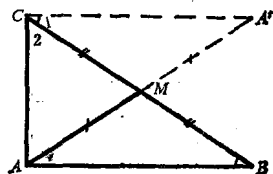


图1-8

$$\angle BAC = \angle B + \angle 2 = \angle 1 + \angle 2 = \angle A'CA.$$

$$\therefore \triangle A'CA \cong \triangle BAC, AA' = BC.$$

$$\text{但 } AA' = 2AM, BC = 2BM,$$

$$\therefore AM = BM.$$

【证 2】利用三角形中位线定理。

引 $ML \parallel BA$, 则 L 为 AC 中点。

又因 $BA \perp AC$,

$$\therefore ML \perp AC.$$

因此 ML 为 AC 的中垂线。

$$\therefore MA = MC = MB.$$

【证 3】利用矩形与全等形性质。

引 $MY \perp AB$, $MX \perp AC$ 。

$$\because \angle BAC = \text{Rt} \angle,$$

故 $MXAY$ 为矩形。

因此 $MX = AY$ 。

由于 $MX \parallel BA$, $\therefore \angle B = \angle 1$ 。

于是 $\triangle CMX \cong MBY$, $MX = BY$ 。

$$\therefore AY = BY.$$

因而 MY 为 AB 的中垂线, $MA = MB$ 。

【证 4】利用同一法。

作 $\angle BAM' = \angle B$, M' 在 BC 上。

则 $M'A = M'B$ 。

$$\because \angle C = 90^\circ - \angle B,$$

$$\angle M'AC = 90^\circ - \angle BAM',$$

因此 $\angle C = \angle M'AC$, $M'A = M'C$ 。

$$\therefore M'B = M'C.$$

故 M' 为 BC 的中点, 但已知 M 为 BC 中点, 而一条线段只有一

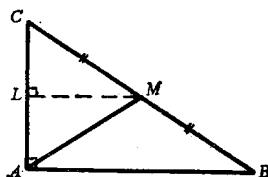


图1-9

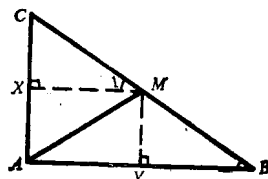


图1-10

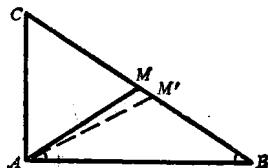


图1-11

个中点,

$\therefore M', M$ 合一, $MA = MB$.

【证 5】利用反证法.

设 $MA \neq MB$, 则 $MA > MB$,
或 $MA < MB$.

如 $MA > MB$, 则 $\angle B > \angle 1$.

因 $MB = MC$, 故 $MA > MC$,
 $\angle C > \angle 2$.

因此 $\angle B + \angle C > \angle 1 + \angle 2$,

即 $\angle B + \angle C > 90^\circ$, 这与已知条件矛盾.

故 $MA > MB$ 不合.

同理可证 $MA < MB$ 也不合.

$\therefore MA = MB = MC$.

【证 6】利用圆的定理.

作 $Rt\triangle ABC$ 的外接圆. 因
 $\angle BAC = Rt\angle$ 故斜边 BC 为直
径, M 为该圆的圆心.

$\therefore MA = MB = MC$.

【证 7】延长 BA , 取 $AB' = AB$, 连 CB' , 则 CA 为 BB' 的
中垂线.

$\therefore CB' = CB$.

而 AM 为 $\triangle BB'C$ 的中位线,

$\therefore AM = \frac{1}{2}CB' = \frac{1}{2}CB$.

即 $AM = BM = CM$.

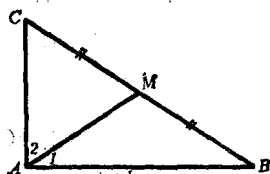


图1-12

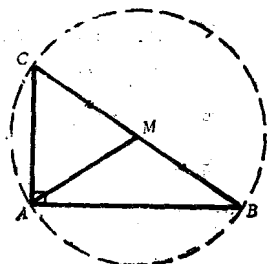


图1-13

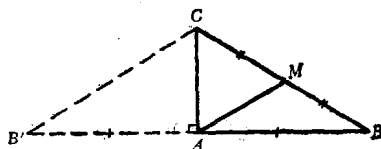


图1-14

4. 设 $Rt\triangle ABC$ 锐角 C 的平分线交 AB 于 E , 交高线 AD 于 O ,

过O引BC的平行线交AB于F, 则 $AE = BF$.

【证 1】利用平行四边形性质.

由于CE平分 $\angle C$,

$$\angle 2 = 90^\circ - \frac{\angle C}{2}, \quad \angle 3 = 90^\circ - \frac{\angle C}{2},$$

$\therefore \angle 3 = \angle 2 = \angle 1$, 从而

$$AE = AO.$$

引 $EK \perp BC$, 连OK, 则

$$EK = AE = AO, \text{ 又 } AO \parallel EK,$$

故AOKE为平行四边形, $AE \perp OK$. 而OKBF也是平行四边形,

$$\therefore BF = KO = AE.$$

【证 2】利用全等形性质 (见图1-15).

作 $EK \perp BC$, 则 $EK = AE = AO$.

由于 $OF \parallel KB$, 故 $\angle OFA = \angle B$,

$$\therefore Rt\triangle AOF \cong Rt\triangle EKB, \quad AF = BE.$$

故 $AE = BF$.

【证 3】仍用全等形性质.

过O引AB的平行线交BC、AC于M、N, 则 $FB \perp OM$.

$\therefore ON \perp AC, OD \perp BC$,
CO平分 $\angle NCD$,

$$\therefore ON = OD.$$

$$\therefore Rt\triangle ONA \cong Rt\triangle ODM, \quad OM = OA.$$

因 $AO = AE$ (见前法), 故 $AE = OM = FB$.

【证 4】仍用全等形性质.

如前法得 $AE = AO$. 引 $FX \perp BC, OY \perp AC$. 则FXDO为

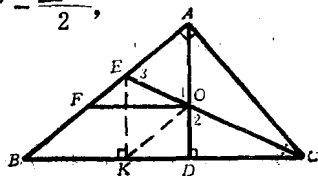


图1-15

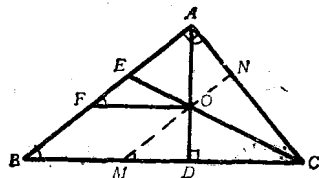


图1-16

矩形, $FX = OD$.

因 OC 平分 $\angle C$, 故 $OY = OD = FX$.

又 $\angle B = \angle CAD$,

$\therefore Rt\triangle BXF \cong Rt\triangle AYO$.

$\therefore BF = AO = AE$.

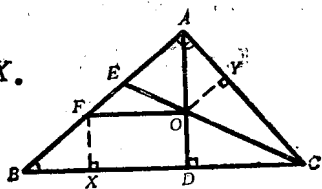


图1-17

【证 5】利用比例相似形性质.

由 CE 平分 $\angle C$, 有 $\frac{AE}{BE} = \frac{AC}{BC}$.

又 $OF \parallel BC$, 有 $\frac{BF}{BE} = \frac{CO}{CE}$.

$\therefore \angle 1 = \angle B, \quad \angle 2 = \angle 3$.

$\therefore \triangle ACO \sim \triangle BCE$.

$$\frac{AC}{BC} = \frac{CO}{CE}, \quad \frac{AE}{BE} = \frac{BF}{BE},$$

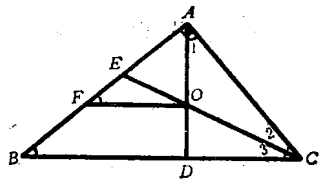


图1-18

因而 $AE = BF$.

【证 6】利用比例相似形别法.

从 CO 平分 $\angle C$, $\angle 2 = \angle 3$ (见图1-18).

故 $Rt\triangle CAE \sim Rt\triangle CDO$, 有 $\frac{AE}{OD} = \frac{AC}{CD}$.

又 $OF \parallel BC$, 有 $\frac{BF}{OD} = \frac{AB}{AD}$.

但 $Rt\triangle ABD \sim Rt\triangle CAD$, 有 $\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{AD}$.

因此 $AE = BF$.

5. 设 P 为正方形 $ABCD$ 底边 BC 上任一点, 过 P 引 AP 的垂线交 $\angle C$ 的外角平分线于 Q , 则 $AP = PQ$.

【证 1】利用全等形性质.

在 AB 上取 $AR=PC$, 连 PR .

$\because AB=BC, \therefore BR=BP$.

而 $\angle BRP=45^\circ$,

$\therefore \angle ARP=135^\circ=\angle PCQ$.

又 $\because \angle B=\angle APQ$,

$\therefore \angle 1=\angle 2$.

故 $\triangle ARP \cong \triangle PCQ, \therefore AP=PQ$.

【证 2】利用全等形别法.

连 AC . 引 $PE \perp PC$ 交 QC 的延长线于 E ,

则 $\angle PCE=45^\circ=\angle E$,

$\therefore PC=PE$.

又 $\angle ACP=45^\circ=\angle E$,

$\angle APC=90^\circ+\angle QPC=\angle QPE$,

$\therefore \triangle APC \cong \triangle QPE$.

则 $AP=PQ$.

【证 3】利用同一法.

作 $BR \parallel PQ$, 交 CD 于 R ; 引 $RQ' \parallel BC$, 交 PQ 于 Q' .

再引 $Q'S \perp BC$, 交 BC 延长线于 S , 则由 $RBPQ'$ 是平行四边形得

$BR=PQ'$.

又因 $\angle RBC=\angle Q'PS$,

$\therefore Rt\triangle RBC \cong Rt\triangle Q'PS, BC=PS, BP=CS$.

但 $\angle 1=\angle 2=\angle 3, AB=BC$,

$\therefore Rt\triangle ABP \cong Rt\triangle BCR$.

$\therefore BP=CR=Q'S, Q'S=CS=Q'R$, 故 Q' 在 $\angle C$ 外分

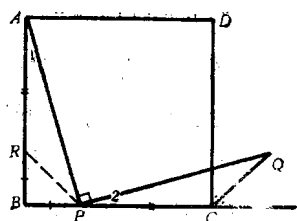


图1-19

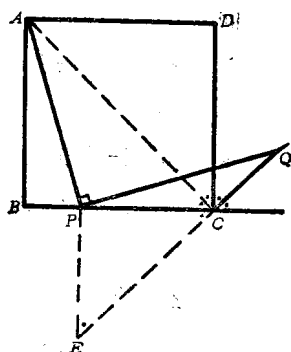


图1-20

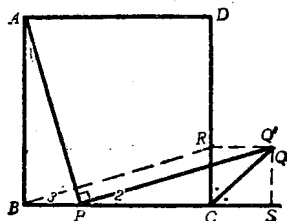


图1-21