碧海书道
BOOK HOUSE

高等学校数学学习辅导丛书

高等数学
习题全解全析

配同济五版

编著 姜乃斌 代万基

INSTRUCTION TEXTBOOK SERIES FOR MATHEMATICS

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

高等数学

习题全解全析

配同济五版

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题全解全析(配同济五版)/姜乃斌,代万基编著.
—4版.—大连:大连理工大学出版社,2009.8
高等学校数学学习辅导丛书
ISBN 978-7-5611-2498-7

Ⅰ.高… Ⅱ.①姜… ②代… Ⅲ.高等数学—高等学校—解题
Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 075386 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023
发行:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466
E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn
大连业发印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:147mm×210mm 印张:19.875 字数:829 千字
2009 年 8 月第 4 版 2009 年 8 月第 7 次印刷

责任编辑:梁 锋 王 伟 责任校对:碧 海
封面设计:季 强

ISBN 978-7-5611-2498-7 定 价:25.00 元

编者的话

近年来,大学数学方面的学习辅导书种类逐渐增多,学生们每人手中持有一种乃至数种。这其中不乏精品之作,但多数又不尽如人意。作为从教多年的教师,看到学生们渴望知识的热情,以及应试的压力,强烈的责任感驱使我们有一种将多年教学经验述于纸面的冲动,同样的责任感又使得我们迟迟没有动笔,生怕在已有的热闹非凡的出版市场上平添平庸之作,浪费时间,浪费纸张,浪费资源。

大连理工大学出版社提出要组织编写一套《习题全解(全析)》系列图书,编辑们对该系列图书清晰的思路与准确的定位,与我们的想法一拍即合,立即触发了我们的编写欲望。我们多次征求本科生、专科生,乃至研究生的意见,更加坚定了我们写好本书的信心,进一步明确了本书的定位,这就是——像习题课一样,与学生们一起通过对习题的分析、讨论、求解、总结,扎实掌握大学数学的基础,领悟大学数学的真谛。这就是我们写作本书的初衷。

同济大学《高等数学》,现在已经推出第五版。作为教科书,该书体系完整,层次清晰,叙述深入浅出,在改革教材层出不穷的今天,仍享有其他教材无法比拟的地位,深受广大教师和学生的喜爱。本书按照该教材章节顺序编写,可以与该教材配套使用。

本书详细给出全部习题的解答。真正从学习者的角度,给出解题的每一个过程与步骤,以免略掉一些看似简单但对有些同学理解解题思路很关键的细节。在解题过程中,将习题分成三个层次:

第一层次为基本题,直接给出详细解答过程。对于其中的典型

题，给出有针对性的提示和点拨。

第二层次为多知识点综合题。解题全过程控制：首先给出思路，题中重点点拨，题后归纳梳理出知识点、解题方法等。

第三层次为灵活题和难题。除给出思路、分析指导外，还给出一题多解，举一反三等，并且提示“如何才能得到答案”，如何寻求“好的解题方法”，从而真正提高学生分析问题和解决问题的能力。

学习是一个过程，而过程由环节组成。只有注重环节，控制过程，才能得到良好的学习效果。对学习大学数学来讲，课堂听讲和课后复习是两个重要环节。

本书一经推出，立即受到读者的厚爱，作为编者，深感欣慰。借此修订之际，我们根据读者反馈及编委会的意见，对原书进行了重新编排，并将解题方法及步骤进行优化。我们热切期望更多读者从中获益，并希望更多读者提出宝贵意见及建议。

编　者

2006 年 6 月

目录

第一章　函数与极限

习题 1-1

1. 设 $A=(-\infty,-5)\cup(5,+\infty)$，$B=[-10,3)$，写出 $A\cup B$，$A\cap B$，$A\backslash B$ 及 $A\backslash(A\backslash B)$ 的表达式。

解　$A\cup B=(-\infty,3)\cup(5,+\infty)$，$A\cap B=[-10,-5)$

$A\backslash B=(-\infty,-10)\cup(5,+\infty)$，$A\backslash(A\backslash B)=[-10,-5)$

---

2. 设 A、B、C 是任意三个集合，证明对偶律：$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$。

证明　$\forall x\in(A\cap B)^C$，则 $x\notin A\cap B$，即 $x\in A$ 且 $x\notin B$ 或 $x\in B$ 且 $x\notin A$，所以 $x\in B^C$ 或 $x\in A^C$，即 $x\in A^C\cup B^C$，于是 $(A\cap B)^C\subset A^C\cup B^C$。

$\forall x\in A^C\cup B^C$，则 $x\notin A$ 或 $x\notin B$，所以 $x\notin A\cap B$，即 $x\in(A\cap B)^C$，于是 $A^C\cup B^C\subset(A\cap B)^C$。

所以
$$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$$

---

3. 设映射 $f:X\to Y$，$A\subset X$，$B\subset X$。证明：

(1) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$；　(2) $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$。

(1) **证明**　$\forall y\in f(A\cup B)$，则 $y\in\{f(x)\mid x\in A$ 或 $x\in B\}=\{f(x)\mid x\in A\}\cup\{f(x)\mid x\in B\}$，于是 $y\in f(A)\cup f(B)$，即左边 $\subset$ 右边。

而 $\forall y\in f(A)\cup f(B)$，则 $y\in\{f(x)\mid x\in A\}\cup\{f(x)\mid x\in B\}=\{f(x)\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$，于是 $y\in f(A\cap B)$，即右边 $\subset$ 左边。

所以
$$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$$

(2) **证法 1**　$\forall y\in f(A\cap B)$，则 $y\in\{f(x)\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$，因为 $\{f(x)\mid x\in A$ 且 $x\in B\}\subset\{f(x)\mid x\in A\}$，且 $\{f(x)\mid x\in A$ 且 $x\in B\}\subset\{f(x)\mid x\in B\}$，所以

$$\{f(x)\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}\subset\{f(x)\mid x\in A\}\cap\{f(x)\mid x\in B\}$$

所以　$y\in f(A)\cap f(B)$，即 $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$

证法 2　$\forall y\in f(A\cap B)$，$\exists x\in A\cap B$，使得 $y=f(x)$。

由 $x\in A\cap B$ 可知，$x\in A$ 且 $x\in B$。于是，有 $f(x)\in f(A)$ 且 $f(x)\in f(B)$，这说明 $f(x)\in f(A)\cap f(B)$，即 $y\in f(A)\cap f(B)$，所以 $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$。

小结　为了证明集合 A 等于集合 B，只需证明，$\forall x\in A$，有 $x\in B$；反之，$\forall x\in$

B，有 $x \in A$ 即可。

4. 设映射 $f: X \to Y$，若存在一个映射 $g: Y \to X$，使 $g \circ f = I_X$，$f \circ g = I_Y$，其中 I_X、I_Y 分别是 X、Y 上的恒等映射，即对于每一个 $x \in X$，有 $I_X x = x$；对于每一个 $y \in Y$，有 $I_Y y = y$。证明：f 是双射，且 g 是 f 的逆映射：$g = f^{-1}$。

提示　为证明 f 为双射，只需证明 f 既为满射又为单射。

证明　$\forall y \in Y$，因为 $g: Y \to X$，所以 $g(y) = x \in X$。因为 $(f \circ g)$ 为恒等映射，所以 $f(g(y)) = (f \circ g)(y) = y$，即 $f(x) = y$，所以 f 为满射。下面用反证法证明 $f(x)$ 为单射，即证明 $\forall x_1, x_2 \in X$，且 $x_1 \neq x_2$，有 $f(x_1) \neq f(x_2)$。

因为若 $f(x_1) = f(x_2)$，则 $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$。因为 $(g \circ f)$ 为恒等映射，所以有 $x_1 = x_2$，矛盾，所以 f 为单射。综上 f 为双射。

因为 f 为单射，所以 f^{-1} 存在，设 $y = f(x)$，则 $g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = x$，所以 $g = f^{-1}$。

---

5. 设映射 $f: X \to Y$，$A \subset X$。证明：

(1) $f^{-1}(f(A)) \supset A$；　(2) 当 f 是单射时，有 $f^{-1}(f(A)) = A$。

证明　(1) $\forall x \in A$ 有 $f(x) \in f(A)$，即 $x \in f^{-1}(f(A))$，所以

$$f^{-1}(f(A)) \supset A$$

(2) $\forall x_1 \in f^{-1}(f(A))$，有 $y \in f(A)$，使 $x_1 = f^{-1}(y)$，即 $y = f(x_1)$

另一方面，由 $y \in f(A)$ 可知存在 $x_2 \in A$，且 $f(x_2) = y$

因为 f 为单射，所以 $x_1 = x_2$，所以 $x_1 \in A$，所以 $f^{-1}(f(A)) \subset A$

由 (1) 知 $f^{-1}(f(A)) \supset A$，于是

$$f^{-1}(f(A)) = A$$

---

6. 求下列函数的自然定义域：

(1) $y = \sqrt{3x+2}$；　(2) $y = \dfrac{1}{1-x^2}$；　(3) $y = \dfrac{1}{x} - \sqrt{1-x^2}$；

(4) $y = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$；　(5) $y = \sin\sqrt{x}$；　(6) $y = \tan(x+1)$；

(7) $y = \arcsin(x-3)$；　(8) $y = \sqrt{3-x} + \arctan\dfrac{1}{x}$；

(9) $y = \ln(x+1)$；　(10) $y = e^{\frac{1}{x}}$。

解　(1) $3x+2 \geqslant 0$，$x \geqslant -\dfrac{2}{3}$，函数的定义域为 $\left[-\dfrac{2}{3}, +\infty\right)$。

(2) $1-x^2 \neq 0$，$x \neq \pm 1$，函数的定义域为

$$(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$$

(3) $\dfrac{1}{x}$ 的定义域为 $x \neq 0$，$\sqrt{1-x^2}$ 的定义域为 $1-x^2 \geqslant 0$，即 $-1 \leqslant x \leqslant 1$，所以

函数的定义域为$[-1,0)\cup(0,1]$。

(4)$4-x^2>0,x^2<4,-2<x<2$,函数的定义域为$(-2,2)$。

(5) 函数的定义域为$[0,+\infty)$。

(6)$x+1\neq\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi,x\neq\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi-1$,函数的定义域为

$$\mathbf{R}\backslash\left\{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi-1\mid k\in\mathbf{Z}\right\}$$

(7) $|x-3|\leqslant 1,2\leqslant x\leqslant 4$,函数的定义域为$[2,4]$。

(8) $\sqrt{3-x}$ 的定义域为 $x\leqslant 3$, $\arctan\frac{1}{x}$ 的定义域为 $x\neq 0$,所以,函数的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,3]$。

(9)$x+1>0,x>-1$,函数的定义域为$(-1,+\infty)$。

(10)$x\neq 0$,函数的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$。

---

7. 下列各题中,函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同?为什么?

(1)$f(x)=\lg x^2,g(x)=2\lg x$;　　(2)$f(x)=x,g(x)=\sqrt{x^2}$;

(3)$f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3},g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$;

(4)$f(x)=1,g(x)=\sec^2x-\tan^2x$。

解　(1)$f(x)=\lg x^2$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,$g(x)=2\lg x$的定义域为$(0,+\infty)$。所以 $f(x)$ 和 $g(x)$ 不相同。

(2)$f(x)=x$的定义域为$(-\infty,+\infty)$。$g(x)=\sqrt{x^2}$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,但 $g(x)=x(x>0)$;$g(x)=-x,(x<0)$。故 $x<0$ 时,$f(x)\neq g(x)$。可见 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域相同,但对应法则不同,所以 $f(x)$ 和 $g(x)$ 不相同。

(3)$f(x)$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$。$g(x)$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,并且 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$ 有 $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}=x\sqrt[3]{x-1}=g(x)$,可见 $f(x)=g(x)$。

(4)$f(x)=1$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,而 $g(x)=\sec^2x-\tan^2x=\frac{1-\sin^2x}{\cos^2x}$,当 $\cos^2x=0$,即 $x=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$ 时无意义,所以 $f(x)\neq g(x)$。

评述　函数的定义域 D_f 及对应法则 f 是构成函数的两个要素,对两个函数,如果它们的定义域相同,对应法则也相同,则它们是相同的,否则是不同的。

---

8. 设

$$\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\frac{\pi}{3}\\ 0, & |x|\geqslant\frac{\pi}{3}\end{cases}$$

求 $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)$，$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$，$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)$，$\varphi(-2)$，并作出函数 $y=\varphi(x)$ 的图形。

解

$$\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{6}\right|=\frac{1}{2}$$

$$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{4}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right|=\left|-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varphi(-2)=0$$

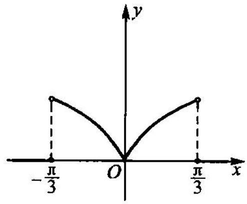

图 1-1

其图形如图 1-1 所示。

---

9. 试证下列函数在指定区间内的单调性：

(1) $y=\frac{x}{1-x}$，$(-\infty,1)$；　　(2) $y=x+\ln x$，$(0,+\infty)$。

解　(1) $\forall x_1,x_2\in(-\infty,1)$ 且设 $x_2>x_1$

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{x_2}{1-x_2}-\frac{x_1}{1-x_1}=\frac{x_2-x_1}{(1-x_1)(1-x_2)}>0\text{，即 } f(x_2)>f(x_1)\text{，}$$

所以 $y=\frac{x}{1-x}$ 在 $(-\infty,1)$ 内单调增加。

(2) $\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$ 且设 $x_2>x_1$

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)+(\ln x_2-\ln x_1)=(x_2-x_1)+\ln\frac{x_2}{x_1}$$

因为 $x_2>x_1$，所以 $x_2-x_1>0$，又 $\frac{x_2}{x_1}>1$，所以 $\ln\frac{x_2}{x_1}>0$，所以 $f(x_2)-f(x_1)>0$，即 $f(x_2)>f(x_1)$。

所以 $y=x+\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加。

---

10. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 内的奇函数，若 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加，证明 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加。

证明　$\forall x_1,x_2\in(-l,0)$ 且设 $x_2>x_1$，则

$$-x_1>-x_2\text{ 且 }-x_2,-x_1\in(0,l)$$

因为 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加，所以 $f(-x_1)>f(-x_2)$。

又因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(-x_1)=-f(x_1)$，$f(-x_2)=-f(x_2)$。

所以 $-f(x_1)>-f(x_2)$，即 $f(x_2)>f(x_1)$，所以 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内单调增加。

---

11. 设下面所考虑的函数都是定义在区间 $(-l,l)$ 上的。证明：

(1) 两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数；

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数。

证明　(1) 设 $\varphi(x)$、$\psi(x)$ 皆为偶函数，即 $\varphi(x)=\varphi(-x)$，$\psi(x)=\psi(-x)$，于是

$$\varphi(-x)+\psi(-x)=\varphi(x)+\psi(x)$$

所以 $\varphi(x)+\psi(x)$ 为偶函数。

同理可证，两个奇函数的和为奇函数。

(2) 设 $\varphi(x)=f(x)\cdot g(x)$，其中 $f(x)$、$g(x)$ 皆为偶函数。

因为 $f(x)$、$g(x)$ 为偶函数，所以 $f(-x)=f(x)$，$g(-x)=g(x)$。

于是

$$\varphi(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=f(x)\cdot g(x)=\varphi(x)$$

所以两个偶函数的乘积为偶函数。

同理可证两个奇函数的乘积为偶函数，偶函数与奇函数的乘积为奇函数。

---

12. 下列函数中哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些既非偶函数又非奇函数？

(1) $y=x^2(1-x^2)$；　　(2) $y=3x^2-x^3$；

(3) $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$；　　(4) $y=x(x-1)(x+1)$；

(5) $y=\sin x-\cos x+1$；　　(6) $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$。

解　(1) $y(x)=x^2(1-x^2)$，$y(-x)=(-x)^2(1-(-x)^2)=x^2(1-x^2)=y(x)$，所以 $y=x^2(1-x^2)$ 为偶函数。

提示　也可以用 11 题的结论，因为 x^2 为偶函数，$(1-x^2)$ 也为偶函数，所以乘积 $y=x^2(1-x^2)$ 为偶函数。第(4) 题也可这样做，因为 $y=x(x^2-1)$。

类似的方法，可以得到

(2) 非奇非偶；(3) 偶函数；(4) 奇函数；(5) 非奇非偶；(6) 偶函数。

---

13. 下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期：

(1) $y=\cos(x-2)$；　　(2) $y=\cos 4x$；　　(3) $y=1+\sin\pi x$；

(4) $y=x\cos x$；　　(5) $y=\sin^2 x$。

解　(1)
$$\begin{aligned}y(x+2\pi)&=\cos[(x+2\pi)-2]=\cos[2\pi+(x-2)]\\&=\cos(x-2)=y(x)\end{aligned}$$

所以 $y=\cos(x-2)$ 是以 2π 为周期的周期函数。

(2) $$y\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos 4\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(4x+2\pi)=\cos 4x$$

所以 $y=\cos 4x$ 是周期函数，其周期为 $\dfrac{\pi}{2}$。

用类似的方法，可以得到(3) 是以 2 为周期的周期函数；(4) 不是周期函数；(5) y

$= \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ 是以 π 为周期的周期函数。

小结　求 $y=\sin(\omega t+\varphi)$ 和 $y=\cos(\omega t+\varphi)$ 的周期 T 的方法是，令 $\omega T=2\pi$，可得 $T=\frac{2\pi}{\omega}$。在许多问题中，常遇到类似的情况。

---

14. 求下列函数的反函数：

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$；　(2) $y=\frac{1-x}{1+x}$；　(3) $y=\frac{ax+b}{cx+d}(ad-bc\neq 0)$；

(4) $y=2\sin 3x$；　(5) $y=1+\ln(x+2)$；　(6) $y=\frac{2^x}{2^x+1}$。

解　(1) 由 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 解得 $x=y^3-1$，所以反函数为 $y=x^3-1$。

(2) 由 $y=\frac{1-x}{1+x}$ 解得 $x=\frac{1-y}{1+y}$ 所以反函数为 $y=\frac{1-x}{1+x}$。

用类似方法，可以得到

(3) $y=\frac{-dx+b}{cx-a}$；　(4) $y=\frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{2}$；

(5) $y=e^{x-1}-2$；　(6) $y=\log_2\frac{x}{1-x}$。

提醒　如果 f 是定义在 D 上的单调函数，则其反函数 f^{-1} 必定存在。容易验证，在上面的问题中，这个条件是满足的，所以，它们的反函数存在。

---

15. 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义，试证：函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界。

证明　**必要性**　设 $f(x)$ 在 X 上有界，则存在 $M>0$，$\forall x\in X$ 有 $|f(x)|\leqslant M$，即 $-M\leqslant f(x)\leqslant M$，即 $f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界。

充分性　设 $f(x)$ 在 X 上既有上界 L 又有下界 l，于是 $\forall x\in X$，有 $l\leqslant f(x)\leqslant L$。取 $M=\max\{|l|,|L|\}$，则 $\forall x\in X$ 就有 $|f(x)|\leqslant M$，即 $f(x)$ 在 X 上有界。

综上，$f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界。

---

16. 在下列各题中，求由所给函数构成的复合函数，并求该函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值：

(1) $y=u^2, u=\sin x, x_1=\frac{\pi}{6}, x_2=\frac{\pi}{3}$；

(2) $y=\sin u, u=2x, x_1=\frac{\pi}{8}, x_2=\frac{\pi}{4}$；

(3) $y=\sqrt{u}, u=1+x^2, x_1=1, x_2=2$；

(4) $y=e^u, u=x^2, x_1=0, x_2=1$；

(5) $y=u^2, u=e^x, x_1=1, x_2=-1$。

解 (1) $y=(\sin x)^2=\sin^2 x, y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{4}, y\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{4}$

(2) $y=\sin 2x, y\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}, y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$

(3) $y=\sqrt{1+x^2}, y(1)=\sqrt{2}, y(2)=\sqrt{5}$

(4) $y=e^{x^2}, y(0)=1, y(1)=e$

(5) $y=(e^x)^2=e^{2x}, y(1)=e^2, y(-1)=e^{-2}$

---

17. 设 $f(x)$ 的定义域 $D=[0,1]$，求下列各函数的定义域：

(1) $f(x^2)$； (2) $f(\sin x)$；

(3) $f(x+a)(a>0)$； (4) $f(x+a)+f(x-a)(a>0)$。

解 (1) $0\leqslant x^2\leqslant 1$，$|x|\leqslant 1$，所以函数 $f(x^2)$ 的定义域为 $x\in[-1,1]$。

(2) $0\leqslant \sin x\leqslant 1$，所以函数的定义域为 $x\in[2n\pi,(2n+1)\pi], n\in\mathbf{Z}$。

(3) $0\leqslant x+a\leqslant 1$，即函数定义域为 $-a\leqslant x\leqslant 1-a$。

(4) 因为 $0\leqslant x+a\leqslant 1$，所以 $-a\leqslant x\leqslant 1-a$。

又因为 $0\leqslant x-a\leqslant 1$，所以 $a\leqslant x\leqslant 1+a$。

所以函数的定义域为 $D=[-a,1-a]\cap[a,1+a]$。

显然，若 $a\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$，则 $D=[a,1-a]$；若 $a>\frac{1}{2}$，则 $D=\varnothing$。

（$\varnothing$ 表示空集）

---

18. 设

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1\end{cases}\quad g(x)=e^x$$

求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$，并作出这两个函数的图形。

解

$$f[g(x)]=f(e^x)=\begin{cases}1, & |e^x|<1\\ 0, & |e^x|=1\\ -1, & |e^x|>1\end{cases}$$

因为当 $x<0$ 时，$|e^x|<1$；$x=0$ 时，$|e^x|=1$；$x>0$ 时，$|e^x|>1$，所以

$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & x<0\\ 0, & x=0\\ -1, & x>0\end{cases}$$

其图形如图 1-2 所示。

仿上面的方法，易得

$$g[f(x)] = e^{f(x)} = \begin{cases} e, & |x| < 1 \\ 1, & |x| = 1 \\ \dfrac{1}{e}, & |x| > 1 \end{cases}$$

其图形如图 1-3 所示。

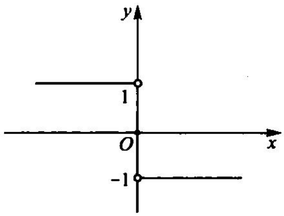

图 1-2

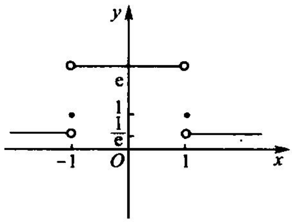

图 1-3

---

19. 已知水渠的横断面为等腰梯形，斜角 $\varphi = 40°$（如图 1-4 所示）。当过水断面 $ABCD$ 的面积为定值 S_0 时，求湿周 $L(L = AB + BC + CD)$ 与水深 h 之间的函数关系式，并指明其定义域。

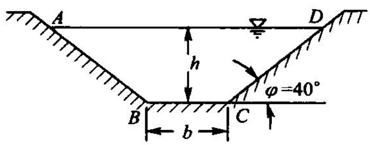

图 1-4

解　$h = AB\sin\varphi = DC\sin\varphi, AB = DC = \dfrac{h}{\sin 40°}$

梯形面积为

$$S_0 = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot h$$

又由 $AD = BC + 2\cot 40° \cdot h$ 得

$$S_0 = \frac{1}{2}[BC + (BC + 2\cot 40° \cdot h)] \cdot h$$

所以
$$BC = \frac{S_0}{h} - \cot 40° \cdot h$$

又湿周
$$L = AB + BC + CD = \frac{S_0}{h} - \cot 40° \cdot h + \frac{2h}{\sin 40°}$$
$$= \frac{S_0}{h} + \frac{2 - \cos 40°}{\sin 40°} \cdot h$$

由变量 h 的实际意义知，$h > 0, \dfrac{S_0}{h} - \cot 40° \cdot h > 0$，故函数 L 的定义域为 $0 < h < \sqrt{S_0 \cdot \tan 40°}$。

确定实际问题中的函数的定义域，应依变量本身的实际意义而定，在这一点上与求函数的自然定义域是有区别的。

20. 收音机每台售价为 90 元，成本为 60 元。厂方为鼓励销售商大量采购，决定凡是订购量超过 100 台以上的，每多订购 1 台，售价就降低 1 分，但最低价为每台 75 元。

(1) 将每台的实际售价 p 表示为订购量 x 的函数；

(2) 将厂方所获的利润 P 表示成订购量 x 的函数；

(3) 某一商行订购了 1000 台，厂方可获利润多少？

解　(1) 当 x 不超过 100 台，即 $0 \leqslant x \leqslant 100$ 时，$p = 90$；

当 $x > 100$ 时，依题意有 $p = 90 - (x - 100) \cdot 0.01$；

又当 $p = 75$ 元时，即 $75 = 90 - (x - 100) \cdot 0.01$，解得订购量 $x = 1600$，所以 $x \geqslant 1600$ 时，$p = 75$。

于是 p 与 x 的函数关系为

$$p = \begin{cases} 90, & 0 \leqslant x \leqslant 100 \\ 90 - (x - 100) \cdot 0.01, & 100 < x < 1600 \\ 75, & x \geqslant 1600 \end{cases}$$

(2) 利润 P 等于每台售价减去成本乘以订购量，即

$$P = \begin{cases} (90 - 60)x, & 0 \leqslant x \leqslant 100 \\ [90 - (x - 100) \cdot 0.01 - 60]x, & 100 < x < 1600 \\ (75 - 60)x, & x \geqslant 1600 \end{cases}$$

即

$$P = \begin{cases} 30x, & 0 \leqslant x \leqslant 100 \\ 31x - 0.01x^2, & 100 < x < 1600 \\ 15x, & x \geqslant 1600 \end{cases}$$

(3) 设厂方获利为 L，因为订购量 $x = 1000$ 大于 100，又小于 1600，所以

$$L = 31 \times 1000 - 0.01 \times (1000)^2 = 21\ 000 \text{ 元}$$

习题 1-2

1. 观察一般项 x_n 如下的数列 $\{x_n\}$ 的变化趋势，写出它们的极限：

(1) $x_n = \dfrac{1}{2^n}$；　(2) $x_n = (-1)^n \dfrac{1}{n}$；　(3) $x_n = 2 + \dfrac{1}{n^2}$；

(4) $x_n = \dfrac{n-1}{n+1}$；　(5) $x_n = n(-1)^n$。

解　(1)0　(2)0　(3)2　(4)1　(5) 无极限

---

2. 设数列 $\{x_n\}$ 的一般项 $x_n = \dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2}$。问 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = ?$ 求出 N，使当 $n > N$ 时，x_n 与其极限之差的绝对值小于正数 ε。当 $\varepsilon = 0.001$ 时，求出数 N。

解 $\forall n\in\mathbf{Z}$,有$\left|\cos\frac{n\pi}{2}\right|\leqslant 1$,所以当$n\to\infty$时,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}=0$,即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=0$$

$\forall\varepsilon>0$,因为$\left|\cos\frac{n\pi}{2}\right|\leqslant 1$,所以欲使$\left|\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}-0\right|<\varepsilon$成立,只需$\frac{1}{n}<\varepsilon$,即$n>\frac{1}{\varepsilon}$,取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,则当$n>N$时,就有$\left|\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}-0\right|<\varepsilon$成立,当$\varepsilon=0.001$时,$N=1000$。

---

3. 根据数列极限的定义证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}=\frac{3}{2}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$;　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{0.999\cdots9}_{n\text{个}}=1$。

证明 (1) $\forall\varepsilon>0$,要使不等式$\left|\frac{1}{n^2}-0\right|<\varepsilon$成立,只需$n^2>\frac{1}{\varepsilon}$,即$n>\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$,取$N=\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$,则当$n>N$时就有$\left|\frac{1}{n^2}-0\right|<\varepsilon$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$。

(2) $\left|\frac{3n+1}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|=\frac{1}{2(2n+1)}<\frac{1}{n}$,$\forall\varepsilon>0$,要使不等式$\left|\frac{3n+1}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon$成立,只需$\frac{1}{n}<\varepsilon$,即$n>\frac{1}{\varepsilon}$,取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,则当$n>N$时就有不等式$\left|\frac{3n+1}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon$成立,所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}=\frac{3}{2}$。

(3) $\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|=\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}\right|=\frac{a^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)}<\frac{a^2}{n}$,$\forall\varepsilon>0$,要使$\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$,只需$\frac{a^2}{n}<\varepsilon$,即$n>\frac{a^2}{\varepsilon}$,取$N=\left[\frac{a^2}{\varepsilon}\right]$,则当$n>N$时就有不等式$\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$。

(4) $\underbrace{0.999\cdots9}_{n\text{个}}=1-\frac{1}{10^n}$,$\forall\varepsilon>0$,要使$|0.999\cdots9-1|<\varepsilon$,只需

$$\left|\left(1-\frac{1}{10^n}\right)-1\right|=\frac{1}{10^n}<\varepsilon$$

即$n>\lg\frac{1}{\varepsilon}$,取$N=\left[\lg\frac{1}{\varepsilon}\right]$,则当$n>N$时就有$|0.999\cdots9-1|<\varepsilon$,所以