GAODENG SHUXUE XUEXI ZHIDAO

# 高等数学学习指导

浙江省教委高教处 组编

吴迪光 张彬 编著

杭州大学出版社

GAODENG SHUXUE XUEXI ZHIDAO

高等数学学习指导

吴迪光　张　彬　编著

*

杭州大学出版社出版发行

（杭州天目山路 34 号）

*

杭州大学出版社电脑排版部排版　浙江上虞印刷厂印刷

787×1092 毫米 1/16　13.25 印张　322 千字

1998 年 8 月第 1 版　1998 年 8 月第 1 次印刷

印数：0001—5000

ISBN 7-81035-511-2/O·073

定　价：16.00 元

# 前　言

**一、本课程的目的要求**

高等学校课程中，高等数学是一门重要的基础理论课，它为学习后继课程，以及为进一步学习数学知识打好必要的数学基础。书中标有 * 号部分，系供不同层次、不同专业的教学要求选用。本课程的基本要求是：

1．理解下列基本概念和它们之间的联系

函数、极限、无穷小与无穷大、连续、导数、微分、不定积分、常微分方程、二向量的数量积与向量积、曲面与曲线的方程、偏导数、全微分、二重积分、曲线积分、* 三重积分、* 曲面积分、无穷级数的收敛与发散性。

2．理解下列基本定理和公式并能正确运用

极限的主要定理、罗尔定理、拉格朗日中值定理、泰勒定理、定积分作为变上限的函数及其求导的定理、牛顿—莱布尼兹公式、格林公式、* 高斯公式。

3．牢固掌握下列基本公式

基本导数公式、基本积分公式、函数 $e^x$、$\sin x$、$\cos x$、$(1+x)^a$、$\ln(1+x)$ 的幂级数展开式。

4．熟练运用下列法则和方法

函数的和、差、积、商求导法则、反函数的求导法则、复合函数的求导法则、隐函数的求导法则、参数式函数的求导法则、第一类与第二类换元积分法、分部积分法、二重积分计算法、曲线积分计算法、* 三重积分计算法、* 曲面积分计算法、级数收敛性的比较判别法和达朗贝尔判别法、交错级数收敛性判别法、变号项级数的绝对收敛与条件收敛的判别法。幂级数收敛半径和收敛区间的求法、变量可分离的一阶常微分方程的解法、一阶线性常微分方程的解法、二阶常系数线性常微分方程的解法。

5．会运用微积分和常微分方程的方法解决一些简单的几何、物理或经济中的问题。

**二、本学习指导书的作用**

本学习指导书是为了帮助读者明确课程的基本要求和内容思路，解答学习中可能出现的疑难点问题，介绍一些解题方法，并配置少量的参考性习题，以便读者更好地学好高等数学的内容，加深对基础知识的认识和理解，培养和提高学习能力。在“基本要求”中，对要求的高低，用不同的词汇加以区分，从高到低，对概念和理论部分，用“理解”、“了解”、“知道”三级区分；对运算部分，用“掌握”、“熟悉”、“会”三级区分，以便读者分清主次轻重。

思维自疑问始，在学习中多问几个“为什么”，弄清内容的基本思路，注意概念的建立，理论的线索，解题的方法，举一反三，在学习中学习做学问的方法，不断提高学习效率。

本书第一、二、三、四、八、十一、十二章由吴迪光撰稿，第五、六、七、九、十章由张彬撰稿。对于书中不当之处，敬希读者批评指正。

吴迪光　张　彬

1998 年 4 月于浙江大学

# 简　　介

本书是受浙江省教委委托，为成人高等学校和全日制高等专科学校高等数学课程而编写的学习指导用书。全书共十二章，内容有函数、极限与连续、一元函数的微积分、常微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数的微积分、无穷级数(包括傅里叶级数)。每章由以下四个部分组成:(1)“基本要求与内容思路”，提出一章的学习基本要求，简述一章内容的思路与概貌;(2)“疑难点问答”，提出学习中经常发生的一些疑难问题，以问答形式叙述;(3)“解题方法选介”，列举较多例题，介绍各种解题方法，以帮助提高解题能力;(4)“参考习题”，选编少量习题，供读者练习之用。

本书可供成人高等教育与全日制高等专科教育作学习指导教材，或成人高等教育作自学考试(包括专升本)用书。

# 高等数学学习指导

[illegible]

杭 州 大 学 出 版 社

# 目　录


前　言 …… (1)
第一章　函数 …… (1)
§1　基本要求与内容思路 …… (1)
§2　疑难点问答 …… (2)
§3　解题方法选介 …… (5)
§4　参考习题 …… (8)
第二章　极限与连续 …… (10)
§1　基本要求与内容思路 …… (10)
§2　疑难点问答 …… (12)
§3　解题方法选介 …… (15)
§4　参考习题 …… (20)
第三章　导数与微分 …… (21)
§1　基本要求与内容思路 …… (21)
§2　疑难点问答 …… (22)
§3　解题方法选介 …… (27)
§4　参考习题 …… (33)
第四章　微分学的中值定理 …… (35)
§1　基本要求与内容思路 …… (35)
§2　疑难点问答 …… (36)
§3　解题方法选介 …… (40)
§4　参考习题 …… (44)
第五章　导数的应用 …… (45)
§1　基本要求与内容思路 …… (45)
§2　疑难点问答 …… (46)
§3　解题方法选介 …… (51)
§4　参考习题 …… (58)
第六章　不定积分 …… (60)
§1　基本要求与内容思路 …… (60)
§2　疑难点问答 …… (61)
§3　解题方法选介 …… (64)
§4　参考习题 …… (71)
第七章　定积分及其应用 …… (73)

§1　基本要求与内容思路……………………………………………………（73）
§2　疑难点问答……………………………………………………………（75）
§3　解题方法选介…………………………………………………………（78）
§4　参考习题………………………………………………………………（91）
**第八章　常微分方程** ………………………………………………………（93）
§1　基本要求与内容思路……………………………………………………（93）
§2　疑难点问答……………………………………………………………（94）
§3　解题方法选介 ………………………………………………………（101）
§4　参考习题 ……………………………………………………………（111）
**第九章　向量代数与空间解析几何**………………………………………（112）
§1　基本要求与内容思路 ………………………………………………（112）
§2　疑难点问答 …………………………………………………………（115）
§3　解题方法选介 ………………………………………………………（120）
§4　参考习题 ……………………………………………………………（129）
**第十章　多元函数的微分学**………………………………………………（131）
§1　基本要求与内容思路 ………………………………………………（131）
§2　疑难点问答 …………………………………………………………（133）
§3　解题方法选介 ………………………………………………………（137）
§4　参考习题 ……………………………………………………………（148）
**第十一章　多元函数的积分学**……………………………………………（151）
§1　基本要求与内容思路 ………………………………………………（151）
§2　疑难点问答 …………………………………………………………（155）
§3　解题方法选介 ………………………………………………………（163）
§4　参考习题 ……………………………………………………………（174）
**第十二章　无穷级数**………………………………………………………（176）
§1　基本要求与内容思路 ………………………………………………（176）
§2　疑难点问答 …………………………………………………………（180）
§3　解题方法选介 ………………………………………………………（187）
§4　参考习题 ……………………………………………………………（194）
**参考习题答案**………………………………………………………………（196）

# 第一章

# 函　数

## §1　基本要求与内容思路

**一、基本要求**

函数是高等数学研究的主要对象，基本要求是：

1. 理解函数定义的两个要素：定义域与对应规则.
2. 知道函数的单调性、奇偶性、周期性、有界性.
3. 了解反函数、复合函数的概念，会分析复合函数的复合步骤.
4. 掌握基本初等函数的定义域及其图形.
5. 知道初等函数的定义，会求它的定义域；知道分段函数的定义.
6. 会将简单的几何、物理或经济问题中的函数关系用数学式子表示出来.

**二、内容思路与概貌**

函数反映物质世界事物变化过程中变量间相互联系与相互依从的关系. 函数定义中有两要素：定义域与对应规则，两者缺一不可. 如两要素相同，则认为是等同的函数；如至少有一不同，则是不同的函数.

函数记号 $y=f(x)$ 中，$f$ 表示对应规则，它可以是数学表达式、图形或表格，自变量 $x$ 的取值范围(定义域)可以是区间或孤立点集. 一个函数的对应规则 $f$，如果分段用不同数学表达式来表示，称为分段函数. 因变量 $y$ 的变化范围称为函数的值域，当函数的定义域与对应规则给定时，函数的值域也随之而定.

函数 $y=f(x)$ 与反函数 $x=f^{-1}(y)$(或 $x=\varphi(y)$) 的对应规则是相反的，前者 $x$ 是自变量，后者 $y$ 是自变量，但在习惯上将 $x$ 看成自变量，因此将 $x=f^{-1}(y)$(或 $x=\varphi(y)$) 中变量的记号 $x$ 与 $y$ 对调，写成 $y=f^{-1}(x)$(或 $y=\varphi(x)$). 这样，在几何图形上统一将自变量取在 $x$ 轴上，以便在同一直角坐标 $xOy$ 中画出它们的图形.

对于复合函数可适当引入中间变量，分解为若干个简单函数. 反之，若干个简单函数，当内层函数的值域与外层函数的定义域的交集非空时，则可构成复合函数.

初等函数是由基本初等函数经过有限次加、减、乘、除与有限次函数复合所构成的函数. 它是重要的且常见的一类函数. 了解函数的单值性、单调性、有界性、奇偶性、周期性等性质，对于研究函数的性态，简化计算是非常必要的.

本章内容概貌如下：

$$
\text{函数}\begin{cases}
\text{函数 } y=f(x)\begin{cases}\text{定义域 — 自变量 } x \text{ 的取值范围}\\ \text{对应规则 } f\text{— 数学表达式、图形、表格}\\ \text{值域 — 因变量 } y \text{ 的变化范围}\end{cases}\\
\begin{matrix}\text{反函数 } x=f^{-1}(y)\\ (\text{或 } x=\varphi(y))\end{matrix}\begin{cases}\text{定义域 — 自变量 } y \text{ 的取值范围}\\ \text{对应规则 —}f^{-1}(\text{或 }\varphi)\\ \text{值域 — 因变量 } x \text{ 的变化范围}\end{cases} \xRightarrow{x\text{与}y\text{互换}} \begin{matrix} y=f^{-1}(x)\\ (\text{或}y=\varphi(x))\end{matrix}\\
\text{函数的复合 } x\Rightarrow \boxed{f} \overset{f(x)}{\Rightarrow} \boxed{g} \Rightarrow g[f(x)]\text{ 复合函数}\\
\qquad\qquad (\text{内层函数的值域与外层函数的定义域的交集非空时})\\
\text{基本初等函数 } \xRightarrow[\text{有限次函数复合}]{\text{有限次加、减、乘、除}} \text{ 初等函数}\\
\text{分段函数 — 对应规则 } f \text{ 分段用不同数学表达式表示}\\
\text{函数的单调性、有界性、奇偶性、周期性}
\end{cases}
$$

## §2 疑难点问答

1. **问** 确定函数的定义域，一般有什么方法？

**答** 第一，对用数学式表示的函数，其定义域未明确指定，即是指使数学表达式有意义的自变量的取值范围，它称为**自然定义域**. 求自然定义域时，要注意使函数有意义的限制条件. 例如

(1)偶次根式表达的函数，其根号下的值非负，即

$$y=\sqrt[n]{f(x)}\quad (n\text{ 偶数}),\quad f(x)\geqslant 0.$$

(2)分式函数，其分母的值不等于零，即

$$y=\frac{1}{f(x)},\quad f(x)\neq 0.$$

(3)对数函数的真数值必须大于零，即

$$y=\log_a f(x)\quad (a>0,a\neq 1),\quad f(x)>0.$$

(4)有限多个函数的加、减、乘运算得到的函数，其定义域是这些函数定义域的交集. 例如：设 $f(x),g(x),\frac{1}{h(x)}$ 的定义域分别是 $D_1,D_2,D_3$，则有

$$y=\frac{f(x)+g(x)}{h(x)},\quad D=\{x\,|\,D_1\cap D_2\cap D_3\}.$$

(5)复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的定义域 $D$，是其内层函数 $\varphi(x)$ 定义域 $D_1$ 的子集，即 $D\subset D_1$.

(6)如果 $x=\varphi(y)$ 是函数 $y=f(x)$ 的反函数，那么，$x=\varphi(y)$ 的定义域就是 $y=f(x)$ 的值域，反之亦然.

(7)奇函数与偶函数的定义域是关于原点对称.

(8)分段函数的定义域是各个分段式子给出的 $x$ 的变化范围的并集.

第二，对几何、物理等实际问题中的函数，它的定义域由问题的实际意义来确定. 例如，距地面高 $h$ 的自由落体运动

$$s = f(t) = \frac{1}{2}gt^2,$$

其定义域 $D = \left\{t \mid 0 \leqslant t \leqslant \sqrt{\frac{2h}{g}}\right\} \subset (-\infty, +\infty)$.

2. 问　函数记号 $y = f(x)$ 如何理解?

答　$f$ 表示函数中的对应规则，在用数学式表达的函数中，它表示一批数学运算，依次作用在自变量 $x$ 上. 如 $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ 中 $f$ 表示先对 $x$ 平方，再从 1 减去它，然后开平方.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, f(x-1) = \sqrt{1-(x-1)^2} = \sqrt{2x - x^2},$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{|x|} \text{等}.$$

因此，这里 $f$ 是由方程 $f(\quad) = \sqrt{1 - (\quad)^2}$ 所定义，欲求它在 $x_0$ 处的值，只需把 $x_0$ 的值代入括号中.

3. 问　什么叫两个函数相等?

答　设两个函数 $f(x), g(x)$，如果它们的定义域相同且对定义域内每一个 $x$ 的值，都有 $f(x) = g(x)$，则这两个函数相等. 例如

$$f(x) = \log_2 \sqrt{x^2}, \quad g(x) = \log_2 |x|$$

定义域都是 $D = \{x \mid x \neq 0\}$，且对每一个 $x \in D$，都有 $\log_2 \sqrt{x^2} = \log_2 |x|$，故这两个函数相等. 又如

$$f(x) = \log_2 x^2, \qquad g(x) = 2\log_2 x$$

是不相等的，因为它们定义域不相同，$f(x)$ 的定义域是 $D = \{x \mid x \neq 0\}$，$g(x)$ 的定义域是 $D_1 = \{x \mid x > 0\}$.

4. 问　为什么说 $f(x) = C$(常数) 表示一个函数?如果说表示一个函数，是否具有周期性与奇偶性?

答　由于对任一 $x \in (-\infty, +\infty)$，都有确定的值 $C$(常数) 与之对应，由函数定义，$f(x) = C$(常数) 表示一个函数，它的定义域是 $D = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$. 且 $f(x) = C$ 是周期函数，以任意非零实常数 $a$ 为周期. 这是由于对任一实数 $a \neq 0$，$f(x + a) = C$，因此

$$f(x + a) = f(x),$$

即 $T = a$ 是函数 $f(x) = C$ 的周期. 但由于正实数 $a$ 中没有最小的一个，所以它没有最小的正周期.

又由于 $f(x) = C$ 的定义域是关于原点对称的区间 $(-\infty, +\infty)$，对于该区间任一 $x$ 的值，都有

$$f(-x) = f(x) = C,$$

故 $f(x) = C$ 是偶函数. 特别是 $C = 0$ 时，等式

$$f(-x) = f(x) \quad \text{与} \quad f(-x) = -f(x)$$

同时成立，故 $f(x) = 0$，既是偶函数又是奇函数.

5. 问　为什么说，任何一个定义在关于原点对称的区间上的函数，都可表示为一个奇函数与一个偶函数之和?

答　设任一函数 $f(x), x \in (-l, l)$，有恒等式

$$f(x) \equiv \left[\frac{f(x)-f(-x)}{2}\right]+\left[\frac{f(x)+f(-x)}{2}\right] \xlongequal{\text{记}} G(x)+H(x),$$

其中 $$G(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},\quad H(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}.$$

由于 $$G(-x)=\frac{f(-x)-f(x)}{2}=-\frac{f(x)-f(-x)}{2}=-G(x),$$

及 $$H(-x)=\frac{f(-x)+f(x)}{2}=\frac{f(x)+f(-x)}{2}=H(x),$$

故 $G(x)$ 是奇函数，$H(x)$ 是偶函数. 例如

$$e^x=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)+\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)=\operatorname{sh}x+\operatorname{ch}x,$$

这里 $\operatorname{sh}x$ 是奇函数，$\operatorname{ch}x$ 是偶函数.

6. 问　为什么说，若 $f(x)$ 是以 $T(>0)$ 为周期的周期函数，则 $f(\omega x)(\omega>0)$ 是以 $\frac{T}{\omega}$ 为周期的周期函数？

**答**　在函数 $f(\omega x)$ 中，对任意 $x\in D$，以 $x+\frac{T}{\omega}\in D$ 代换 $x$ 时，由 $f(x)$ 是以 $T$ 为周期的周期函数，故有

$$f\left[\omega\left(x+\frac{T}{\omega}\right)\right]=f(\omega x+T)=f(\omega x),$$

由周期函数的定义，$f(\omega x)$ 是以 $\frac{T}{\omega}$ 为周期的周期函数.

例如 $\sin x$ 的周期 $T=2\pi$，$\sin 2x$ 的周期为 $\frac{T}{\omega}=\frac{2\pi}{2}=\pi$，$\sin\frac{x}{2}$ 的周期为 $\frac{T}{\omega}=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$. 这样，我们可以由 $y=\sin x$ 的图形，在纵坐标不变的条件下，将周期缩小一倍或扩大一倍，便得 $y=\sin 2x$ 与 $y=\sin\frac{x}{2}$ 的图形.

7. 问　设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 分别是以下 $T_1, T_2$ 为周期的周期函数，那么 $f(x)+g(x)$ 与 $f(x)g(x)$ 是否亦必是周期函数？

**答**　不一定. 仅当 $\frac{T_1}{T_2}=a$ 是有理数时，即存在正整数 $m,n$ 使 $\frac{T_1}{T_2}=\frac{m}{n}$，从而 $T_1$ 与 $T_2$ 的最小公倍数 $nT_1$ 或 $mT_2$ 就是 $f(x)+g(x)$ 与 $f(x)g(x)$ 的周期.

又当 $\frac{T_1}{T_2}=a$ 是无理数时，即 $T_1$ 与 $T_2$ 不可通约，这时 $f(x)+g(x)$ 与 $f(x)g(x)$ 便不一定是周期函数.

例如 $\sin x$，$\sin 2x$，$\sin\pi x$ 都是周期函数，周期分别为 $T_1=2\pi$，$T_2=\pi$，$T_3=2$，且 $\frac{T_1}{T_2}=2$ 为有理数；$\frac{T_1}{T_3}=\pi$ 为无理数，故 $\sin x+\sin 2x$ 与 $\sin x\cdot\sin 2x$ 为周期函数，$\sin x+\sin\pi x$ 与 $\sin x\cdot\sin\pi x$ 不是周期函数.

8. 问　是否任何两个函数 $y=f(u)$，$u=g(x)$ 都能构成复合函数？

**答**　否. 例如 $y=\sqrt{1-u}$，$u=x^2+3$ 是不能构成复合函数的. 因为任何 $x$ 值相对应的 $u$ 值，都不属于 $y=\sqrt{1-u}$ 的定义域，亦即 $f[g(x)]=\sqrt{1-(x^2+3)}=\sqrt{-x^2-2}$，$-x^2-2<0$，平方根下为负这是没有意义的.

9. 问　如何设置中间变量，把一个复合函数分解成若干个简单函数？即如何把一个复

合函数当作由这些简单函数复合而成的函数?

**答** 注意分析复合函数的复合步骤,由表及里,设置中间变量,例如复合函数 $y=\left(\operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{2}{3}}$,设置中间变量 $u,v$,于是表层为 $y=u^{\frac{2}{3}}$,中层为 $u=\operatorname{arctg}v$,里层为 $v=\frac{x-1}{x+1}$ 这三个简单函数复合而成的函数.

10. **问** 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 可构成复合函数 $f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$,什么情况下 $f[g(x)]=g[f(x)]$?

**答** 我们知道,一般情况下,$f[g(x)]\neq g[f(x)]$. 要这两个复合函数相等,只有当 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互为反函数,且 $f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$ 的定义域相同时,才有 $f[g(x)]=g[f(x)]=x$.

例如 $f(x)=3x+2$ 与 $g(x)=\frac{x-2}{3}$ 互为反函数,且二复合函数的定义域相同,即有 $f[g(x)]=g[f(x)]=x,\quad x\in(-\infty,+\infty)$.

又如 $f(x)=e^x$ 与 $g(x)=\ln x$ 互为反函数,但 $f[g(x)]=e^{\ln x}=x, x\in(0,+\infty)$; $g[f(x)]=\ln e^x=x, x\in(-\infty,+\infty)$,所以只能说在 $f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$ 的定义域交集 $(0,+\infty)$ 中,两者的函数值相等,皆等于 $x$,但还不能说这两个复合函数相等,因为它们的定义域是不同的.

## §3 解题方法选介

**例 1** 求下列函数的定义域:

(1)$y=\sqrt{\ln\frac{1-x}{1+x}}$, (2)$y=\arcsin\frac{x-3}{2}+\sqrt{x^2-4}$.

**解** (1) 由于 $y=\sqrt{\ln\frac{1-x}{1+x}}$ 是由

$$y=\sqrt{u},\quad u=\ln v,\quad v=\frac{1-x}{1+x}$$

复合而成的复合函数,要求 $u=\ln v\geqslant 0$,必须 $v=\frac{1-x}{1+x}\geqslant 1$,从而 $\frac{1-x}{1+x}-1\geqslant 0$,即 $\frac{-2x}{1+x}\geqslant 0$. 我们将 $(-\infty,+\infty)$ 以 $-1,0$ 为分点,分为三个区间来考虑:

| $x$ | $(-\infty,-1)$ | $(-1,0)$ | $(0,+\infty)$ |
| --- | --- | --- | --- |
| $\frac{-2x}{1+x}$ | $-$ | $+$ | $-$ |

得所求函数定义域是 $D=\{x\mid -1<x\leqslant 0\}$.

(2)因 $\arcsin\frac{x-3}{2}$ 的定义域是 $\left|\frac{x-3}{2}\right|\leqslant 1$,即 $|x-3|\leqslant 2$,亦即 $-2\leqslant x-3\leqslant 2$,得 $A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 5\}$.

又 $\sqrt{x^2-4}$ 的定义域是 $x^2-4\geqslant 0$,即 $|x|\geqslant 2$,得 $B=\{x\mid x\geqslant 2 \text{ 或 } x\leqslant -2\}$.
所求两个函数和的定义域是

$$D=A\cap B=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 5\}.$$

**例 2** 设 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}(x\neq 0,1)$，试证：

$(1)f\{f[f(x)]\}=f(x)$，　　$(2)f\left[1+\dfrac{1}{f(x)}\right]=f(x)+1$.

**证** (1)在 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ 中，以 $f(x)$ 代 $x$ 得

$$f[f(x)]=\frac{f(x)}{f(x)-1}=\frac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x}{x-1}-1}=\frac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x-x+1}{x-1}}=x,$$

然后，在 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ 中，以 $f[f(x)]$ 代 $x$，并由上述结果，得

$$f\{f[f(x)]\}=\frac{f[f(x)]}{f[f(x)]-1}=\frac{x}{x-1}=f(x).$$

(2)在 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ 中，以 $1+\dfrac{1}{f(x)}$ 代 $x$，得

$$f\left[1+\frac{1}{f(x)}\right]=\frac{1+\dfrac{1}{f(x)}}{1+\dfrac{1}{f(x)}-1}=\frac{\dfrac{f(x)+1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}}=f(x)+1.$$

**证毕**

**例 3** 求函数 $y=\mathrm{sh}x$ 的反函数.

**解** 由 $y=\mathrm{sh}x=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{2\mathrm{e}^x}$，即有 $(\mathrm{e}^x)^2-2y\mathrm{e}^x-1=0$，解方程，于是得 $\mathrm{e}^x=y\pm\sqrt{y^2+1}$. 因 $\mathrm{e}^x>0$，舍去负号，得 $x=\ln(y+\sqrt{y^2+1})$，交换 $x,y$，得

$$y=\mathrm{sh}^{-1}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1}),\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

**例 4** 设对任意实数 $t\neq 0$，关系式

$$2f(t)+3f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{t}$$

成立，试求 $f(x)$.

**解** 因 $t$ 可取任意不为零的实数，故当 $x\neq 0$ 时，可分别令 $t=x$ 及 $t=\dfrac{1}{x}$，于是得

$$2f(x)+3f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x},\tag{3.1}$$

$$2f\left(\frac{1}{x}\right)+3f(x)=x,\tag{3.2}$$

以 3 乘(3.2)，2 乘(3.1)，然后相减，消去 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，得

$$9f(x)-4f(x)=3x-\frac{2}{x},$$

解得

$$f(x)=\frac{1}{5}\left(3x-\frac{2}{x}\right).$$

**例 5** 用合成法作函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ 的图形.

**解** 由于 $f(-x)=-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)$，故 $f(x)$ 为奇函数，只要作出 $y=x+\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的图形，则由奇函数的图形关于原点对称，便得 $(-\infty,0)$ 上的图形.

令 $y_1=x$，$y_2=\dfrac{1}{x}$，于是 $y=y_1+y_2$. 先作出 $y_1=x$，$y_2=\dfrac{1}{x}$ 的图形，然后对同一横坐

标 $x$ 的值，将 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 相加，便得 $y=f(x)$ 的图形（如图 1-1）.

$y=x+\dfrac{1}{x}$，当 $|x|$ 越大时，越接近 $y=x$；当 $|x|$ 越小时，越接近 $y=\dfrac{1}{x}$.

**例 6** 已知函数 $y=f(x)$ 的图形（如图 1-2 实线所示），对 $k>0$，试作 $y=f(x-k)$ 与 $y=f(x+k)$ 图形.

**解** 由于函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的值 $f(x_0)$ 与 $y=f(x-k)$ 在 $x=x_0+k$ 处的值相同，将 $y=f$ 的图形向右平移 $k$ 个单位，就得到 $y=f(x-k)$ 的图形.

同理，将 $y=f(x)$ 的图形向左平移 $k$ 个单位，便得到 $y=f(x+k)$ 的图形，如图 1-2 虚线所示.

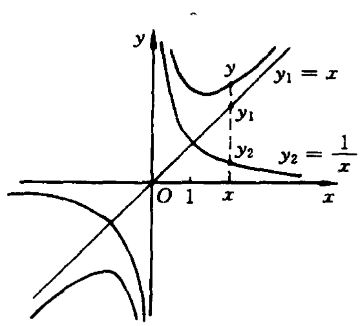



图 1-1

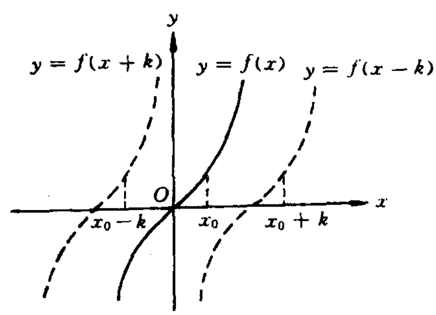



图 1-2

**例 7** 作函数 $y=|x-2|+|2x+1|$ 的图形.

**解** 为了去绝对值符号，需将函数的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 分成三个区间 $(-\infty,-\frac{1}{2}]$，$(-\frac{1}{2},2]$，$(2,+\infty)$ 来考虑，即

当 $x\in(-\infty,-\frac{1}{2}]$ 时，$y=-(x-2)-(2x+1)$

$=-3x+1$；

当 $x\in(-\frac{1}{2},2]$ 时，$y=-(x-2)+(2x+1)$

$=x+3$；

当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$y=x-2+2x+1$

$=3x-1$，

于是
$$y=\begin{cases}-3x+1, & \text{当 } -\infty<x\leqslant-\dfrac{1}{2};\\ x+3, & \text{当 } -\dfrac{1}{2}<x\leqslant 2;\\ 3x-1 & \text{当 } 2<x<+\infty.\end{cases}$$

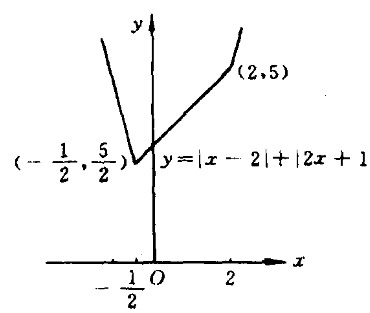



图 1-3

如图 1-3.

**例 8** 一半径为 $a$ 的圆形矽钢片，锯去如图 1-4 所示阴影部分后剩下部分为两个互相垂直相同的矩形，试将剩下部分的面积表示为(1) 如图 1-4 中顶点 $P$ 的横坐标 $x$ 的函数，(2) 如图 1-4 中中心角 $\theta$ 的函数.

**解** (1) 取坐标系如图 1-4，由于矩形的顶点在圆周上，设顶点 $P$ 的坐标为 $(x,y)$，已知圆半径为 $a$，所求面积随顶点 $P$ 的位置而定，由于对称性，所求面积应为第一象限部分的 4

倍. 而第一象限部分面积为 $2xy-y^2$，于是所求面积为

$$S=4(2xy-y^2).$$

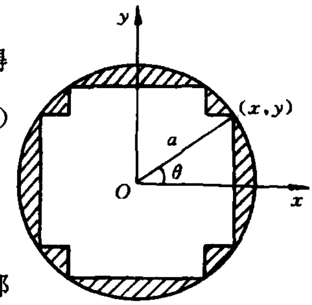



图 1-4

又点 $P(x,y)$ 在圆 $x^2+y^2=a^2$ 上，将 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 代入上式，得

$$S=4\left[2x\sqrt{a^2-x^2}-(a^2-x^2)\right],\frac{a}{\sqrt{2}}\leqslant x\leqslant a. \quad (3.3)$$

(2) 令 $x=a\cos\theta, y=a\sin\theta$ 代入(3.3)式，得

$$S=4a^2(\sin2\theta-\sin^2\theta),\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}.$$

**例 9** 最大整数函数 对任一实数 $x, x\in(-\infty,+\infty)$，都可写成

$$x=(\text{整数})+(\text{非负纯小数}),$$

或记为 $$x=[x]+r\quad(0\leqslant r<1),$$

称 $f(x)=[x]$ 为**最大整数函数**. 或用分段函数表示为(如图 1-5)

$$y=[x]=\begin{cases}\cdots\cdots \\ -1, & \text{当 } -1\leqslant x<0; \\ 0, & \text{当 } 0\leqslant x<1; \\ 1, & \text{当 } 1\leqslant x<2; \\ \cdots\cdots \\ n, & \text{当 } n\leqslant x<n+1; \\ \cdots\cdots\end{cases}$$

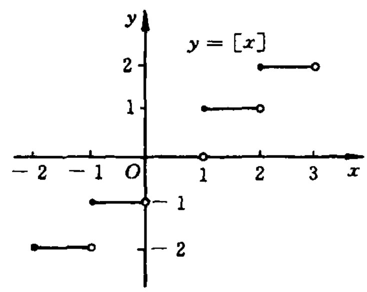



图 1-5

当 $x$ 为正数时，最大整数函数 $[x]$ 有重要的应用，此时，该函数相当于 $x$ 的小数部分被舍去. 例如

$$[1.235]=1,\quad [3.1415]=3.$$

**例 10** 一工厂在一天 8 小时的工作时间内可生产 10000 件产品，每一天的固定开工成本为 4000 元，每件产品的单位成本为 5 元，利用最大整数函数，生产 $x$ 件产品的成本可表示为

$$C(x)=4000\left(1+\left[\frac{x-1}{10000}\right]\right)+5x.$$

即在第 1 个 8 小时中，$1\leqslant x\leqslant 10000$，$\left[\frac{x-1}{10000}\right]=0$，故

$$C(x)=4000\left(1+\left[\frac{x-1}{10000}\right]\right)+5x=4000+5x.$$

在第 2 个 8 小时中，$10001\leqslant x\leqslant 2000$，$\left[\frac{x-1}{10000}\right]=1$，故

$$C(x)=4000\left(1+\left[\frac{x-1}{10000}\right]\right)+5x=8000+5x.$$

如此，其他类似可得.

## §4 参考习题

1. 求下列函数的定义域：

(1)$y=\sqrt{x^2+2x-3}$，　　(2)$y=\arccos\dfrac{x-3}{5}$，

(3)$y=\dfrac{\ln\sin x}{\sqrt{16-x^2}}$，　　(4)$y=\sqrt{\log_2\dfrac{5x-x^2}{4}}$.

2. 已知 $f(x)$ 当 $0<x<1$ 时有定义，求下列函数的定义域：

(1)$f(1-x^2)$，　(2)$f(\ln x)$，　(3)$f(\operatorname{arctg} x)$.

3. 求 $f(x)$，已知

(1)$f(2x-1)=x^2$，　(2)$f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}(x\neq 0)$，

(3)$f(\sin^2 x)=\cos 2x+\operatorname{tg}^2 x$.

4. 问函数 $f(x)=x$ 是否与下列函数相等：

(1)$g(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2$，　(2)$g(x)=\sqrt{x^2}$，

(3)$g(x)=e^{\ln x}$，　(4)$g(x)=\sin(\arcsin x)$.

5. 设 $f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为偶函数，试确定下列函数的奇偶性：

(1)$f(x)f(x)$，　(2)$f(x)g(x)$，　(3)$f[f(x)]$，　(4)$g[f(x)]$.

6. 证明下列函数的反函数：

(1)$f(x)=\sqrt{2x-3}$，则 $f^{-1}(x)=\dfrac{x^2+3}{2}$，$x\geqslant 0$；

(2)$\operatorname{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$，则 $\operatorname{ch}^{-1}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$，$x\geqslant 1$；

(3)$\operatorname{th}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$，则 $\operatorname{th}^{-1}x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$，$-1<x<1$.

7. 试讨论 $f[g(x)]$ 的单调性，若

(1)$f(x)$ 与 $g(x)$ 均为单调增；　(2)$f(x)$ 与 $g(x)$ 均为单调减；

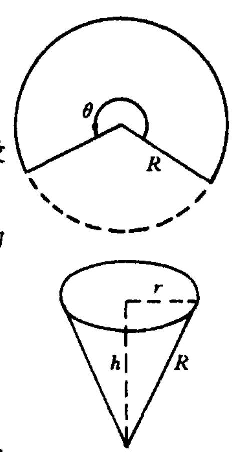
(3)$f(x)$ 单调增，$g(x)$ 单调减；　(4)$f(x)$ 单调减，$g(x)$ 单调增.

8. 设 $y=f(x)=\cos x$，$x\in[0,\pi]$，试作出下列函数的图形：

(1)$y=-f(x)$，　(2)$y=f(x+2)$，　(3)$y=2f(x)$，

(4)$y=f(x)+2$，　(5)$y=f(2x)$，　(6)$y=|f(x)|$.

9. 一半径为 $R$ 的圆形铁片，自中心剪去一扇形后，将剩余部分(设中心角为 $\theta$) 围成一无底圆锥，试将这圆锥的体积 $V$ 表示为 $\theta$ 的函数.



题 9 图

10. 一厂家生产某产品，单位变动成本为 12.30 元，固定成本为 98000 元，单位产品售价为 17.98 元.

(1)将总成本 $C$ 表示为生产单位 $x$ 的函数；

(2)将总收益 $R$ 表示为生产单位 $x$ 的函数；

(3)将总利润 $L$ 表示为生产单位 $x$ 的函数.

11. 某公司的存货数为 $N(t)=25\left(2\left[\dfrac{t+2}{2}\right]-t\right)$，其中 $t$ 表示时间(月份数)，试画出该函数的图形，又该公司多久需重新补货.

# 第二章

# 极限与连续

## §1 基本要求与内容思路

### 一、基本要求

极限是建立在无限观念基础上的概念，极限方法是处理无限过程的分析方法，它与处理有限的方法有本质的不同，但又是有联系的.

本章基本要求是：

1. 理解数列极限 $\varepsilon$—$N$ 定义的思想，以及知道：

   数列收敛的必要条件 —— 有界性；

   数列收敛的充分条件 —— 单调有界准则.

2. 理解当 $x \to \infty$ 时，函数 $f(x)$ 极限是 $A$（常数）的 $\varepsilon$—$N$ 定义的思想，知道 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ 的几何意义．水平渐近线.

3. 理解当 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 极限是 $A$（常数）的 $\varepsilon$—$\delta$ 定义的思想.

   了解当 $x \to x_0$ 时，函数极限的局部有界性和局部保号性.

   了解函数的单侧极限（左极限，右极限）与双侧极限（函数极限）的关系.

4. 知道无穷小的定义和性质，无穷小与函数极限的关系.

5. 知道无穷大的定义，无穷小与无穷大的关系.

   知道 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ 的几何意义．铅直渐近线.

6. 理解函数极限的夹逼准则，两个重要的极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$.

7. 掌握运用极限四则运算法则求极限，以及运用两个重要的极限求极限.

8. 知道无穷小的阶（高价，$k$ 阶，等价）的概念．会利用等价无穷小代换定理求 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式的极限.

9. 理解函数在一点处连续与间断的概念，知道初等函数在定义区间上连续的结论．会求函数的连续区间，能判断函数间断点的类型.

10. 知道闭区间上连续函数的性质（最大值、最小值定理和介值定理），会用介值定理证明方程的根的存在性.