

高等學校教學用書

投影幾何學

張世鈞等編譯

高等教育出版社

高等学校教学用书



投 影 几 何 学

張世鈞等編譯

高等教育出版社

本書系大連工學院張世鈞等根據蘇聯恰爾(A. Т. Чалый)著的“投影幾何學”編譯而成；編譯時曾參考了高爾頓(В. О. Гордон)與謝緬卓夫-奧吉也夫斯基(М. А. Семенов-Огиевский)合著的“投影幾何教程”及其他參考書籍。

上述原著都經蘇聯高等教育部審定為機械製造及機械工程高等學校的教學參考書。

本書原由商務印書館出版，自1955年8月起，改由本社出版。

投 影 幾 何 學

張世鈞等編譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇號

(北京市書刊出版業營業許可証出字第〇五四號)

天津第一印刷廠印刷 新華書店總經售

統一書號 15010·314 開本 787×1092 1/16 印張 12 1/8 字數 257,000

一九五五年三月北京新一版

一九五六年十二月天津第一次印刷

印數 40,001—45,000 定價 (8) 每 1.20

目次

序言	5
第一章 緒論	7
§ 1.1 研究投影幾何學的目的	7
§ 1.2 關於投影方法的基本知識	8
第二章 點	11
§ 2.1 點的投影	11
§ 2.2 點在二投影面體系中的各種位置	13
§ 2.3 點在三投影面體系中的各種位置	16
問題(一)	22
習題(一)	22
第三章 直線	24
§ 3.1 直線的投影	24
§ 3.2 直線在空間的位置	25
§ 3.3 線段的實長及其與投影面所成的角度	30
§ 3.4 把線段分成定比	32
§ 3.5 直線的跡點	33
問題(二)	37
習題(二)	37
§ 3.6 二直線的相對位置	39
§ 3.7 相交二直線所成角度的投影	42
問題(三)	44
習題(三)	44
第四章 平面	45
§ 4.1 平面的表示法及跡線	45
§ 4.2 平面在空間的各種位置	49
問題(四)	55
習題(四)	55
§ 4.3 在平面上的直線與點	57
§ 4.4 平面上的特殊直線	59
§ 4.5 二平面的交線	63
問題(五)	68
習題(五)	69
第五章 直線與平面	71
§ 5.1 相互平行的直線與平面	71
§ 5.2 相交的一直線與一平面	75
問題(六)	78
習題(六)	78
§ 5.3 相互垂直的直線與平面	81
§ 5.4 看得見和看不見的問題	85
問題(七)	88
習題(七)	88

第六章 投影的改造	90
§ 6.1 變更投影面的方法	90
§ 6.2 變更一個投影面	91
§ 6.3 變更兩個投影面	95
問題(八)	98
習題(八)	98
§ 6.4 圖形的旋轉	99
§ 6.5 點的旋轉	100
§ 6.6 線段的旋轉	101
§ 6.7 平面的旋轉	105
§ 6.8 不指明旋轉軸位置的旋轉法	106
§ 6.9 立體的旋轉	107
問題(九)	108
習題(九)	109
§ 6.10 重合法	111
§ 6.11 反旋轉法	114
問題(十)	116
習題(十)	116
第七章 平面立體	118
§ 7.1 怎樣在平面立體的表面上取直線和點	118
§ 7.2 平面立體的截斷面和展開圖	119
§ 7.3 直線貫穿平面立體	123
問題(十一)	126
習題(十一)	127
§ 7.4 平面立體與平面立體的相貫線	128
問題(十二)	134
習題(十二)	134
第八章 曲線及曲面	135
§ 8.1 曲線的作圖及其展開	135
§ 8.2 圓錐曲線	137
§ 8.3 螺旋線	137
§ 8.4 曲面	140
§ 8.5 單曲面(可以展開的直線面)	140
§ 8.6 拗面(不能展開的直線面)	144
§ 8.7 旋轉面	147
問題(十三)	150
習題(十三)	150
第九章 曲面立體	151
§ 9.1 曲面立體的截斷面	151
問題(十四)	156
習題(十四)	156
§ 9.2 直線貫穿曲面立體	157
§ 9.3 曲面立體與平面立體的相貫線	160

§ 9.4 曲面立體與曲面立體的相貫線	162
問題(十五)	169
習題(十五)	169
§ 9.5 曲面的展開圖	170
問題(十六)	176
習題(十六)	177
第 十 章 軸測投影	178
§ 10.1 基本知識	178

§ 10.2 正軸測投影的軸向縮短係數	180
§ 10.3 正軸測投影的軸間角	181
§ 10.4 平面立體的正軸測投影圖	183
§ 10.5 曲面立體的正軸測投影圖	186
§ 10.6 斜軸測投影	191
問題(十七)	193
習題(十七)	194

序 言

過去國內工學院投影幾何課程，大多採用“Anthony & Ashley: Descriptive Geometry”一書為課本。最初我們因為找不到適當教材，亦擬按照該書內容編寫。

一九五〇年春，我系講師殷開泰，在編寫期中找到了一本蘇聯高等教育部所審定的高等學校教本“В. О. Гордон и М. А. Семенцов-Огиевский: Курс Начертательной Геометрии; Огиз Гостехиздат, 1948”，發現該書內容很豐富，而且講述方法與英文本大不相同；它的系統清楚而嚴密，由淺入深，由簡及繁，完全符合於初學者的思想方法的過程。同年六月，我系成立了工程畫教研組，決定根據上述蘇聯教本進行編寫投影幾何的教材，由劉培德同志領導，張世鈞、殷開泰、高志希三同志參加工作。當時，因為我們規定學生學習這門課程的時間很少，不能學完蘇聯教本的全部內容；同時，又因為離上課只有兩個多月，也不可能把該書全部翻譯過來，於是決定抽出該書的基本內容，編寫講義，作為我們的臨時教材。

首先擬定教學大綱，經過教研組討論通過之後，就由張世鈞、殷開泰、高志希三同志根據大綱分工編寫；每完成一章，即先經劉培德同志修改，然後再經大家輪流校核。

為了慎重起見，在編完講義之後，曾進行了試講；并根據系內聽講的同志們對講義內容所提出的意見，稍作了修正。我們在同年的暑期，就是用這個講義給學生作了補課，效果很好（那一批學生在一年級沒有學過投影幾何）。

同年九月，開始第二次教這門課程。范懷遠同志亦參加教學工作，並在教學過程中，對講義內容提出了一些寶貴的意見。

本年春，我們決定根據過去兩次的教學經驗，來修改這本講義。這時，劉、高二同志的工作已有調動，所以講義的修改工作就由張、殷、范三同志來負責進行。首先由范同志從新擬定了教學大綱，經張、殷二同志討論通過之後，決定由張世鈞同志根據新定的大綱，並主要參考“A. T. Чалый: Начертательная Геометрия; Машгиз, 1949”的教本，從新編譯；脫稿後，曾請范、殷二同志審校，劉、高二同志亦審校了一部份。另外請張述慶、郭克強、徐集楡三同志分別負責整理、校訂及繪圖等工作。

本書有下列一些特點：

（一）本書是按照一個學期 2（講授）—2（實習）—3（自習）—7（合計）的學時編寫的。如果利用掛圖來幫助講課並適當地加以精簡，則對於一個學期 2—2—2—6 的學時，亦可適用。

（二）本書以第一角畫法為主，以便在講課時易於用模型來作表演。

（三）本書中插入很多寫生圖，來幫助說明。

（四）在每兩節課（一週）之後，都設有若干問題，以備學生複習和討論之用。

（五）本書很重視畫法與原理的結合，在解決每一個問題時，都提出了充分的理論根據，

以免學生只知其然而不知其所以然。

由於工程畫教研組的同志們之通力合作和集體努力，終於在較短期間內完成了本書的編譯工作，解決了目前沒有適當中文教本的困難。根據兩次教學的經驗，在學生易於接受這門課程一點上，的確也收到了一定的效果。

但是，我們教學的同志們，經驗還很少，研究也還不深刻，而“向蘇聯學習”也只是才走了第一步。因此，在這本書中，一定還存在着不少的缺點和錯誤。我們誠懇地希望教育界和工程界的同志們多多賜予批評與指正。

胡國棟

1951年8月於大連工學院機械系

第一章 緒 論

§ 1.1 研究投影幾何學的目的

任何物體都佔有空間的一部份。物體各個部份的形狀、大小以及它在空間的相對位置等，都可以直接地量出來，或者是經過適當的計算來決定的。

但是在研究物體的形狀、大小及相對位置等幾何性質時，常常並不是根據物體本身，而是把物體畫在平面上，利用它的圖來進行研究的。

這些二次元的圖（繪畫、照片等），能够在相當程度上幫助我們想像在空間的三次元的物體。但是在畫這些圖的時候，如果沒有一個特別的方法和規定，就不能够精確地決定所研究的物體在空間的相對位置，也不能够精確地決定它的大小，同時也不能够決定它的各個部份的相對位置。

而在工程上，却要求物體的這種圖，能够比較容易地把它精確的尺寸和各個部份的相對關係反映出來。

投影幾何學就是解決這個問題的科學。它要找出和建立一些方法，來把三次元空間的幾何圖形畫在平面上；並使得我們能够根據這些方法來精確地決定這些幾何圖形在量度上和投影上的一切特性。

研究投影幾何學有三個主要目的：

1. 它要研究各種方法，來畫出現存的和新造的各種物體；
2. 它要研究各種方法，來根據所給的二次元的圖，把許多幾何圖形在三次元空間內的相互關係反映出來；也就是要找出為正確的讀圖所不可缺少的方法；
3. 它要研究各種圖解法，來解決屬於空間幾何圖形的作圖題。

上述三點就決定了它在工程上各種課程中的地位。首先，投影幾何學對於工程畫提供了理論根據。

其次，有許多科學上和技術上的問題，要用一般的數學方法來研究它們是很複雜的。但是這些問題，往往可以恰恰用投影幾何學的方法，很簡單地獲得解決。

同時，投影幾何學的知識，對於學習材料力學、機械零件及研究工程上的某些特殊問題是有幫助的。

此外，我們還應當知道，投影幾何學這門課程，在培養對科學的思想方法的習慣上，具有重大的意義。這門課程既可以使學生的空間概念更加明確，又可以增強學生運用“比較”和“類比”等方法的能力；這些方法在解決理論問題和實際問題時都是有用的。同時，投影幾何學方法的運用，還可以使入養成一種習慣，這就是：不作模糊的陳述，而用嚴密的、合乎邏輯的論議與結論之鎖鏈，來把所作的“比較”和“類比”聯系起來。

對於工程師來講，投影幾何學方法的知識是必須具備的；如果沒有這個知識，就很難做出任何有成果的技术工作。

§ 1.2 關於投影方法的基本知識

在投影幾何學中，是使用投影的方法來畫圖的。

有限個或無限個點的集合，叫做幾何圖形；圖形中的每一點，叫做該幾何圖形的原素。

設有兩個幾何圖形 F, F' ；對於 F 上的每一個原素 A ，在 F' 上只有一個原素 A' 對應着；而對於 F' 上的每一個原素 A' ，在 F 上也只有一個原素 A 對應着。這時，這兩個幾何圖形 F, F' 就叫做互相成投影的兩個圖形。

現在取三角形 ABC (圖 1.1) 為例。通過任意一點 S 和三角形 ABC 的各個頂點，作三直線 SA, SB, SC 。假如取一個任意的新三角形 abc ，使它的頂點相應地在直線 SA, SB, SC 上。這時，對於第一個三角形 ABC 上的一點 M ，在第二個三角形 abc 上只有一個點 m 對應着；如果第一個三角形 ABC 上的 M 點是取在直線 BC 上，則第二個三角形 abc 上的 m 點就一定在直線 bc 上。三角形 ABC (圖形 F) 和三角形 abc (圖形 F') 是互相成投影的兩個圖形。

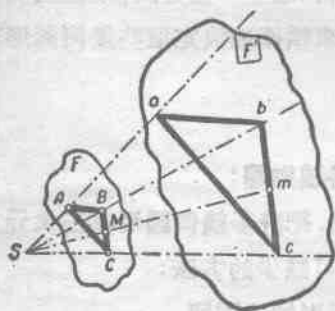


圖 1.1

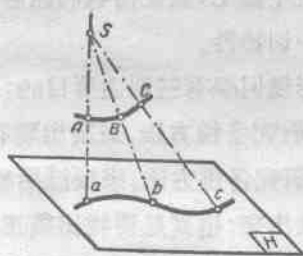


圖 1.2

中心投影法：在空間設想一個定平面 H 和一個定點 S (圖 1.2)。用直線把定點 S 和空間的一個幾何圖形的各個原素 $A, B, C, \dots$ 連接起來，使直線 $SA, SB, SC, \dots$ 與定平面 H 相應地交於 $a, b, c, \dots$ 等點。這時， $a, b, c, \dots$ 等點分別叫做 $A, B, C, \dots$ 等點在 H 平面上的中心投影，定點 S 叫做投影中心，定平面 H 叫做投影面，直線 $SA, SB, SC, \dots$ 等叫做投影線， $A, B, C, \dots$ 等點叫做投影點。這種投影方法，就叫做中心投影法。

使 $A, B, C, \dots$ 等點投影的，那個出於中心 S 的投影線束，就形成了一個投射曲面。於中心投影法，這個曲面在一般情形下是一個錐面。因此，中心投影法也叫做錐面投影法。

於中心投影法，假如投影面 K (圖 1.3) 是位於投影中心 S 與投影點 $A, B, C, \dots$ 之間的一個鉛直平面，而中心 S 同時又是觀察者的視點時，在 K 平面上所得的中心投影 $a, b, c, \dots$ 等，就叫做 $A, B, C, \dots$ 等點的透視投影或簡稱為透視圖。這時，投影面 K 叫做畫面，畫面被

設想是透明的。在畫面上所得到的透視圖，是富於實感的；這種圖常用於建築工程、畫地圖、空中攝影測量、結晶圖等，同時也為畫家所採用。圖 1.4 是一個建築物的透視圖。

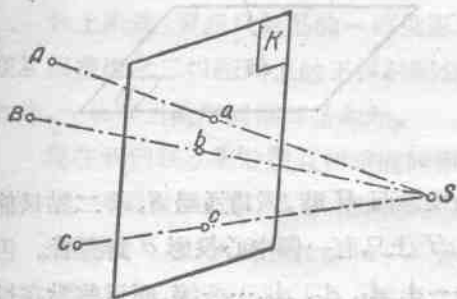


圖 1.3



圖 1.4

平行投影法：於中心投影法，如果我們把投影中心 S 移至無窮遠，則投影線 $SA, SB, SC, \dots$ 等就變成平行線（圖 1.5）。像這樣，用定方向的平行線作為投影線的投影方法，就叫做平行投影法。

於平行投影法，使 $A, B, C, \dots$ 等點投影的，那個平行的投影線束，在一般情形下就形成了一個柱面。因此，平行投影法也叫做柱面投影法。

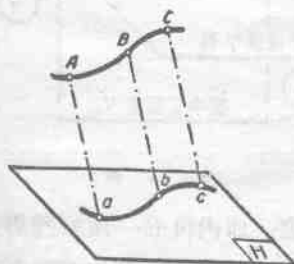


圖 1.5

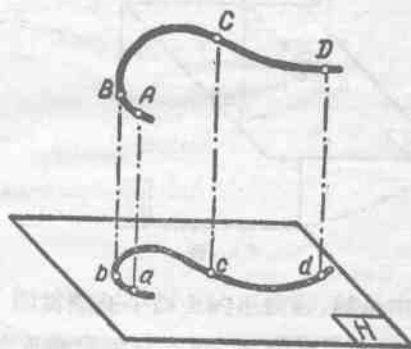


圖 1.6

正投影法：平行投影法可以分為斜角投影法與直角投影法兩種。於斜角投影法，投影線與投影面的交角不是直角；於直角投影法，這個交角就是直角（圖 1.6）。

直角投影法在工程畫裏用得最廣，也叫做正投影法。根據正投影法畫圖時，既簡單又精確。以下本書除了最後一章以外，其餘各章所講的都是正投影法。

中心投影法、平行投影法、正投影法都具有一個共通的特性。這就是：在一定的投影條件之下，空間的點可以完全決定它的投影的位置，但點的一個投影卻不能夠決定該點在空間的位置。

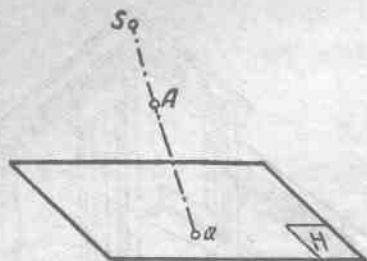


圖 1.7

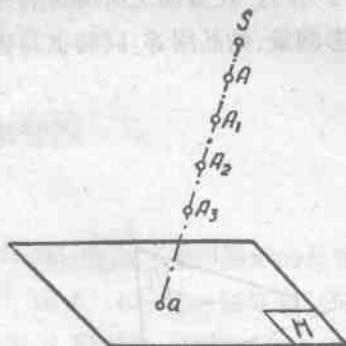


圖 1.8

例如於圖 1.7, 取一定的投影中心 S 和一定的投影面 H 時, 因為通過 S, A 二點只能够作出一個直線; 所以對於空間的一點 A , 在投影面 H 上只有一個中心投影 a 對應着。但如圖 1.8 所示, 在一個投影線上可以隨意取很多點—— $A, A_1, A_2, A_3, \dots$ 等, 而這些點在投影面 H 上的中心投影都重合在 a 點; 所以單靠點的一個中心投影 a , 是不能够決定該點在空間的位置。中心投影法如此, 平行投影法和正投影法也同樣是如此。

第二章 點

§ 2.1 點的投影

如上所述，要想只靠點的一個投影來決定該點在空間的位置，是不可能的。但如果把點在互相垂直之二投影面上的正投影配合在一起，就可以完全決定該點在空間的位置。點是如此，一切幾何圖形同樣都是如此。

現在我們在空間設想互相垂直的兩個投影面；一個是水平面 H ，叫做橫面；另一個是鉛直面 V ，叫做縱面（圖 2.1）。這兩個投影面的交線 OX 叫做投影軸。

投影面 V 和 H 都被投影軸 OX 分成兩半；橫面 H 被分成前半（ H ）和後半（ H_1 ），縱面 V 被分成上半（ V ）和下半（ V_1 ）。整個空間又被二投影面 V, H 分成四個部份，每一個部份叫做分角；這四個分角的數法如圖 2.1 所示。

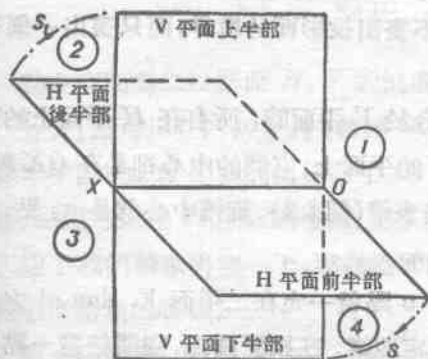


圖 2.1

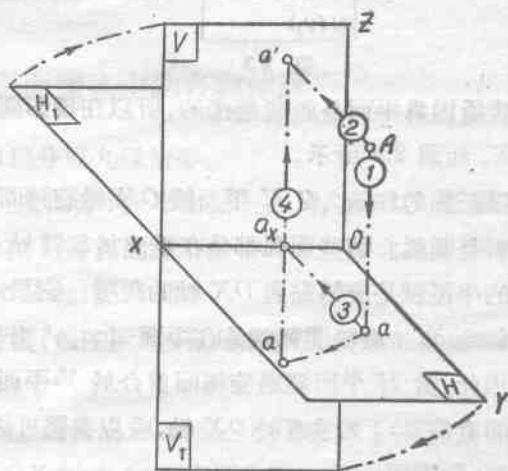


圖 2.2

現在我們在第一分角內取一點 A （圖 2.2）。因為點在平面上的正投影，就是由該點向該平面所作垂線的垂足；所以由 A 點向 H 平面作垂線得垂足 a 時， a 點就是 A 點在橫面上的投影，叫做 A 點的橫面投影。再由 A 點向 V 平面作垂線得垂足 a' 時， a' 點就是 A 點在縱面上的投影，叫做 A 點的縱面投影。

由二投影線 Aa （橫面投影線）， Aa' （縱面投影線）所決定的平面 Aaa_xa' 同時垂直於二投影面 V, H ，所以它就必然垂直於 V, H 的交線 OX 。平面 Aaa_xa' 與 V, H 分別相交於二直線 $a'a_x$ 及 aa_x ，二直線 $a'a_x$ 和 aa_x 又相交於 a_x 點。

現在再倒過來，由 a 點作 H 平面的垂線 aA ，由 a' 點作 V 平面的垂線 $a'A$ 。這時，因為這兩個垂線都在平面 Aaa_xa' 上，所以它們一定相交於一點 A 。這就是說，只要依靠 A 點的橫面投影 a 和縱面投影 a' 就可以完全決定 A 點在空間的位置。

投影圖：在上述二投影體系中，決定 A 點在空間之位置的橫面投影 a 和縱面投影 a' 是在互相垂直的二投影面 H, V 上，而不是在同一平面上。但是我們在實際畫圖的時候，却是要把圖畫在圖紙上。因此，在投影之後，還要使正交的二投影面中之一，繞投影軸 OX 旋轉 90° ，使二投影面完全重合。我們規定 V 平面不動，而使 H 平面按照箭頭的方向（圖 2.1, 2.2）繞 OX 軸旋轉 90° 。如果由左方（即由點 X ）面對着 OX 軸來看，則 H 平面的旋轉應按照順時針的方向。

物體在投影面上的投影和投影面一道，經過上述旋轉而重合在同一平面上時的圖，就叫做投影圖。把圖 2.1 中的兩個投影面 H, V 畫成投影圖，則如圖 2.3 所示。

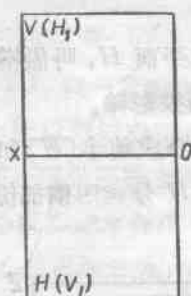


圖 2.3



圖 2.4

普通因為平面是廣闊無邊的，所以在投影圖上不畫出投影面的境界，而只畫出一個投影軸 OX ，如圖 2.4 所示。

投影圖的作法：使 H 平面繞 OX 軸旋轉而重合於 V 平面時，所有在 H 平面上的點的軌跡都是圓弧。這些圓弧都是在垂直於旋轉軸 OX 的平面上，它們的中心都是在 OX 軸上，它們的半徑就是旋轉點與 OX 軸的距離。對於 a 點來講（圖 2.2），旋轉中心就是 a_x 點，旋轉半徑就是 aa_x ，旋轉圓弧就是在平面 Aaa_xa' 上。

因此，當 H 平面經過旋轉而重合於 V 平面時， a 點就一定在二平面 V, Aaa_xa' 之交線上。而直線 aa_x 又垂直於 OX 軸，所以我們可以肯定地講：在投影圖上，空間任意一點的兩個投影（即橫面投影與縱面投影）一定是在投影軸 OX 的同一垂直線上。

這樣，我們就可以按照如下的步驟，從 A 點及其投影 a, a' 的寫生圖（圖 2.5）來作它的投影圖（圖 2.6）：

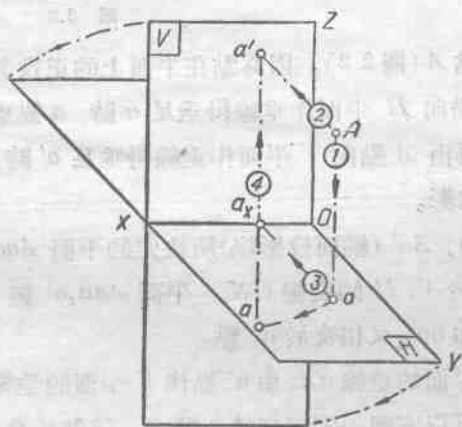


圖 2.5

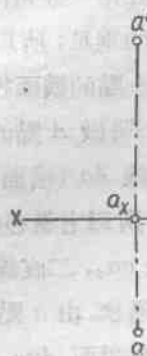


圖 2.6

1) 在圖上任意的地方作水平的投影軸 OX ; 在軸上 O 點的左方取一點 a_x , 使該點與 O 點的距離等於圖 2.5 中的線段 Oa_x 。

2) 通過 a_x 點作直線垂直於 OX 。

3) 在這個垂線上, 由 a_x 點向上取線段 $a_x a'$, 使該線段的長度等於 A 點與 H 平面的距離(於圖 2.5, $Aa = a_x a'$)。所得的 a' 點就是 A 點的縱面投影。

4) 由圖 2.5 可知, 當 H 平面經過旋轉而重合於 V 平面之後, A 點的橫面投影 a 就移到 OX 軸的下方。因此, 爲了求出 a 點, 就要在所作的垂線上, 由 a_x 點向下取線段 $a_x a$, 使該線段的長度等於 A 點與 V 平面的距離(於圖 2.5, $Aa' = aa_x$)。

投影圖的讀法: 要想用投影圖(圖 2.6)來想像第一分角內之 A 點在空間的位置, 就需要在腦中設想: 以直線 OX 爲折縫把圖折起來, 使 H, V 二平面構成直角並使圖的下半成爲橫面的前半; 然後再由 a 點作直線垂直於 H , 由 a' 點作直線垂直於 V 。這兩個垂線的交點, 就決定了 A 點在二面角(H, V)內的位置。

必須特別指出: 在投影圖(圖 2.6)中, A 點的縱面投影 a' 與 OX 軸的距離, 就是 A 點與 H 平面的距離; 橫面投影 a 與 OX 軸的距離, 就是 A 點與 V 平面的距離。

§ 2.2 點在二投影面體系中的各種位置

點在空間對二投影面 H, V 的位置, 可以分成九種情形。

首先, 點可以在四個分角(即第一、二、三、四分角)中之某一分角內。其次, 點又可以在四個半平面(即 H 平面的前後兩半 H, H_1 和 V 平面的上下兩半 V, V_1)中之某一半平面上。最後, 點還可以在 H, V 二平面的交線(即 OX 軸)上。

以下我們就來研究一下, 點在空間的位置(如上所述, 有九種情形)對它的橫面投影與縱面投影所給與的特徵。

第一種情形: 點 $A(a, a')$ 在第一分角內。這種情形, 我們已經研究過了(圖 2.5, 2.6)。在投影圖(圖 2.6)上, A 點的縱面投影 a' 在 OX 軸的上方, 橫面投影 a 在 OX 軸的下方。

第二種情形: 點 $B(b, b')$ 在第二分角內(圖 2.7)。在投影圖(圖 2.8)上, B 點的兩個投

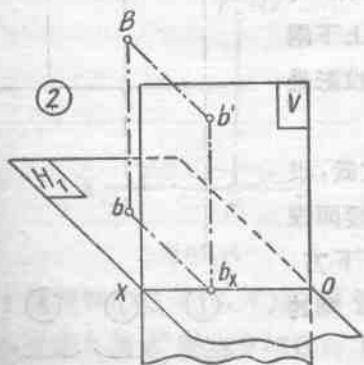


圖 2.7

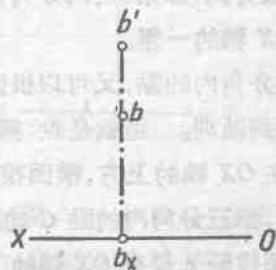


圖 2.8

影 b, b' 都在 OX 軸的上方。

第三種情形：點 $C(c, c')$ 在第三分角內(圖 2.9)。在投影圖(圖 2.10)上, C 點的两个投影被分在 OX 軸的兩側;但和第一分角內的點有所區別,即橫面投影 c 在 OX 軸的上方,縱面投影 c' 在 OX 軸的下方。

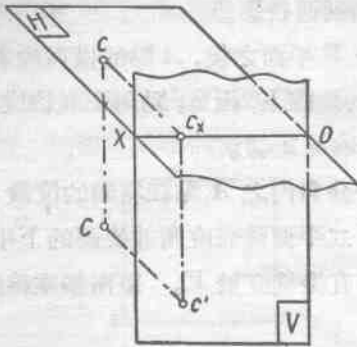


圖 2.9

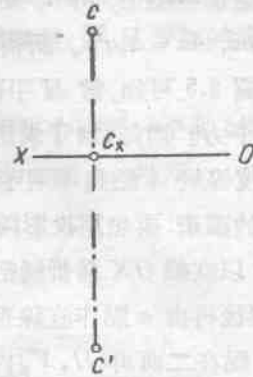


圖 2.10

第四種情形：點 $D(d, d')$ 在第四分角內(圖 2.11)。在投影圖(圖 2.12)上, D 點的两个投影 d, d' 都在 OX 軸的下方。

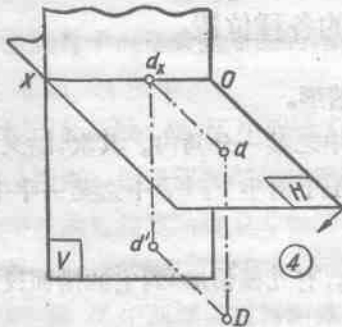


圖 2.11

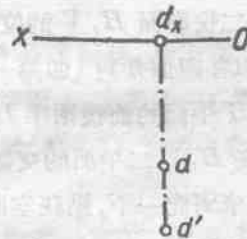


圖 2.12

現在我們把各個分角內的點的橫面投影與縱面投影綜合起來,畫在一個投影圖(圖 2.13)上,來比較一下它們對 OX 軸的位置。在這裏,我們可以看到:奇數分角(即第一、三分角)內的點 A, C 的两个投影是分居在 OX 軸的上下兩側;而偶數分角(即第二、四分角)內的點 B, D 的两个投影是同居在 OX 軸的一側。

奇數分角內的點,又可以根據它的兩個投影的位置,很容易地得到區別。這就是說:第一分角內的點 A 的縱面投影 a' 是在 OX 軸的上方,橫面投影 a 是在 OX 軸的下方;與此相反,第三分角內的點 C 的縱面投影 c' 是在 OX 軸的下方,橫面投影 c 是在 OX 軸的上方。

偶數分角內的點,同樣也可以得到區別。這就是說:第

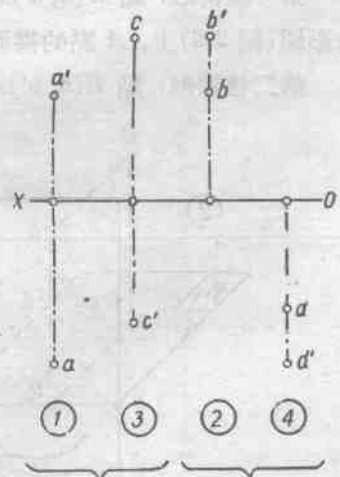


圖 2.13

二分角內的點 B 的兩個投影都是在 OX 軸的上方; 第四分角內的點 D 的兩個投影都是在 OX 軸的下方。

以下我們還要研究: 點在 V 平面的上下兩半及 H 平面的前後兩半時, 它的投影對 OX 軸處於什麼位置。這時, 我們就要想起: 在 V 平面上的點與 V 平面的距離就等於零, 在 H 平面上的點與 H 平面的距離也等於零。但是一個點與一個投影面的距離, 在投影圖上就反映為該點在另一投影面上的投影與 OX 軸的距離。因此, 這種點的兩個投影之中, 必有一個是在 OX 軸上。

第五種情形: 點 $E(e, e')$ 在 H 平面的前半部上(圖 2.14, 2.15)。 E 點與 H 平面的距離等於零。而在投影圖上, 點與 H 平面的距離就是它的縱面投影與 OX 軸的距離。因此, E 點的縱面投影 e' 是在 OX 軸上; 橫面投影 e 與 E 點本身相重合, 而位於 OX 軸的下方, 它與 OX 軸的距離就是 E 點與 V 平面的距離。

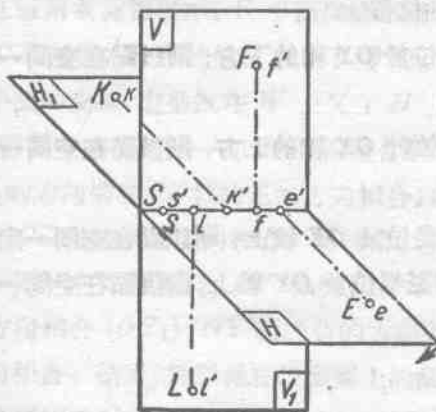


圖 2.14

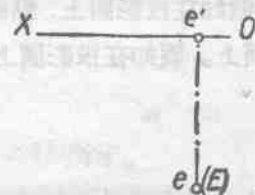


圖 2.15

第六種情形: 點 $F(f, f')$ 在 V 平面的上半部上(圖 2.14, 2.16)。 F 點的縱面投影 f' 與 F 點本身相重合, 而在投影圖上是位於 OX 軸的上方; 它與 OX 軸的距離就等於 F 點與 H 平面的距離。 F 點的橫面投影 f 是在 OX 軸上。

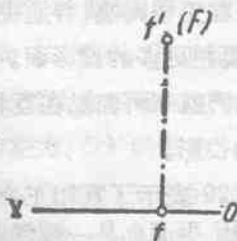


圖 2.16

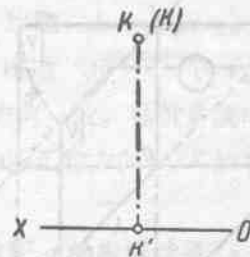


圖 2.17

第七種情形: 點 $K(k, k')$ 在 H 平面的後半部(H')上(圖 2.14, 2.17)。在投影圖上, K 點的橫面投影 k 與 K 點本身相重合, 而位於 OX 軸的上方; 縱面投影 k' 是在 OX 軸上。

第八種情形: 點 $L(l, l')$ 在 V 平面的下半部(V')上(圖 2.14, 2.18)。在投影圖上, L

點的縱面投影 l' 與 L 點本身相重合,而位於 OX 軸的下方;橫面投影 l 是在 OX 軸上。

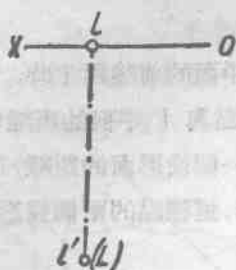


圖 2.18

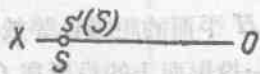


圖 2.19

第九種情形: 點 $S(s, s')$ 在 OX 軸上(圖 2.14, 2.19)。在投影圖上, S 點的兩個投影 s, s' 都與 S 點本身相重合。

綜合以上各種情形,我們就可以根據如下的規律,由點的兩個投影在投影圖上對 OX 軸之位置來決定該點在空間對 H, V 二投影面的位置。

(1) 假如在投影圖上,點的橫面投影是位於 OX 軸的下方,則該點在空間一定是位於縱面的前方;反之則位於縱面的後方。

(2) 假如在投影圖上,點的縱面投影是位於 OX 軸的上方,則該點在空間一定是位於橫面的上方;反之則位於橫面的下方。

(3) 假如在投影圖上,點的某一個投影是位於 OX 軸上,則該點在空間一定是位於某一個投影面上。假如在投影圖上,點的兩個投影都位於 OX 軸上,則該點在空間一定也是在 OX 軸上。

§ 2.3 點在三投影面體系中的各種位置

象限: 我們已經知道,點在互相垂直之二投影面上的正投影,可以完全決定該點在空間

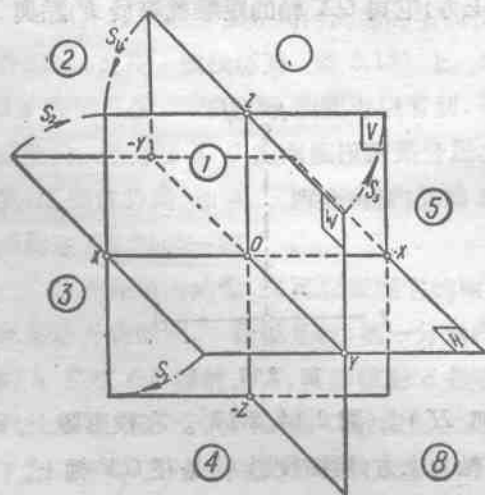


圖 2.20

的位置。但如果被投影的物體形狀很複雜時,為了表示得更清楚起見,常常需要更多的投影面。實際上在工程圖裏,普通是用三個投影面;有時還要用更多的投影面。

現在我們就來研究點在互相正交之三投影面上的投影。

於圖 2.20 表示了互相正交的三個投影面 H, V, W 。 W 平面也是一個鉛直的平面,叫做側面;點在側面上的投影叫做側面投影。因為 W 平面同時垂直於二投影面 V, H , 所以它一定也垂直於 V, H 的交線 OX 。

同樣地, H 平面也一定垂直於 W, V 的交