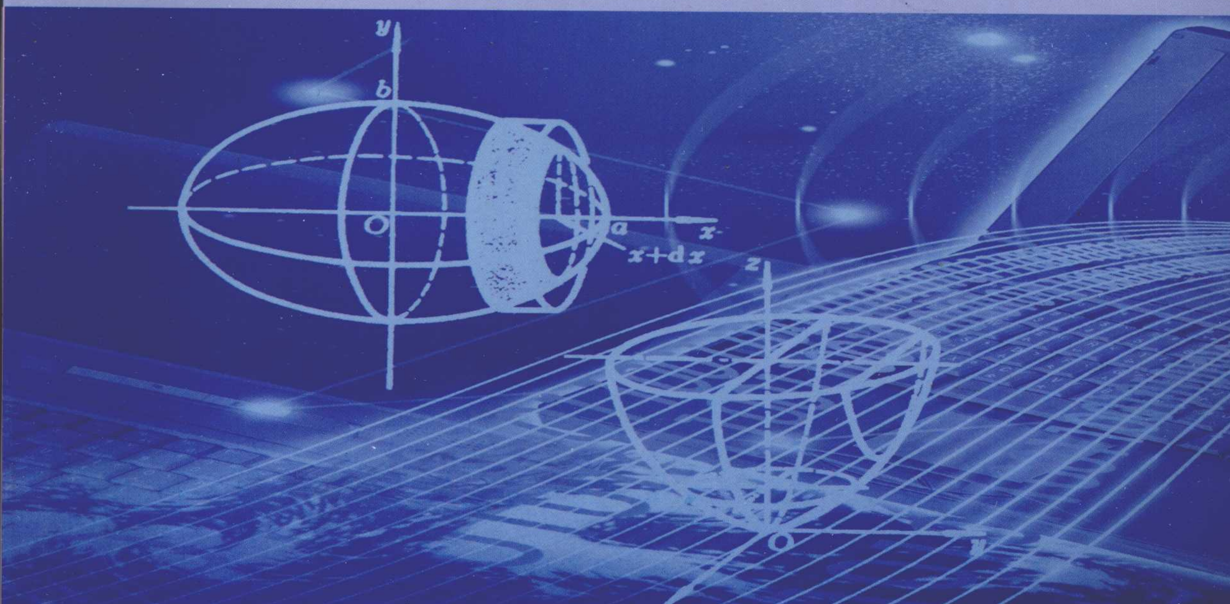
高等学校经济管理学科教材

高等数学

王远清　主编



华中师范大学出版社

高等学校经济管理学科教材

高 等 数 学

主　编：王远清
副主编：伍艳春　林　亮
编　者：（以姓氏笔画为序）
云逢明　邓光明　刘筱萍
杨秀前　莫莉萍

华中师范大学出版社

内容提要

本书是按照教育部对高等学校经济学、管理学学科门类本科高等数学课程的基本要求，并结合编者多年的教学实践编写而成. 全书共分9章，内容包括：函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微积分、无穷级数、微分方程与差分方程简介. 各章节都配有较多不同类型的例题和习题以及总习题，书末附有习题参考答案，常用的基本数学公式和希腊字母以及积分表；每章都有内容小结，这些都是为了帮助读者能很好地掌握知识.

本书内容、概念引入自然，理论条理清晰，由浅入深，解答详细，通俗易懂，便于自学. 本书除可作经济管理学科本科教材使用外，也可供文理科各类专业人员参考使用.

新出图证(鄂)字10号

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/王远清 主编. —武汉：华中师范大学出版社，2009.8

ISBN 978-7-5622-4033-4

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 王…　Ⅲ. 高等数学—高等学校—教材　Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 133663 号

高等数学

主　　编：王远清©

责任编辑：杨发明　**责任校对**：刘　峥　**封面设计**：罗明波

编 辑 室：第二编辑室　**电　　话**：027－67867362

出版发行：华中师范大学出版社　**社　　址**：湖北省武汉市珞喻路152号

电　　话：027－67863040(发行部)　027－67861321(邮购)

传　　真：027－67863291

网　　址：http://www.ccnupress.com　**电子信箱**：hscbs@public.wh.hb.cn

印　　刷：武汉理工大印刷厂　**督　　印**：章光琼

字　　数：460千字

开　　本：787mm×960mm　1/16　**印　　张**：23

版　　次：2009年8月第1版　**印　　次**：2009年8月第1次印刷

印　　数：1—3100　**定　　价**：35.00元

欢迎上网查询、购书

前　言

本书是按照教育部对高等学校经济管理类本科高等数学课程的基本要求，并结合编者多年的教学实践和经验总结编写而成.

当今社会，数学已经渗透到了各个学科领域，科学的发展，高科技的竞争更是离不开数学，高等数学是高等学校各有关学科专业最重要的基础课程之一. 适应现代高等教育的发展，提高高等数学教育质量是我们编写本书的宗旨.

在本书的编写过程中，我们认真分析研究了当代大学生的认知特点，站在学生能够很好地理解和掌握的角度叙述高等数学各部分的内容，力求概念引入自然，理论条理清晰，解答详细，通俗易懂，对较抽象的内容尽量用具体的例子和图形进行引导或用直观性语言加以描述，做到由浅入深，循序渐进，减少初学者的困难，便于自学.

本书注重帮助读者掌握基本知识，提高分析和解决问题的能力，培养创新能力，例如一题多解，启发设问等，这些在选择和解答例题以及配备习题等方面都有体现. 书的每章后面都有内容小结，书末附有习题参考答案，常用的基本数学公式和希腊字母以及积分表，这些都是为了方便读者查阅，帮助读者很好地学习掌握本书的知识.

根据有关教学文件，文科生和专科生使用本书时，对有星号的部分可以删减，对各章综合性较强的例题和习题也可以不作要求.

本书由林亮编写第一章，邓光明编写第二章，刘筱萍编写第三章，云逢明编写第四章，王远清编写第五、第六章及附录，杨秀前编写第七章，伍艳春编写第八章，莫莉萍编写第九章．全书由王远清统稿、定稿．

在本书的编写过程中，得到了桂林理工大学理学院领导、老师的大力支持和帮助；在统稿修改过程中，伍艳春、林亮、莫莉萍提出了一些很好的建议，并做了很多修改、校对方面的工作；特别是得到了吴群英博士（教授）的关心和指导，并仔细审阅了全部书稿；本书还受到桂林理工大学博文管理学院项目资助，在此，向他们表示由衷的感谢！

由于编者水平有限，本书难免有不足之处，敬请批评指正．

编　者

2009 年 7 月

目　　录

第1章　函　　数

初等数学研究的主要对象是常量及其运算,而高等数学研究的主要对象是变量之间的依赖关系. 函数正是这种依赖关系的体现. 函数是高等数学中最重要的基本概念之一. 本章在复习中学阶段有关函数内容的基础上,进一步研究函数的性质以及初等函数的结构.

§1.1　集合与区间

1.1.1　集合

把具有某种特定性质的事物组成的全体称为**集合**(简称**集**). 组成这个集合的事物称为该集合的**元素**. 集合常用大写字母 $A,B,C\cdots$ 等来表示,元素用小写字母 $a,b,c\cdots$ 等来表示. 如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于 A,记作 $a\in A$,如果 a 不是集合 A 的元素,就说 a 不属于 A,记作 $a\notin A$.

有时我们把由所研究的全部对象组成的集合称为**全集**,记作 I.

不含任何元素的集合称为**空集**,记作 $\varnothing$.

由数组成的集合称为**数集**. 常用的数集有自然数集,记作 $\mathbf{N}$;整数集,记作 $\mathbf{Z}$;有理数集,记作 $\mathbf{Q}$;实数集,记作 $\mathbf{R}$.

集合的表示方法有**列举法**和**描述法**. 列举法是把集合的全部元素列举出来用花括号括起来. 例如,由 a,b,c,d 四个元素组成的集合可表示为

$$A=\{a,b,c,d\}.$$

描述法是把集合的元素具有的特性描述出来,并用花括号括起来. 例如,由全体偶数组成的集合可表示为

$$A=\{x\mid x=2n,n\in\mathbf{N}\}.$$

又如,由方程 $x^2-1=0$ 的根组成的集合可表示为

$$A=\{x\mid x^2-1=0\}.$$

如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素,则称 A 是 B 的**子集**,或称 A **包含于** B,或称 B **包含** A,记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

如果 A 与 B 互为子集,即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称 A 与 B **相等**,记作 $A=B$.

1.1.2　集合的运算

定义 1.1.1　设 A 和 B 是两个集合,由 A 和 B 的所有元素组成的集合称为 A

与 B 的**并集**,记为 $A\cup B$,即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

定义 1.1.2 设 A 和 B 是两个集合,由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**交集**,记为 $A\cap B$,即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

定义 1.1.3 设 A 和 B 是两个集合,由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**差集**,记为 $A\backslash B$,即

$$A\backslash B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}.$$

全集 I 与集合 A 的差集称为 A 的**余集**或**补集**,记作 A^C,即

$$A^C=I\backslash A.$$

例 1 设 $A=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 2\}$,$B=\{x\mid >0\}$,则有

$A\cup B=\{x\mid x\geqslant -1\}$,$A\cap B=\{x\mid 0<x\leqslant 2\}$,$A\backslash B=\{x\mid -1<x\leqslant 0\}$.

设 A,B,C 为任意三个集合,则集合的并、交、余运算满足如下运算律:

交换律 $A\cup B=B\cup A$,$A\cap B=B\cap A$;

结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

分配律 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

对偶律 $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$,$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

1.1.3 区间和邻域

定义 1.1.4 设 a,b 为两个实数,且 $a<b$,满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数的集合称为**开区间**,记作 (a,b),即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}.$$

类似地可定义

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

为**闭区间**,

$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$$

及

$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$$

为**半开区间**.

以上三类区间都是**有限区间**,a 是它们的**左端点**,b 是它们的**右端点**,$b-a$ 称为**区间的长**. 此外,还有**无限区间**. 引进记号 $+\infty$(读作正无穷大)及 $-\infty$(读作负无穷大),则可类似地定义几类无限区间:

$$(a,+\infty)=\{x\mid a<x\},\ [a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x\},$$
$$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\},(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\},$$
$$(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}=\mathbf{R}.$$

有限区间可以用数轴上的线段表示，无限区间可以用数轴上的射线表示，如图1-1所示.

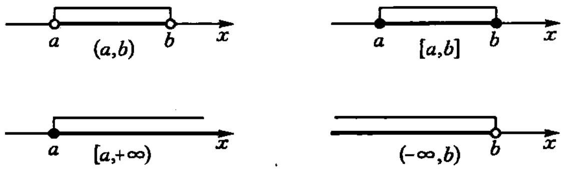


图 1-1

定义 1.1.5 设$\delta>0$，则称开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$为点x_0的**δ邻域**，记作$U(x_0,\delta)$，即

$$U(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0+\delta)=\{x\mid |x-x_0|<\delta\}.$$

x_0称为**邻域的中心**，δ称为**邻域的半径**，如图1-2所示.

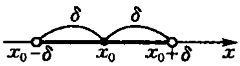


图 1-2

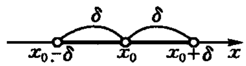


图 1-3

如果把邻域的中心去掉，所得区间称为点x_0的**去心δ邻域**，记作$\mathring{U}(x_0,\delta)$，即

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\},$$

如图1-3所示.

习题 1.1

1. 设$A=\{x\mid 3<x<6\}$，$B=\{x\mid x>4\}$. 求：(1) $A\cup B$；(2) $A\cap B$；(3) $A\backslash B$.
2. 设$I=\{1,2,3,4,5,6,7\}$，$A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,4,6\}$. 求：(1) A^C；(2) B^C；(3) $A^C\cup B^C$；(4) $A^C\cap B^C$.
3. 用区间表示下列集合：
   (1)$\{x\mid |x-1|<2\}$；(2)$\{x\mid |x-1|>2\}$；(3)$\{x\mid 1<|x-2|<3\}$.
4. 写出2的δ邻域和去心邻域.

§1.2 函数及性质

1.2.1 变量与函数的概念

在生产生活和科学研究中，常常会有在所考虑的某一过程中保持大小不变的量，这样的量称为**常量**. 如圆周率、人在某个年龄段的身高、某个时期银行的利率等都是常量. 在所考虑的某一过程中处于变动状态的量称为**变量**. 如在自由落体运动过程中，速度是变量；在市场经济中，商品的价格受市场规律的作用经常变动，

所以价格是变量,等等.

函数是满足一定条件的量与量之间的关系. 下面用集合的语言给出函数的定义.

定义 1.2.1 设 D 是一个非空的实数集,如果有一个对应规则 f,使得对于每一个 $x\in D$,都有唯一的一个实数 y 与之对应,则称这个对应规则 f 为定义在 D 上的一个**函数**,或称变量 y 是变量 x 的函数,记作

$$y=f(x).$$

其中 x 称为**自变量**,y 称为**因变量**(**或函数**),D 称为函数的**定义域**. 当自变量 x 取遍定义域 D 中的值时,相应的函数 y 取值的集合

$$Z=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的**值域**.

关于函数的定义作以下说明:

(1) 记号 $y=f(x)$ 中,f 代表对应规则,是函数;$f(x)$ 代表对应于 x 的函数值,两者是有区别的,而习惯上把函数 f 与函数值 $y=f(x)$ 不加区别,都称为函数. 用得多的是称 $y=f(x)$ 为函数,例如习惯上称函数 $y=\sin x$,而很少说函数 sin.

(2) 定义中起决定作用的是函数的定义域和对应规则,它们是函数的两要素. 对于两个函数,只要它们的定义域与对应规则相同,它们就是相同的函数,例如 $y=2x^2+5$ 与 $s=2t^2+5$ 是相同的函数,$y=\sin^2x+\cos^2x$ 与 $y=1$ 是相同的函数;但是 $y=x+1$ 与 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 是不同的函数,因为它们的定义域不同.

(3) 我们所定义的函数是单值函数,即对于定义域内的每一个 $x\in D$,只有唯一的 $y\in Z$ 与之对应,但是往往也会有在某种对应规则下,自变量 x 的一个取值,因变量 y 不只有唯一的一个值 y 与它对应,例如,x 与 y 的对应法则是 x 与 y 满足圆的方程 $x^2+y^2=4$,当 $x=1$ 时,$y=\pm\sqrt{3}$,根据函数定义,这个对应规则就不符合函数的定义,为了叙述方便,称这种对应规则为**多值函数**. 我们所研究的函数都是单值函数. 因此,遇到多值函数时我们就把它分成几个单值函数来处理,例如 $x^2+y^2=4$,就把它分成 $y=\sqrt{4-x^2}$ 与 $y=-\sqrt{4-x^2}$ 这样两个函数来处理,它们的图形分别表示上半圆和下半圆,$y=\sqrt{4-x^2}$ 与 $y=-\sqrt{4-x^2}$ 称为多值函数 $x^2+y^2=4$ 的两个**单值分支**.

函数的表示法通常有公式法、图形法和表格法三种.

用一个式子表示自变量与因变量之间的关系的方法,称为**公式法**,如 $y=x^2+2x-3$,$y=\sqrt{4-x^2}$,等等.

用图形表示自变量与因变量之间的关系的方法,称为**图形法**. 作函数的图形,实际就是用图形法表示函数. 有的函数很难用式子表示,如某地区一天的气温

C 是时间 t 的函数 $C=g(t)$，这个函数很难用一个式子表示，但是，可以用平面上的一条曲线来表示一天每一时刻 t 的气温 C，如图 1-4 所示.

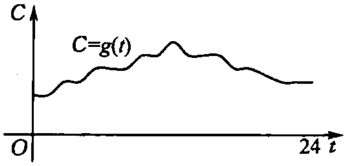


图 1-4

表格法就是把自变量与因变量的一些对应值用表格列出. 如某商场 10 天内奶制品销售额(百元)如下表所示：

时间 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
销售额 Q	52	80	120	100	98	55	85	186	66	99

这个表格表示了该商场奶制品销售额 Q 与时间 t(天)的函数关系. 又如大家熟悉的三角函数表，对数表等数学用表都是用表格表示函数的实例.

1.2.2　函数的几种特性

1. 有界性

定义 1.2.2　设 I 为某个区间，$f(x)$ 是定义在区间 I 上的函数. 若存在正数 M，使得任意的 $x\in I$ 都有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称 $y=f(x)$ 在 I 上是**有界函数**(简称**有界**). 如果这样的正数 M 不存在，则称 $y=f(x)$ 在 I 上是**无界函数**(简称**无界**).

例 1　$y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，因为 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，有 $|\sin x|\leqslant 1$；$y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0.001,1)$ 内是有界的，因为 $x\in(0.001,1)$ 时，有 $1<\dfrac{1}{x}<1000$.

但 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内是无界的，因为当 x 接近于 0 时，$\dfrac{1}{x}$ 的值可以任意地大，如图 1-5 所示.

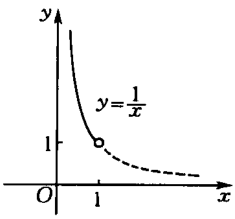


图 1-5

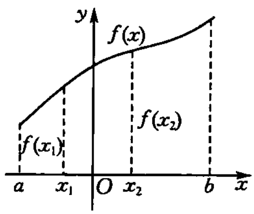


图 1-6

2. 单调性

定义 1.2.3　设 I 为某个区间，$f(x)$ 是定义在区间 I 上的函数. 对于任意的 $x_1,x_2\in I$，若 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在 I 上是**单调增函数**(或**单调增加的**)；若 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在 I 上是**单调减函数**(或**单调减少的**).

单调增函数的图形是沿 x 轴的正方向上升的，如图 1-6 所示.

单调减函数的图形是沿 x 轴的正方向下降的，如图 1-7 所示.

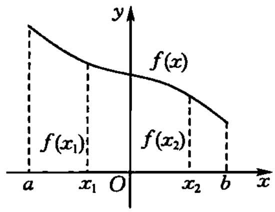


图 1-7

单调增函数和单调减函数统称为**单调函数**. 若 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在 I 上是**单调不减的**；若 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在 I 上是**单调不增的**.

3. 奇偶性

定义 1.2.4 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，对于任意的 $x\in D$，若总有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是**偶函数**；若总有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 是**奇函数**.

例 2 $f(x)=x^3$，$f(x)=\sin x$ 都是奇函数.

因 $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$，$f(-x)=\sin(-x)=-\sin(x)=-f(x)$.

$y=x^2$，$y=\cos x$，都是偶函数.

因 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$，$f(-x)=\cos(-x)=\cos x=f(x)$.

$y=2x-3$ 是非奇非偶函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称，如图 1-8 所示. 奇函数的图形关于原点对称，如图 1-9 所示.

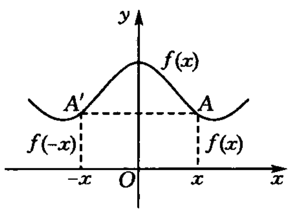


图 1-8

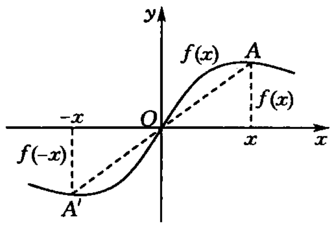


图 1-9

关于函数的奇偶性有下列结论：两个偶函数的积、和仍为偶函数；两个奇函数的积为偶函数，两个奇函数的和为奇函数.

4. 周期性

定义 1.2.5 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，对于任意的 $x\in D$，若存在正常数 T，$x+T\in D$，使得

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**，T 称为 $f(x)$ 的**周期**. 如果一个函数存在最小正周期的话，那么这个函数的周期是指**最小正周期**.

例 3 函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是周期为 2π 的周期函数，$y=\tan x$，$y=|\sin x|$ 都是周期为 π 的周期函数.

1.2.3　反函数、复合函数

先看一个例子：设函数 $y=2x-4$，其中 x 是自变量，y 是函数，由这个函数的表达式可得 $x=\frac{1}{2}y+2$，这里 x 是 y 的函数，y 是自变量，此时我们说 $x=\frac{1}{2}y+2$ 是 $y=2x-4$ 的反函数，也称它们互为反函数.

一般地有下面的定义.

定义 1.2.6　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 Z. 如果对每一个 $y\in Z$，都有一个确定的且满足关系 $y=f(x)$ 的 $x\in D$ 与之对应，其对应关系记作 f^{-1}，则这个以 y 为自变量，Z 为定义域的新函数

$$x=f^{-1}(y)$$

称为 $y=f(x)$ 的**反函数**.

相对而言，函数 $y=f(x)$ 称为**直接函数**. 也称 $x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f(x)$ **互为反函数**.

对函数 $y=f(x)$，x 是自变量，y 是因变量(函数)，定义域为 D，值域为 Z.

对函数 $x=f^{-1}(y)$，y 是自变量，x 是因变量(函数)，定义域为 Z，值域为 D.

习惯上把 $x=f^{-1}(y)$ 写成 $y=f^{-1}(x)$，并称为 $y=f(x)$ 的反函数，如上例中 $y=\frac{1}{2}x+2$ 是 $y=2x-4$ 的反函数.

函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形在同一坐标平面上是关于直线 $y=x$ 对称的，如图 1-10 所示.

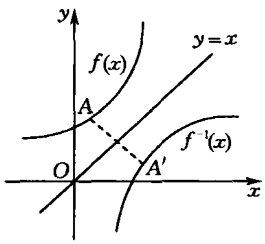


图 1-10

所谓复合函数，简单地说就是函数中包含函数.

现定义如下：

定义 1.2.7　设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D，且 $u=\varphi(x)$ 的值域包含于 D_1，即 $\varphi(x)\in D_1$，通过 $u=\varphi(x)$ 使得

$$y=f[\varphi(x)],x\in D$$

成为 x 的函数，则称这个函数为 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**. 其中变量 u 称为**中间变量**，x 为自变量，$y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 称为**简单函数**.

例 4　由 $y=\sqrt{u}$，$u=(x-1)(3-x)$ 复合而成的复合函数为

$$y=\sqrt{(x-1)(3-x)},1\leqslant x\leqslant 3.$$

复合函数的定义域是使整个函数有意义的自变量的取值范围，任何两个函数要想构成复合函数必须满足复合函数的定义要求.

例 5　$y=\arcsin u$，$u=x^2+2$ 不能构成复合函数. 因为 $u=x^2+2\geqslant 2$，所以 u 的值不能满足 $y=\arcsin u$ 中 $|u|\leqslant 1$ 的要求.

复合函数可以是两个以上的函数复合而成的，即中间变量可以不止一个. 例如 $y=\sin u, u=\ln v, v=x+1$ 可以构成复合函数 $y=\sin\ln(x+1)$，定义域为 $(-1,+\infty)$.

对于复合函数，要分清它是由哪些简单函数复合而成的. 方法是由外层向内层逐层观察，一层一个简单函数，直到最内层为止. 构成复合函数的过程称为**复合过程**.

例 6 函数 $y=2^{\sin^2(x-1)}$ 是由 $y=2^u, u=v^2, v=\sin w, w=x-1$ 复合而成的.

1.2.4 分段函数、取整函数、隐函数

对于函数 $f(x)$，若在定义域的不同范围有不同的表达式，则称这样的函数为**分段函数**.

例 7 函数 $y=|x|=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$ 和 $y=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x-1, & x>0\end{cases}$ 都是定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 的分段函数，其图形如图 1-11 和图 1-12 所示.

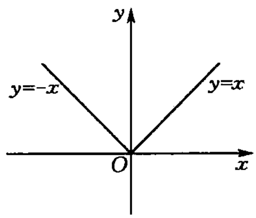


图 1-11

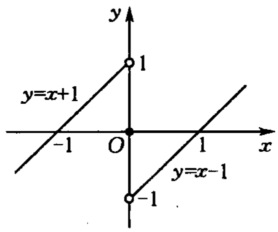


图 1-12

分段函数在不同的分段区间上的图形不同.

若函数的对应关系是因变量 y 为不大于自变量 x 的最大整数，则称该函数为**取整函数**，记作 $y=[x]$. 依定义知，当把 x 看成是一个整数 N 和一个非负小数 $\delta\geqslant 0$ 之和(即 $x=N+\delta$)时，其函数的值就等于 x 的整数部分(即 $y=[x]=N$).

例 8 (1) 若 $x=1.6$，则 $y=[x]=1$；

(2) 若 $x=3$，则 $y=[x]=3$；

(3) 若 $x=-1.3$，则 $y=[x]=-2$.

在函数中，若因变量是用自变量的表达式呈现出来的，则称这样的函数为**显函数**，如 $y=x^2+1, y=\sin x, y=2^x, y=f(x)$ 等，都是显函数.

在函数中，若它的因变量和自变量之间的对应规则是由方程 $F(x,y)=0$ 形式表达的，则称这样的函数为**隐函数**，如 $x-2y+1=0, x^2+y^2=4, \sin(x+y)=xy$ 等，都是隐函数. 隐函数中两个变量中哪个是自变量哪个是函数不明显，若说函数 $y=f(x)$ 是由 $F(x,y)=0$ 确定的，就是指隐函数中把 x 当作自变量，y 当作函数.