能源战略与管理丛书

Operations Research

电力MBA指定教材

运筹学及其应用

邱启荣　吕　蓬　编著

中国电力出版社
www.cepp.com.cn

能源战略与管理丛书

运筹学及其应用

邱启荣 吕 蓬 编著

中国电力出版社
www.cepp.com.cn

内 容 提 要

运筹学（Operation Research），又称管理科学（Management Science），是运用科学的方法研究和管理工程中各种决策问题，为决策者提供科学决策依据的学科，其核心方法是首先建立反映实际问题的模型，然后用数学或其他科学的方法给出模型的求解算法，再用计算机实现算法求解过程。

全书共分八章，分别是线性规划、整数规划、非线性规划、动态规划、目标规划、图与网络分析、网络计划技术、网络计划的编制、决策分析，分别就运筹学中讨论的主要问题的模型建立、求解方法及计算机求解进行了介绍。在计算机求解方面，主要介绍大家常用的 Excel 软件。在大部分章节中，给出了实际案例，其中有一些具有电力行业特色。

本书可供工程技术、管理人员参考，也可作为 MBA、本科高年级学生的教材。

图书在版编目（CIP）数据

运筹学及其应用/邱启荣，吕蓬编著．—北京：中国电力出版社，2009

（能源战略与管理丛书）

ISBN 978－7－5083－8463－4

Ⅰ．运… Ⅱ．①邱…②吕… Ⅲ．运筹学－教材 Ⅳ．022

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 012837 号

中国电力出版社出版、发行

（北京三里河路 6 号 100044 http：//www.cepp.com.cn）

北京丰源印刷厂印刷

各地新华书店经售

*

2009 年 6 月第一版 2009 年 6 月北京第一次印刷

787 毫米×1092 毫米 16 开本 18.75 印张 404 千字

印数 0001—3000 册 定价 **39.00** 元

前　言

运筹学是20世纪40年代开始形成的一门应用性学科。它主要应用定量分析的方法，研究现实系统的运行规律，从而提出具有共性、典型意义的优化模型，寻求解决模型的方法，最终形成决策方案。其目的是提高科技人员与管理者统筹规划、纵览全局的能力，帮助工程技术人员、管理者科学地确定行动方向和行动方案，使之既合乎客观规律，又能获得尽可能好的结果。随着科学技术尤其是计算技术的不断发展，运筹学的理论和方法在数据处理、工程技术和经济分析、管理决策等多方面起着越来越大的作用。

现有的运筹学方面的教材有两类，一类是由国内专家学者编写的，这类教材数学公式多，理论性强，应用案例少，或者是些简单案例，不利于广大读者学习，也不利于读者应用运筹学的理论方法提高分析、解决实际问题的能力；另一类是由国外专家学者编写的，这类教材理论性较弱，应用案例较多，不利于大家进一步提高，而且中国的经济毕竟是处于转型时期，中国企业在许多方面又不同于外国的企业，尤其是中国企业所处的文化背景与国外相比有很大的差异，使用国外的教材，案例全部是ABC公司和XYZ产品的情况，这难免会使学生产生距离感和陌生感。在这些教材中，具有电力行业特色的应用案例就很少。在计算机的使用上，一般都是采用如Lindo、Lingo等专业软件，读者在学习时，还需要学习这些专业软件的使用方法，不利于大家的使用。

本教材的特色：

（1）在内容上，将重点介绍运筹学模型的对象、思想方法和主要应用范围；建立模型所需的假设条件；模型的结构和求解方法；运筹学模型的应用实例力求深入浅出，便于大家学习和理解。

（2）为适应MBA教学和大学教育大众化的需要，对运筹学的理论和方法只作一般的介绍而不进行严格的逻辑证明，重点介绍如何应用这些定理来分析解决问题，在不失科学性和理论性的同时，突出理论联系实际。

（3）选用了大量来自电力行业生产技术、企业管理和生活中的实际案例，如在输电规划、火电系统有功负荷的经济调度等，对问题中的关系进行量化，建立数学模型，并应用计算机求解，可提高读者对实际问题进行分析、处理的能力。

（4）将部分MBA教材中的成功案例吸收到本书，有利于读者开阔视野。

（5）中国企业所处的文化背景与国外相比有很大的差异，本教材中选用了一些近些年数学建模竞赛中出现的有关运筹学方面的具有中国特色和时代特色的案例，避免使读者产生距离感和陌生感。

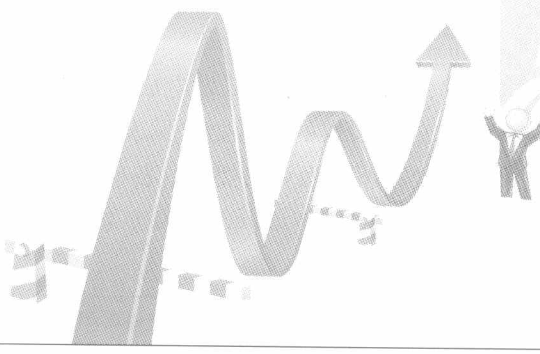
（6）将常用的 Excel 软件的规划求解插件的使用引入到本书中，对规模较小的问题，大家可以方便地求解；同时将工程技术中常用的 Matlab 软件的优化功能的使用引入到书中，对规模较大的问题，可自编简单的程序，利用软件中现有的内部函数，可方便地求解。一方面可加深对理论与方法的理解和掌握，另一方面也避免大量琐碎的计算，提高解决工程技术和管理科学中问的能力。

本书第一～四章由邱启荣编写，第五～八章由吕蓬编写。工商管理学院的阎庆友教授详细审阅了全书，并提出了宝贵的意见，在此编者对他表示衷心的感谢。在本书中，我们参考、引用了同行的工作，王鹏、张永芳、常鹏参加了本书的校对工作，在此编者也对他们表示衷心的感谢。

编　者

2008 年 12 月

目 录



第一章
线 性 规 划

线性规划是运筹学中研究较早，发展较快，应用较广且比较成熟的一个重要分支。早在20世纪30年代末，苏联数学家康托洛维奇（Конторвич）首先提出了线性规划的模型，随着军事、经济、生产、技术等各方面的问题陆续提出，人们对线性规划问题求解与应用展开了系统的研究。1947年美国人但泽（G. B. Danlzig）提出了求解一般线性规划问题的单纯形法，较好地解决了线性规划的求解问题。最近50多年来，线性规划无论在深度还是在广度方面都取得了重大进展，例如，椭球方法、Karmarkar方法、内点法和优面算法等。线性规划在理论上趋向成熟，在实际中的应用日益广泛与深入。特别是能用电子计算机来处理有成千上万个约束条件和变量的大规模线性规划问题之后，适用领域更广泛；从解决技术中最优化，到工业、农业、商业、交通运输业，军事的计划和管理及决策到整个国民经济计划的最优方案的提出，它都有用武之地。它具有适应性强，应用面广，计算技术比较简便的特点，是现代管理科学的重要基础和手段之一。可以说，现在线性规划已不仅仅是一种数学理论和方法，而且成了现代化管理的重要手段，是帮助管理者作决策的一个有效的方法。

线性规划中研究的问题要求目标与约束条件函数均是线性的，而目标函数只能是一个。在经济管理与工程技术的问题中，大量的问题是线性的，有的可以转化为线性的，从而使线性规划有着极大的应用价值。线性规划已经成为现代化管理的一种重要手段。

第一节　线性规划问题的模型与基本理论

一、线性规划问题的模型

案例1-1　火电厂动力配煤问题

大型火力发电厂大部分使用煤粉锅炉，而锅炉技术特性是根据给定燃煤质量设计的，只有在燃煤质量符合锅炉设计要求时，锅炉才能保持最佳运行状态。

动力配煤是根据工业锅炉对煤质的特定要求，由几种不同性质，不同种类的煤按一定比例掺配加工而成的燃料。通过配煤使燃料的主要技术指标适应炉型要求，保证工业锅炉出力稳定，热效率高。对火力发电厂而言，发电煤耗是最主要的成本指标，所以合

理的配煤方案不仅能提高发电厂的生产能力和发电效率，而且还能够降低发电成本。

某火力发电厂，日用燃煤量为 1 万 t，该厂煤粉锅炉的燃料煤的质量要求见表 1－1。该厂可选 1、2、3、4 号矿井的煤炭产品进行动力配煤作为煤粉锅炉的燃料，各矿煤炭产品的产量、煤质及购价（包括运费）见表 1－2。求发电用煤成本最低的配煤方案。

表 1－1　某火电厂用煤质量要求

粒度（mm）	灰分 Ad（%）	硫分 St（%）	挥发分 Vdaf（%）	发热量 Qnet（$kJ\cdot kg^{-1}$）	水分 Mt（%）	灰熔点 ST（℃）
小于	小于	小于	大于	大于	小于	大于
13	24	1	27	17 325.4	6	1350

表 1－2　某火电厂可选购煤炭产品的质量指标和购价表

指　　标	单位	1 号矿井	2 号矿井	3 号矿井	4 号矿井
粒度	mm	13	13	13	13
灰分 Ad	%	23	22	25	23
硫分 St	%	0.7	0.9	1	1.4
水分 Mt	%	5	7	5	7
挥发分 Vdaf	%	26.04	30.2	25	35
发热量 Qnet	kJ/kg	16 730	18 815	16 625	17 022
灰熔点 ST	℃	1360	1400	1355	1390
产量	t/d	9000	7000	4000	2000
购价	元/t	75.5	80	65	71

解： 对于该火力发电厂的配煤问题，设 $x_i(i=1,2,3,4)$ 是使用 i 号矿井煤的使用比例，为满足燃料煤的质量要求，必须满足如下条件

灰度要求：$23x_1+22x_2+25x_3+23x_4\leqslant 24$

硫分要求：$0.7x_1+0.9x_2+x_3+1.4x_4\leqslant 1$

挥发分要求：$26.04x_1+30.2x_2+25x_3+35x_4\geqslant 27$

发热量要求：$16\,730x_1+18\,815x_2+16\,625x_3+17\,022x_4\geqslant 17\,325.4$

水分要求：$5x_1+7x_2+5x_3+7x_4\leqslant 6$

灰熔点要求：$1360x_1+1400x_2+1355x_3+1390x_4\geqslant 1350$

由于各号矿井的生产能力有一定限制，因此还必须满足

1 号矿井的生产能力限制：$1000x_1\leqslant 9000$

2 号矿井的生产能力限制：$1000x_2\leqslant 7000$

3 号矿井的生产能力限制：$1000x_3\leqslant 4000$

4 号矿井的生产能力限制：$1000x_4\leqslant 2000$

自然限制条件

$$x_1+x_2+x_3+x_4=1$$

$$x_i \geqslant 0,\ (i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

发电用煤的单位成本为

$$z=75.5x_1+80x_2+65x_3+71x_4$$

综上分析，该火力发电厂的配煤问题的数学模型为

$$\min z=75.5x_1+80x_2+65x_3+71x_4$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}23x_1+22x_2+25x_3+23x_4 \leqslant 24\\ 0.7x_1+0.9x_2+x_3+1.4x_4 \leqslant 1\\ 26.04x_1+30.2x_2+25x_3+35x_4 \leqslant 27\\ 16\,730x_1+18\,815x_2+16\,625x_3+17\,022x_4 \geqslant 17\,325.4\\ 5x_1+7x_2+5x_3+7x_4 \leqslant 6\\ 1360x_1+1400x_2+1355x_3+1390x_4 \leqslant 1350\\ 1000x_1 \leqslant 9000\\ 1000x_2 \leqslant 7000\\ 1000x_3 \leqslant 4000\\ 1000x_4 \leqslant 2000\\ x_1+x_2+x_3+x_4=1\\ x_i \geqslant 0,\ (i=1,\ 2,\ 3,\ 4)\end{cases}$$

案例 1－2　投资计划问题

通达公司是某电力公司下属的三产公司。该公司在今后 3 年内有 4 种投资机会：第 1 种是 3 年内每年年初投资，年底可获利润 15%，并可将本金收回；第 2 种是在第一年的年初投资，第二年年底可获利润 40%，并将本金收回，考虑到可能存在的风险，该项投资不得超过 200 万元；第 3 种是在第二年的年初投资，第三年年底收回本金，并获利润 50%，考虑到可能存在的风险，该项投资不得超过 150 万元；第 4 种是在第三年的年初投资，于该年年底收回本金，且获利润 40%，考虑到可能存在的风险，该项投资不得超过 100 万元。现在该公司准备拿出 300 万元资金，问如何制定投资计划，使到第三年年末本利和最大。

解：设置变量见表 1－3。

表 1－3　各年各种投资机会的投资额变量设置

年序号	投资机会 1	投资机会 2	投资机会 3	投资机会 4
第一年	x_1	x_4		
第二年	x_2		x_5	
第三年	x_3			x_6

下面通过讨论逐年的资金使用情况来分析约束条件和目标函数：

第一年年初，可供使用资金为 300 万元，有两种投资机会，投资额分别是 x_1，x_4，因此

$$x_1 + x_4 \leqslant 300$$

另外，第 2 种投资不得超过 200 万元，故有 $x_4 \leqslant 200$。

第二年年初，可供使用资金为 $1.15x_1$ 万元，有两种投资机会，投资额分别是 x_2，x_5，因此

$$x_2 + x_5 \leqslant 1.15x_1$$

另外，第 3 种投资不得超过 150 万元，故有 $x_5 \leqslant 150$。

第三年年初，可供使用资金为 $1.15x_2 + 1.4x_4$ 万元，有两种投资机会，投资额分别是 x_3，x_6，因此

$$x_3 + x_6 \leqslant 1.15x_2 + 1.4x_4$$

另外，第 4 种投资不得超过 100 万元，故有 $x_6 \leqslant 100$。

第三年年末资金的本利和为 $1.15x_3 + 1.5x_5 + 1.4x_6$。

综合上述分析，将各条件中含变量的项移到方程左边，并注意到各项目的投资额不能是负数，可得投资计划问题的数学模型为

$$\max z = 1.15x_3 + 1.5x_5 + 1.4x_6$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_4 \leqslant 300 \\ 1.15x_1 - x_2 - x_5 \geqslant 0 \\ 1.15x_2 + 1.4x_4 - x_3 - x_6 \geqslant 0 \\ x_4 \leqslant 200 \\ x_5 \leqslant 150 \\ x_6 \leqslant 100 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geqslant 0 \end{cases}$$

从案例 1－1 和案例 1－2 建立数学模型的过程，可以得到一般线性规划问题的建模过程。

（1）理解要解决的问题，要搞清在什么条件下，要追求什么目标。

（2）定义决策变量，每一个问题都用一组决策变量 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 来表示某一方案；这组决策变量的值就代表一个具体方案，一般这些变量取值是非负的。

（3）用一组决策变量的线性等式或不等式来表示在解决问题过程中所必须遵循的约束条件。

（4）用决策变量的线性函数形式写出所要追求的目标，称为目标函数，按实际问题的不同，要求目标函数实现最大化或最小化。

从案例 1－1 和案例 1－2 建立的数学模型可知，线性规划研究的问题有如下特点：

（1）研究的问题都有一定的限制，这种限制条件我们可以用一组线性方程组或线性

不等式组来描述。

（2）限制条件所要达到的结果称为“目标”，第一类问题的目标是以最少资源完成给定任务。第二类问题的目标是利用有限资源完成最大任务。所要达到的目标可以用一个线性函数来描述，称这个线性函数为目标函数。

这问题可用数学语言描述如下

$$\min(\max) z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases}$$

为了便于讨论，规定线性规划问题的标准型为

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{1-1}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases} \tag{1-2}$$

它也可写成如下矩阵形式

$$\max z = Cx \tag{1-3}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} Ax = b \\ x \geqslant 0 \end{cases} \tag{1-4}$$

其中 $A \in R^{m\times n}$，$x \in R^n$，$b \in R^m$。

可以通过以下方法，把非标准型线性规划化为标准型。

（1）目标函数的标准化。如果线性规划问题是求目标函数的最小值，即 $\min s = Cx$，则由 $\min s = -\min(-s)$，令 $s = -z$，得：$\max z = -Cx$，这就同标准型的目标函数的形式一致了。但要注意，如果要求原问题的最小值，应取 s 最优值的相反数。

（2）约束条件的标准化。当约束条件为“≤”形式的不等式，可在不等式左边加上一个非负的新变量，也就是松弛变量，把不等号变为等号；当约束条件为“≥”形式的不等式，可在不等式左边减去一个非负的剩余变量（也可称松弛变量），把不等号变为等号。

（3）决策变量的标准化。如果某一变量 x_k 是一个符号不受限制的“自由变量”，可以引入两个非负的新变量 $x_k^{(1)}$ 和 $x_k^{(2)}$，并作变换 $x_k = x_k^{(1)} - x_k^{(2)}$，化为非负变量。

（4）约束常数的标准化。如果有某约束常数为负数，可在等式（或不等式）两边同时乘以 -1，把约束常数变为正数。

例 1－1 把下面线性规划模型化为标准型

$$\max z = 5x_1 + 10x_2$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leqslant 50 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 40 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 25 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \text{ 无约束} \end{cases}$$

解： 令 $x_2 = x_3 - x_4$，引入松弛变量 x_5，x_6，x_7，上述线性规划模型可化为如下标准型

$$\max z = 5x_1 + 10x_3 - 10x_4$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} x_1 + 3x_3 - 3x_4 + x_5 = 50 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 + x_6 = 40 \\ x_1 + 2x_3 - 2x_4 - x_7 = 25 \\ x_j \geqslant 0, j = 1,3,4,5,6,7 \end{cases}$$

例 1－2 把下面线性规划模型化为标准型

$$\min s = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \leqslant 40 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 \geqslant 30 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 50 \\ -10 \leqslant x_2 \leqslant 10 \\ x_1, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

解： 设 $x_2' = x_2 + 10$，$x_4 = x_4' - x_4''$，

$$\min s = 2x_1 - (x_2' - 10) + 3x_3 - 5(x_4' - x_4'')$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} x_1 - (x_2' - 10) + 2x_3 - 3(x_4' - x_4'') \leqslant 40 \\ 2x_1 + (x_2' - 10) + x_3 + 4(x_4' - x_4'') \geqslant 30 \\ 4x_1 + 3(x_2' - 10) + 2x_3 - 7(x_4' - x_4'') = 50 \\ -10 \leqslant (x_2' - 10) \leqslant 10 \\ x_1, x_3 \geqslant 0, x_4', x_4'' \geqslant 0 \end{cases}$$

等价的标准型为

$$\max z = -2x_1 + x_2' - 3x_3 + 5x_4' - 5x_4''$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} x_1 - x_2' + 2x_3 - 3x_4' + 3x_4'' + x_5 = 30 \\ 2x_1 + x_2' + x_3 + 4x_4' - 4x_4'' - x_6 = 40 \\ 4x_1 + 3x_2' + 2x_3 - 7x_4' + 7x_4'' = 80 \\ x_2' + x_7 = 20 \\ x_1, x_2', x_3, x_4', x_4'', x_5, x_6, x_7 \geqslant 0 \end{cases}$$

二、线性规划问题的解的概念和基本性质

下面我们先来学习线性规划问题的各种解的概念及其性质。

对于线性规划问题标准型

$$\max z = Cx \tag{1-5}$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} Ax = b \\ x \geqslant 0 \end{cases} \tag{1-6}$$

称满足约束条件式（1-6）的 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 为线性规划问题的可行解，使目标函数式（1-5）达到最大值的可行解称为最优解，最优解对应的目标函数值称为最优值。

设约束方程组的系数矩阵 A 的阶数为 $m \times n$，其秩为 m（$m \leqslant n$），如果 B 是 A 中 $m \times m$ 阶非奇异子矩阵（即 $|B| \neq 0$），则称 B 是线性规划问题的一个基。显然，基 B 由 m 个线性无关的列向量组成，基的个数不超过 C_n^m 个。不失一般性，不妨设基 B 位于 A 的前 m 列，即

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} = (p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_m)$$

式中：$p_j = (a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj})^T (j = 1, 2, \cdots, m)$ 为基向量；与基向量 p_j 相对应的变量 x_j 叫基变量，其他的变量称为相应于基 $\boldsymbol{B}$ 的非基变量。

对于基 $\boldsymbol{B}$，若令所有非基变量都等于零，所得到的约束方程组的解，称为该线性规划问题的一个基本解。显然，有一个基，就有一个基本解，基本解的非零分量数不超过 m 个。这里要指出，基本解不一定是可行解，因为它不一定满足非负条件；同样，可行解也不一定是基本解，因为可行解所含的非零分量的个数可以大于 m。

满足非负条件的基本解，称为基本可行解，对应于基本可行解的基，称为可行基。当基本可行解的非零分量个数少于 m 时，则基本可行解中至少有一个基变量取值为零，称此为退化的基本可行解。

满足目标函数式（1-5）的基本可行解，称为基本最优解，对应于基本最优解的基，称为最优基。

例 1-3　对于线性规划问题

$$\max s = x_1 + x_2 + 4x_3$$

$$\text{s. t.} = \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leqslant 10 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leqslant 12 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

化为标准型得

$$\max z = x_1 + x_2 + 4x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3+x_4=10\\4x_1+2x_2+2x_3+x_5=12\\x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geqslant 0\end{cases}\tag{1-7}$$

系数矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&3&1&1&0\\4&2&2&0&1\end{pmatrix}=(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5)$。取 $\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=(p_4,p_5)$，$|\boldsymbol{B}|=1\neq 0$，它是线性规划的一个基，基向量为 $p_4=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$p_5=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，对应的基变量为 x_4，x_5，非基变量为 x_1，x_2，x_3。令非基变量 $x_1=0$，$x_2=0$，$x_3=0$，将它们代入式 (1-7) 得 $X^{(1)}=(0,0,0,10,12)^{\mathrm{T}}$，它是一个基本解，由于满足非负条件，所以又是可行解，因而是基本可行解，$\boldsymbol{B}_1$ 是可行基。

该线性规划问题共有9个基，因而有9个基本解，它们是

$\boldsymbol{B}_1=(p_4,p_5)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，基本解为 $X^{(1)}=(0,0,0,10,12)^{\mathrm{T}}$，它是可行解，$\boldsymbol{B}_1$ 为可行基。

$\boldsymbol{B}_2=(p_2,p_5)=\begin{pmatrix}3&0\\2&1\end{pmatrix}$，基本解为 $X^{(2)}=(0,10/3,0,0,16/3)^{\mathrm{T}}$，它是可行解，$\boldsymbol{B}_2$ 为可行基。

$\boldsymbol{B}_3=(p_2,p_1)=\begin{pmatrix}3&2\\2&4\end{pmatrix}$，基本解为 $X^{(3)}=(2,2,0,0,0)^{\mathrm{T}}$，它是可行解，$\boldsymbol{B}_3$ 为可行基。

$\boldsymbol{B}_4=(p_1,p_4)=\begin{pmatrix}2&1\\4&0\end{pmatrix}$，基本解为 $X^{(4)}=(3,0,0,4,0)^{\mathrm{T}}$，它是可行解，$\boldsymbol{B}_4$ 为可行基。

$\boldsymbol{B}_5=(p_4,p_2)=\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}$，基本解为 $X^{(5)}=(0,6,0,-8,0)^{\mathrm{T}}$，它不是可行解，$\boldsymbol{B}_5$ 不是可行基。

$\boldsymbol{B}_6=(p_1,p_5)=\begin{pmatrix}2&0\\4&1\end{pmatrix}$，基本解为 $X^{(6)}=(5,0,0,0,-8)^{\mathrm{T}}$，它不是可行解，$\boldsymbol{B}_6$ 不是可行基。

$\boldsymbol{B}_7=(p_2,p_3)=\begin{pmatrix}3&1\\2&2\end{pmatrix}$，基本解为 $X^{(7)}=(0,2,4,0,0)^{\mathrm{T}}$，它是可行解，$\boldsymbol{B}_7$ 为可行基。

$\boldsymbol{B}_8=(p_3,p_4)=\begin{pmatrix}1&1\\2&0\end{pmatrix}$，基本解为 $X^{(8)}=(0,0,6,4,0)^{\mathrm{T}}$，它是可行解，$\boldsymbol{B}_8$ 为可行基。

$\boldsymbol{B}_9=(p_3,p_5)=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$，基本解为 $X^{(9)}=(0,0,10,0,-8)^{\mathrm{T}}$，它不是可行解，$\boldsymbol{B}_6$ 不是可行基。

而 $\boldsymbol{B}_{10}=(p_1,p_3)=\begin{pmatrix}2&1\\4&2\end{pmatrix}$，不是基，因为 $|B_3|=\begin{vmatrix}2&1\\4&2\end{vmatrix}=0$。

在所有基本可行解中，$X^{(8)}$ 对应的函数值最大，为 24，因此 $X^{(8)}$ 为最优解，$\boldsymbol{B}_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$为最优基。

下面我们再简单归纳一下线性规划问题解的性质。在这之前，先介绍两个有关的概念。

凸集：如果集合 D 中任意两点 $X^{(1)}$、$X^{(2)}$，连线上的所有点都是集合 D 中的点，即如果对于任意的 $X^{(1)}$，$X^{(2)} \in D$，$0<\alpha<1$ 都有 $\alpha X^{(1)}+(1-\alpha)X^{(2)} \in D$，则称 D 为凸集。

顶点：凸集 D 中的点 X，如果它不是 D 中任何线段的内点，即对任意 $X^{(1)}$，$X^{(2)} \in D$，都不存在 α （$0<\alpha<1$），使得 $X=\alpha X^{(1)}+(1-\alpha)X^{(2)}$，则称 X 为 D 的顶点。

下面是三个重要定理。

定理 1－1：线性规划问题的可行解集 D 是一个凸集。

在对可行域 D 中两点 $X^{(1)}$，$X^{(2)} \in D$，则

$$AX^{(1)}=b, X^{(1)} \geqslant b, \quad AX^{(2)}=b, X^{(2)} \geqslant 0$$

$$\begin{aligned} AX &= A[\alpha X^{(1)}+(1-\alpha)X^{(2)}] \\ &= \alpha AX^{(1)}+(1-\alpha)AX^{(2)}=ab+(1-\alpha)b=b \end{aligned}$$

$$X=\alpha X^{(1)}+(1-\alpha)X^{(2)} \geqslant 0$$

因此，$X=\alpha X^{(1)}+(1-\alpha)X^{(2)} \in D$。

定理 1－2：可行域 D 中的点 x 是顶点的充要条件是 x 为基本可行解。

证明：

（1）充分性。设 x 为对应于基 B 的基本可行解，不妨设基 B 是 A 的前 m 列。若 x 不是可行域 D 中的顶点，则根据凸集顶点的定义，一定存在两个不同的可行解 $x^{(1)}$，$x^{(2)}$，使得

$$x=\alpha x^{(1)}+(1-\alpha)x^{(2)}$$

其中 $\alpha \in (0,1)$。由可行解的定义有，$x^{(1)}$，$x^{(2)}$ 的后 $n-m$ 个分量一定全为 0，故可令

$$x=(\tilde{x},0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}, x^{(1)}=(\tilde{x}^{(1)},0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}, x^{(2)}=(\tilde{x}^{(2)},0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}。$$

因为 x 是基本解，所以 $\tilde{x}=B^{-1}b$。又由于 $x^{(1)}$，$x^{(2)}$ 是可行解，$x^{(1)}$，$x^{(2)}$ 的后 $n-m$ 个分量一定全为 0，故 $B\tilde{x}^{(1)}=b$，$B\tilde{x}^{(2)}=b$，因此 $x^{(1)}=B^{-1}b$，$x^{(2)}=B^{-1}b$，这与 $x^{(1)} \neq x^{(2)}$ 矛盾，故 x 是可行域 D 中的顶点。

（2）必要性。设 x 是可行域 D 顶点，不妨假设 x 的非零分量是前 k 个分量。令

$$p_1=(a_{11},a_{21},\cdots,a_{m1})^{\mathrm{T}}, p_2=(a_{12},a_{22},\cdots,a_{m2})^{\mathrm{T}},\cdots,$$
$$p_n=(a_{1n},a_{2n},\cdots,a_{mn})^{\mathrm{T}}$$

约束条件 $Ax=b$ 可写成

$$x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n=b$$

如果 x 的非零分量对应的系数列向量线性相关，则一定存在不全为 0 的系数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,$

λ_k，使得

$$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \cdots + \lambda_k p_k = 0$$

由于 x 是线性规划的基本可行解，因此 $x_1 > 0$，$x_2 > 0$，…，$x_k > 0$，$x_{k+1} = \cdots = x_n = 0$，

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_k p_k = b$$

取

$$\theta = \min\left\{ \frac{x_j}{|\lambda_j|} \,\middle|\, \lambda_j \neq 0,\ j \leqslant k \right\}$$

则

$$(x_1 + \theta\lambda_1)p_1 + (x_2 + \theta\lambda_2)p_2 + \cdots + (x_k + \theta\lambda_k)p_k = b$$
$$(x_1 - \theta\lambda_1)p_1 + (x_2 - \theta\lambda_2)p_2 + \cdots + (x_k - \theta\lambda_k)p_k = b$$

这样，我们得到两个点

$$x^{(1)} = (x_1 + \theta\lambda_1, x_2 + \theta\lambda_2, \cdots, x_k + \theta\lambda_k, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}} \geqslant 0$$
$$x^{(2)} = (x_1 - \theta\lambda_1, x_2 - \theta\lambda_2, \cdots, x_k - \theta\lambda_k, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}} \geqslant 0$$

它们都是可行解，且 $x = x^{(1)} + x^{(2)}$，这与 x 是可行域的顶点矛盾。故 p_1，p_2，…，p_k 线性无关。由于 $\mathrm{rank}(A) = m$，故在 p_{k+1}，p_{k+2}，…，p_n 中一定可以找到 $m-k$ 个向量，它们与 p_1，p_2，…，p_k 一起构成基，它以 x 为基本解，从而 x 是基本可行解。

定理 1－3：若可行域 D 非空有界，则线性规划问题的最优值一定可以在顶点上达到。

证明：因为可行域 D 非空有界，函数 $z = CX = \sum_{k=1}^{n} c_n x_n$ 是连续函数，由有界闭集上的连续函数性质知道，$z = CX = \sum_{k=1}^{n} c_n x_n$ 一定在 D 上可以取到最大值。设在点 $X^{(0)} \in D$ 取得最大值。若 $X^{(0)}$ 不是顶点，可行域 D 的顶点为 $X^{(1)}$，$X^{(2)}$，…，$X^{(k)}$，则

$$CX^{(j)} \leqslant CX^{(0)},\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ k$$

$$X^{(0)} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i X^{(i)}\text{，其中 } \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1,\ 0 \leqslant \lambda_i < 1$$

因此，对满足 $\lambda_j > 0$ 的 j，一定有 $CX^{(j)} = CX^{(0)}$，在这些 $X^{(j)}$ 上，也一定取得最大值。

注：从定理的证明可知，若在非顶点上的点取得最值，则最优解一定有无穷多。

定理 1－1 说明，连接线性规划问题任意两个可行解的线段上的点（坐标）仍是可行解；定理 1－2 说明，线性规划问题的基本可行解与可行域的顶点是一一对应的关系；定理 1－3 则告诉我们，如果一个线性规划问题有最优解，则一定可以从有限个基本可行解（顶点）中找到。

三、线性规划问题的图解法

对一个线性规划问题，建立数学模型之后，面临着如何求解的问题。这里先介绍含有两个未知变量的线性规划问题的图解法，它简单直观，有助于更好地了解线性规划问题求解的基本原理。