极限解题的策略与技巧

齐邦交　编著

Jixian Jieti De
Celue yu Jiqiao

陕西科学技术出版社

极限解题的策略与技巧

齐邦交 编著

陕西科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

极限解题的策略与技巧 / 齐邦交编著. —西安:陕西科学技术出版社,2009.7
ISBN 978-7-5369-4631-6

Ⅰ.极… Ⅱ.齐… Ⅲ.极限(数学)—高等学校—解题 Ⅳ.0171-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 090833 号

出 版 者	陕西科学技术出版社
	西安北大街 131 号 邮编 710003
	电话(029)87211894 传真(029)87218236
	http: //www.snstp.com
发 行 者	陕西科学技术出版社
	电话(029)87212206 87260001
印 刷	天水新华印刷厂
规 格	787mm×960mm 16 开本
印 张	15
字 数	260 千字
版 次	2009 年 8 月第 1 版
	2009 年 8 月第 1 次印刷
定 价	24.00 元

序

极限的理论和思想方法是数学分析的基础，而数学分析又是现代数学的基础,这就是极限的理论与思想方法的重要性和应用广泛的根本原因。又因极限思想方法是人类通过有限认识和把握无限的跨越，所以有其深层次的哲学内涵,这也是有关极限解题难度较大的内在根源。正因为以上两方面的原因，市面已出版的有关极限解题的参考书不少，但由于受当今浮躁和急功近利思潮的干扰,虽然数量多,但各自特点不够突出,有些雷同,切合广大读者需要的较少。本书就是在这样的背景下,为了满足广大读者的急需而编写的。

读完《极限解题的策略与技巧》后,总的感觉主要有以下几个方面:

一是作者除了深入研究极限理论与方法的科学性与内在规律性，还充分考虑到学生的认知特征和规律性,且将二者科学而自然的融合起来。

二是选题典型,起到了以一当十的效果。这足以表明作者对极限知识的渊博与精通。对题的解法不仅突出了方法与过程,而且深入浅出,特别是如何把难题化易,复杂题化简,这种精彩的解题策略与技巧,给人以自然、简洁之感，充分体现出作者具有丰富的教学经验、独特的解题风格和创新精神。

三是题型多而全,内容多样而丰富,复盖面广。因此,该书不仅可作大学数学专业的学生和青年教师的参考书,也可作其他人员学习高等数学的参考书，还可作中学数学教师和学生的参考书。

仔细读完本书后,回想起以前曾读过齐邦交同志的其他著作,综合起来使我对他产生一种较深刻的印象,就是他的这些著作都有针对性强,既有理论又有实践,既深刻又生动,可读性强的特征。这种写作风格,来自他作为一名具有三十余年教龄的大学教师一直将科研与教学有机的融合起来，真正体现出教学与科研互相促进、互相补充。通过以上事实证明,他的这本新作,是他教学魅力与学术魅力相融合的产物，这无疑对当今大学教师如何处理好教学与科研的关系有其借鉴之处。

王仲春

二〇〇九年五月于西北师范大学

前　言

数学分析是现代数学的基础，是高等学校数学专业和应用数学专业的一门重要基础课，而极限是它的核心。因此，要学好数学分析就必须掌握极限解题的策略与技巧。然而，数学分析课程内容多、教学任务重，教师不可能在课堂教学中就极限解题的策略与技巧展开讲解，所以大量的训练要靠学生课后来完成。可这对初学者来说谈何容易，即便是学完了数学分析的读者，也有可能对极限解题仍然感到难以琢磨，做题困难。因此，作者根据自己三十多年学习与教学积累的经验和资料，编写成《极限解题的策略与技巧》一书，以期对读者有所裨益。

全书共5讲，主要讲述：怎样证明数列极限，怎样证明函数极限，证明中值点极限的方法，怎样求极限以及极限式中常数的确定。

该书有以下特点：

1.对问题作思维定式处理，即列题型讲方法，使读者的思路能有的放矢地展开，读后有套路可循，遇到具体题有招可施。

2.题型丰富，方法多样，思路清晰，富有启发性。

3.较为详细地讲述了如何用否定形式证明极限不是某常数或极限不存在。

4.有些方法比较新颖。如等价代换法中的定理1.19至定理1.23，求 $\infty-\infty$ 型极限中的作商法，求 n 项和极限中的排列数法、差分法。

5.适量地列举了微分学、积分学、级数里出现的一些极限问题。

本书可作为高等学校学生学习数学分析、高等数学的参考书，也可作为青年教师备课时的参考资料。中学数学教师阅读本书也可提高对极限的认识。对数学爱好者来说，同样是一本有益的读物。

西北师范大学王仲春教授批阅了全书，并为本书作了序，责任编辑赵生久老师为本书的编写提出了许多有益的建议，并对全书的编校做了大量的工作，作者在此一并表示衷心地感谢！

虽然作者尽心写作，多次仔细校对，但难免存在疏漏乃至错误，恳请同仁和读者不吝赐教。

齐邦交

2009年5月

目录

第1讲　怎样证明数列极限

§1.1　证明数列收敛的4个方法

在研究比较复杂的数列极限问题时,通常先考察该数列是否有极限;如果有极限,再考虑如何求出此极限. 这是极限理论的两个基本问题. 因此,在这一讲里,首先介绍证明数列收敛的4个重要方法.

1.1.1　单调有界法

定义1.1　若数列$\{x_n\}$的各项满足$x_n\leqslant x_{n+1}(x_n\geqslant x_{n+1})$,则称数列$\{x_n\}$为递增(递减)数列. 递增数列和递减数列统称为单调数列.

定义1.2　设$\{x_n\}$为数列. 如果存在数M,使$x_n\leqslant M(x_n\geqslant M)$,$n=1,2,\cdots$,则称数列$\{x_n\}$有上(下)界. 如果存在正数$M$,使$|x_n|\leqslant M$,$n=1,2,\cdots$,则称数列$\{x_n\}$有界.

定理1.1(单调有界法)　如果数列$\{x_n\}$有界且单调,则数列$\{x_n\}$收敛. 即

若数列$\{x_n\}$递增,有上界,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

若数列$\{x_n\}$递减,有下界,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

由此可见,只要证得数列$\{x_n\}$单调,且有界,即可断定$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

证明单调性,一般可以用:(1)观察法,即考察通项公式或项的结构;(2)数学归纳法;(3)判断$x_{n+1}-x_n$的符号;(4)考查$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$与1的关系;(5)导数法. 其中,导数法指:若$x_{n+1}=f(x_n)$,$f'(x)\geqslant 0$,则当$x_1\leqslant x_2$时,数列$\{x_n\}$递增;当$x_1\geqslant x_2$时,数列$\{x_n\}$递减. 这是根据$x_{n+1}-x_n=f(x_n)-f(x_{n-1})=f'(\xi_n)(x_n-x_{n-1})$,由数学归纳法得到的.

确定有界,一般可以用:(1)观察法,观察已知条件与通项公式得出;(2)数学归纳法;(3)加强不等式法.

例1　设$x_n=p_0+\dfrac{p_1}{10}+\cdots+\dfrac{p_n}{10^n}(n=1,2,\cdots)$,其中$p_i$是非负的整数,从1起不大于9. 证明数列$\{x_n\}$收敛.

证明 显然，$x_{n+1}=x_n+\frac{p_{n+1}}{10^{n+1}}$. 由于 $p_{n+1}>0$，所以 $x_{n+1}>x_n$，即数列 $\{x_n\}$ 递增.

其次，由于 $x_n\leqslant 9(\frac{1}{10^1}+\frac{1}{10^2}+\cdots+\frac{1}{10^n})+p_0<1+p_0$，所以数列 $\{x_n\}$ 有上界.

根据单调有界法，数列 $\{x_n\}$ 收敛.

例 2 设 $x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛.

证明 因为 $\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})$，所以

$$x_n-x_{n+1}=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)-\left[\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-\ln(1+n)\right]=\ln(1+n)-\ln n-\frac{1}{n+1}$$

$$=\ln(1+\frac{1}{n})-\frac{1}{n+1}>0,$$

即 $x_n>x_{n+1}$.

又由不等式 $\ln(1+\frac{1}{k})<\frac{1}{k}(k=1,2,\cdots,n)$，有

$$\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{1}{k})=\sum_{k=1}^{n}\ln(\frac{k+1}{k})=\ln\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n+1}{n}\right)=\ln(n+1)<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k},$$

所以 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n+1)>0$. 从而 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n>0$，这表明 $x_n>0$.

由单调有界法，数列 $\{x_n\}$ 收敛.

例 3 设 $a_k>0,k=1,2,\cdots,n$. $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)}$. 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛.

证明 可以看到

$$\frac{a_k}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)}=\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{k-1})}-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)},$$

所以

$$x_n=1-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}.$$

由于 $a_k>0,k=1,2,\cdots,n$. 所以数列 $\left\{\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}\right\}$ 递减且大于 0. 从而数列 $\{x_n\}$ 递增，且 $x_n<1$.

由单调有界法，数列 $\{x_n\}$ 收敛.

例 4 设 $x_n=(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{4})\cdots(1-\frac{1}{2^n})$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛.

证明 显然，$x_{n+1}=x_n\cdot(1-\frac{1}{2^{n+1}})<x_n, x_n>0$. 即数列$\{x_n\}$递减有下界. 所以数列$\{x_n\}$收敛.

例 5 设 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，证明数列$\{x_n\}$收敛.

证明 因

$$\sqrt[n+1]{x_n\cdot 1}=\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot 1}\leqslant\frac{n(1+\frac{1}{n})+1}{n+1}=1+\frac{1}{n+1},$$

两边 $n+1$ 次方，得 $x_n\leqslant\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=x_{n+1}$，即数列$\{x_n\}$递增.

记 $y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

因

$$\sqrt[n+2]{y_n\cdot 1}=\sqrt[n+2]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\cdot 1}\geqslant\frac{n+2}{(n+1)\frac{1}{(1+\frac{1}{n})}+1}=1+\frac{1}{n+1},$$

两边 $n+2$ 次方，得 $y_n\geqslant\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}=y_{n+1}$，所以数列$\{y_n\}$递减.

从而 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=y_n\leqslant y_1=4$，即数列$\{x_n\}$有上界.

由单调有界法，数列$\{x_n\}$收敛.

例 6 设 $x_1=1, x_{n+1}=\frac{1+2x_n}{1+x_n}, n=1,2,\cdots$. 证明数列$\{x_n\}$收敛.

证明 显然，$0<x_{n+1}=2-\frac{1}{1+x_n}<2$.

令 $f(x)=2-\frac{1}{1+x}, 0<x<2$，则 $x_{n+1}=f(x_n)$，$f'(x)=\frac{1}{(1+x)^2}>0$. 又因为 $x_1=1$，所以 $x_2=2-\frac{1}{1+1}=\frac{3}{2}>1=x_1$. 由导数法，数列$\{x_n\}$递增.

根据单调有界法，数列$\{x_n\}$收敛.

例 7 设 $x_1=a>0, y_1=b>0$，且 $b>a, x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}, y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}$. 证明数列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$均收敛.

证明 由已知得 $0<x_1<y_1$，再由两正数算术平均值与几何平均值的关系，有 $x_2=\sqrt{x_1y_1}\leqslant\frac{x_1+y_1}{2}=y_2$. 更一般地，有

$$x_n=\sqrt{x_{n-1}y_{n-1}}\leqslant\frac{x_{n-1}+y_{n-1}}{2}=y_n.$$

因此

$$x_n\leqslant\sqrt{x_ny_n}=x_{n+1}\leqslant y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}\leqslant y_n,n=1,2,\cdots,$$

此即

$$0<x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant x_{n+1}\leqslant\cdots\leqslant y_{n+1}\leqslant y_n\leqslant\cdots\leqslant y_2\leqslant y_1.$$

可见,数列$\{x_n\}$递增有上界,数列$\{y_n\}$递减有下界.从而数列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$均收敛.

例 8 设正值数列$\{x_n\}$满足$\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1$.证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

证明 令$f(x)=\ln x+\frac{1}{x}$,则$x=1$为函数$f(x)$的最小值点,且$f(1)=1$.因此

$$\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1\leqslant\ln x_n+\frac{1}{x_n},$$

从而$x_n<x_{n+1}$,即数列$\{x_n\}$递增.

如果数列$\{x_n\}$无上界,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$.

对$\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1$两边取极限,有$+\infty<1$.矛盾.因此,数列$\{x_n\}$有上界.

由单调有界法,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

例 9 设$f(x)$在$[1,+\infty)$上为递减的连续函数,且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x$.证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

证明 因为$f(x)$在$[1,+\infty)$上递减连续,且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$,所以

$$\int_{k-1}^{k}f(x)\mathrm{d}x\geqslant f(k)\geqslant\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\geqslant0,k=2,3,\cdots.\tag{1}$$

因此

$$\begin{aligned}x_{n+1}-x_n&=\left[\sum_{k=1}^{n+1}f(k)-\int_1^{n+1}f(x)\mathrm{d}x\right]-\left[\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^{n}f(x)\mathrm{d}x\right]\\&=f(n+1)-\int_n^{n+1}f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由(1)式得

$$x_{n+1}-x_n\leqslant f(n+1)-f(n+1)=0,$$

即$x_{n+1}\leqslant x_n$.

又

$$
\begin{aligned}
x_n&=\sum_{k=1}^{n} f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n} f(k)-\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k} f(x)\mathrm{d}x\\
&=f(1)+\sum_{k=2}^{n}\left[f(k)-\int_{k-1}^{k} f(x)\mathrm{d}x\right]\\
&\geqslant f(1)+\sum_{k=2}^{n}\left[\int_{k}^{k+1} f(x)\mathrm{d}x-\int_{k-1}^{k} f(x)\mathrm{d}x\right]\\
&=f(1)-\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

这表明数列$\{x_n\}$有下界.

由单调有界法,数列$\{x_n\}$收敛.

例 10 设函数$\varphi(x)$、$f(x)$在$[a,b]$上正值连续,且$\max\{f(x)\mid x\in[a,b]\}=M$,$D_n=\int_a^b (f(x))^n\varphi(x)\mathrm{d}x$. 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{D_{n+1}}{D_n}$存在.

证明 由$D_{n+1}=\int_a^b (f(x))^{n+1}\varphi(x)\mathrm{d}x\leqslant M\int_a^b (f(x))^n\varphi(x)\mathrm{d}x=MD_n$,有$\dfrac{D_{n+1}}{D_n}\leqslant M$,

即数列$\left\{\dfrac{D_{n+1}}{D_n}\right\}$有上界.

由 Schwarz 不等式,有

$$
\begin{aligned}
(D_{n+1})^2&=\left[\int_a^b f(x)^{n+1}\varphi(x)\mathrm{d}x\right]^2\\
&=\left[\int_a^b (f(x))^{\frac{n+2}{2}}(\varphi(x))^{\frac{1}{2}}(f(x))^{\frac{n}{2}}(\varphi(x))^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\right]^2\\
&\leqslant\int_a^b (f(x))^{n+2}\varphi(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b (f(x))^n\varphi(x)\mathrm{d}x\\
&=D_{n+2}\cdot D_n.
\end{aligned}
$$

于是$\dfrac{D_{n+1}}{D_n}\leqslant\dfrac{D_{n+2}}{D_{n+1}}$,即数列$\left\{\dfrac{D_{n+1}}{D_n}\right\}$递增.

由单调有界法,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{D_{n+1}}{D_n}$存在.

注 (1)定理 1.1 中的有界单调这两个条件缺一不可,否则无法保证极限存在. 例如,数列$\{2n\}$单调,但无界,显然极限不存在;数列$\{(-1)^n\}$有界,但不单调,极限也不存在.

(2)定理 1.1 中的单调性是充分的,不是必要的. 例如,数列$\left\{(-1)^n\dfrac{1}{n}\right\}$不是单调的,却$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}=0$. 但有界性是必要的.

1.1.2 用 Cauchy 收敛准则证

定理 1.2(Cauchy 收敛准则)　数列$\{x_n\}$收敛的充要条件是：对任给的正数ε，存在正整数N，当m、$n>N$时，有

$$|x_m-x_n|<\varepsilon.$$

有时，为应用方便，可将 Cauchy 收敛准则陈述为：

数列$\{x_n\}$收敛的充要条件是：对任给的正数ε，存在正整数N，当$n>N$时，有

$$|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon,p=1,2,\cdots.$$

这两种陈述方式是等价的，但在不同情况下各有其方便之处.

显然(以第一种陈述方式为例，第二种陈述方式类似)，对任给的正数ε，只要能找到正整数N，当m、$n>N$时，有$|x_m-x_n|<\varepsilon$成立，即可断定数列$\{x_n\}$收敛或$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在. 可见，找正整数$N$是关键. 怎样找呢？其办法是：

首先，从$|x_m-x_n|$出发，借助不等式性质，逐次放大$|x_m-x_n|$，即$|x_m-x_n|\leqslant\cdots\leqslant H(m,n)$.

然后，设$m>n$. 继续放大$H(m,n)$，并从中"消灭"掉m，使$|x_m-x_n|\leqslant\cdots\leqslant H(m,n)\leqslant\cdots\leqslant h(n)$.

再对任给的正数ε，令$h(n)<\varepsilon$，解得$n>h^{-1}(\varepsilon)$. 取$N=[h^{-1}(\varepsilon)]$即可.

注　这种放大是完全可以的. 因为该准则，只要求对事先任给的正数ε存在正整数N. 至于这个N到底要多么大，则无关紧要.

例 1　设$x_n=\dfrac{\cos n\pi}{n}$，$n=1,2,\cdots$，证明数列$\{x_n\}$收敛.

证明　由于

$$|x_m-x_n|=\left|\frac{\cos m\pi}{m}-\frac{\cos n\pi}{n}\right|\leqslant\frac{n|\cos m\pi|+m|\cos n\pi|}{mn}\leqslant\frac{m+n}{mn}.$$

假定$m>n$，则

$$|x_m-x_n|\leqslant\frac{m+n}{mn}\leqslant\frac{2m}{mn}=\frac{2}{n}.$$

对任给的正数ε，令$\dfrac{2}{n}<\varepsilon$，解得$n>\dfrac{2}{\varepsilon}$. 取$N=\left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]$，则当$m,n>N$时，有

$$|x_m-x_n|<\varepsilon.$$

根据 Cauchy 收敛准则，数列$\{x_n\}$收敛.

例 2　设$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}(x_n+x_{n-1})$，证明数列$\{x_n\}$收敛.

证明　由于$|x_{n+1}-x_n|=\dfrac{1}{2}|x_n-x_{n-1}|=\cdots=\dfrac{1}{2^n}|x_1-x_0|$，从而，当$n>2$时，

$$|x_{n+p}-x_n|\leqslant|x_{n+p}-x_{n+p-1}|+|x_{n+p-1}-x_{n+p-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|$$

$$=\left(\frac{1}{2^{n+p-1}}+\frac{1}{2^{n+p-2}}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)|x_1-x_0|$$

$$<\frac{1}{2^{n-1}}|x_1-x_0|<\frac{1}{n-1}|x_1-x_0|$$

$$<\frac{2}{n}|x_1-x_0|.$$

对任给的正数 ε,令 $\frac{2}{n}|x_1-x_0|<\varepsilon$,解得 $n>\frac{2|x_1-x_0|}{\varepsilon}$.取 $N=\max\left\{2,\frac{2|x_1-x_0|}{\varepsilon}\right\}$,则当 $n>N$ 时,有

$$|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon,p=1,2,\cdots.$$

因此,数列 $\{x_n\}$ 收敛.

例 3 设 $|q|<1,x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{q^k}{k}$. 试证数列 $\{x_n\}$ 收敛.

证明 由于 $|q|<1$. 因此,可记 $|q|=\frac{1}{1+h}$,$h>0$. 于是,对任意的正整数 p,

$$|x_{n+p}-x_n|=\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{q^k}{k}\right|\leqslant\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{|q|^k}{k}=\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k(1+h)^k}$$

$$<\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k(1+kh)}<\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k^2h}=\frac{1}{h}\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k^2}$$

$$<\frac{1}{h}\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{h}\sum_{k=n+1}^{n+p}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{h}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}\right)$$

$$<\frac{1}{nh}.$$

对任给的正数 ε,令 $N=\left[\frac{1}{h\varepsilon}\right]$,则当 $n>N$ 时,有

$$|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon.$$

由 Cauchy 收敛准则,数列 $\{x_n\}$ 收敛.

例 4 设 $x_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$,试证数列 $\{x_n\}$ 收敛.

证明 对任意的正整数 p,有

$$|x_{n+p}-x_n|=\left|\frac{(-1)^n}{n+1}+\frac{(-1)^{n+1}}{n+2}+\cdots+\frac{(-1)^{n+p-1}}{n+p}\right|=\left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{(-1)^{p-1}}{n+p}\right|$$

当 $p=2k-1,k=1,2,\cdots$ 时,

$$|x_{n+p}-x_n|=\left|\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+p-2}-\frac{1}{n+p-1}\right)+\frac{1}{n+p}\right|$$

$$=\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+p-2}-\frac{1}{n+p-1}\right)+\frac{1}{n+p}$$

$$=\frac{1}{n+1}-\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)$$

$$<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n};$$

当 $p=2k$, $k=1,2,\cdots$ 时，

$$|x_{n+p}-x_n|=\left|\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)\right|$$

$$=\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)$$

$$=\frac{1}{n+1}-\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{n+p-2}-\frac{1}{n+p-1}\right)-\frac{1}{n+p}$$

$$<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}.$$

可见，不论 p 是奇数或偶数，都有 $|x_{n+p}-x_n|<\frac{1}{n}$.

对任给的正数 ε，令 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，有

$$|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon.$$

由 Cauchy 收敛准则，数列 $\{x_n\}$ 收敛.

例 5 设 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，试证数列 $\{x_n\}$ 收敛.

证明 对任意的正整数 p，

$$|x_{n+p}-x_n|=\left|\left(1+\frac{1}{n+p}\right)^{n+p}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right|$$

$$=\left|\sum_{k=0}^{n+p}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+p}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+p}\right)-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right|$$

$$=\left|\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left[\left(1-\frac{1}{n+p}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+p}\right)-\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]\right|$$

$$+\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+p}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+p}\right)\right|.$$

由不等式 $\prod_{i=1}^{m}(1-\alpha_i)\geqslant 1-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(0<\alpha_i<1)$，有

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\geqslant 1-\frac{k(k-1)}{2n}(k\geqslant 2).$$

又

$$\left(1-\frac{1}{n+p}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+p}\right)\leqslant 1,$$

所以

$$\left|\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left[\left(1-\frac{1}{n+p}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+p}\right)-\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]\right|$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left[\left(1-\frac{1}{n+p}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+p}\right)-\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left[1-\left(1-\frac{k(k-1)}{2n}\right)\right]=\frac{1}{2n}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-2)!}=\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!}$$

$$\leqslant\frac{1}{2n}\left[2+\sum_{k=2}^{n-2}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)\right]=\frac{1}{2n}\left(3-\frac{1}{n-2}\right)<\frac{3}{2n}<\frac{2}{n};$$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+p}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+p}\right)\right|\leqslant\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k!}\leqslant\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k(k-1)}$$

$$=\sum_{k=n+1}^{n+p}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}.$$

从而

$$|x_{n+p}-x_n|<\frac{2}{n}+\frac{1}{n}=\frac{3}{n}.$$

于是,对任给的正数 ε,令 $N=\left[\frac{3}{\varepsilon}\right]$,则当 $n>N$ 时,有

$$|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon.$$

由 Cauchy 收敛准则,数列 $\{x_n\}$ 收敛.

有些证明数列收敛,可直接从条件中找到 N.

例 6 设 M 为正常数. 证明:若数列 $\{x_n\}$ 满足 $\sum\limits_{k=2}^{n}|x_k-x_{k-1}|<M$, $n=2,3,4,\cdots$,则数列 $\{x_n\}$ 收敛.

证明 记 $y_n=\sum\limits_{k=2}^{n}|x_k-x_{k-1}|$, $n=2,3,4,\cdots$. 显然,数列 $\{y_n\}$ 递增且有上界,故收敛.

对任给的正数 ε,由于数列 $\{y_n\}$ 收敛,所以存在正整数 N,当 $n>N$ 时,有

$$|y_{n+p}-y_n|=\sum_{k=n+1}^{n+p}|x_k-x_{k-1}|<\varepsilon,\ p=1,2,\cdots.$$

从而

$$|x_{n+p}-x_n|=|(x_{n+p}-x_{n+p-1})+(x_{n+p-1}-x_{n+p-2})+\cdots+(x_{n+1}-x_n)|\leqslant\sum_{k=n+1}^{n+p}|x_k-x_{k-1}|<\varepsilon.$$

由 Cauchy 收敛准则,数列 $\{x_n\}$ 收敛.

1.1.3 压缩映像法

定理 1.3(压缩映像法) (1)设$\{x_n\}$为一个数列. 若存在常数$r\in(0,1)$,对于任意的正整数n,有

$$|x_n-x_{n-1}|\leqslant r|x_{n-1}-x_{n-2}|,$$

则数列$\{x_n\}$收敛.

(2)若数列$\{x_n\}$由递推公式$x_n=f(x_{n-1})(n=1,2,\cdots)$给出,其中$f$是一个可微的函数. 且存在常数$r\in(0,1)$,使得

$$|f'(x)|\leqslant r.$$

则数列$\{x_n\}$收敛.

证明 (1)由$|x_n-x_{n-1}|\leqslant r|x_{n-1}-x_{n-2}|$有

$$|x_n-x_{n-1}|\leqslant r^2|x_{n-2}-x_{n-3}|\leqslant\cdots\leqslant r^{n-2}|x_2-x_1|.$$

因此

$$\sum_{k=2}^{n}|x_k-x_{k-1}|\leqslant(r^{n-2}+r^{n-3}+\cdots+1)|x_2-x_1|<\frac{|x_2-x_1|}{1-r}=M.$$

这里$M=\dfrac{|x_2-x_1|}{1-r}$是正常数.

由 1.1.2 中例 6 知,数列$\{x_n\}$收敛.

(2)由 Lagrange 中值定理,

$$|x_n-x_{n-1}|=|f(x_{n-1})-f(x_{n-2})|=|f'(\xi)(x_{n-1}-x_{n-2})|\leqslant r|x_{n-1}-x_{n-2}|,n=2,3,\cdots,$$

即数列$\{x_n\}$满足(1)的条件. 故数列$\{x_n\}$收敛.

例 1 设$0<r<1,a_1=\dfrac{r}{2},a_{n+1}=\dfrac{r}{2}+\dfrac{a_n^2}{2}$. 证明数列$\{a_n\}$收敛.

证明 显然,$0<a_1<r$.

假设$0<a_k<r$. 则$0<a_{k+1}=\dfrac{r}{2}+\dfrac{a_k^2}{2}<\dfrac{r}{2}+\dfrac{r^2}{2}<\dfrac{r}{2}+\dfrac{r}{2}<r$.

由数学归纳法,对一切正整数n,有$0<a_n<r$.

因此$|a_n-a_{n-1}|=\left|\dfrac{a_{n-1}^2}{2}-\dfrac{a_{n-2}^2}{2}\right|=\dfrac{1}{2}(a_{n-1}+a_{n-2})|a_{n-1}-a_{n-2}|<r|a_{n-1}-a_{n-2}|$.

由压缩映像法,数列$\{a_n\}$收敛.

例 2 设$a>0,x_0>0,x_n=\dfrac{x_{n-1}(x_{n-1}^2+3a)}{3x_{n-1}^2+a}$. 证明数列$\{x_n\}$收敛.

证明 令$f(x)=\dfrac{x(x^2+3a)}{3x^2+a}$,则$x_n=f(x_{n-1})$,$0<f'(x)=\dfrac{(x^2-a)^2}{3\left(x^2+\dfrac{a}{3}\right)^2}<\dfrac{1}{3}$.

由压缩映像法,数列$\{x_n\}$收敛.