高等学校教材

METHODS OF MATHEMATICAL PHYSICS

《数学物理方法》习题解析

高春霞 王培光 编著

中国计量出版社
CHINA METROLOGY PUBLISHING HOUSE

高等学校教材

《数学物理方法》习题解析

高春霞　王培光　编著

中国计量出版社

图书在版编目（CIP）数据

《数学物理方法》习题解析/高春霞，王培光编著．—北京：中国计量出版社，2009.8
高等学校教材
ISBN 978-7-5026-3125-3

Ⅰ．数… Ⅱ．①高…②王… Ⅲ．数学物理方法—解题 Ⅳ．O411.1-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 144338 号

内 容 提 要

本书是《数学物理方法》课程的教学辅导与学习参考书．全书包括复变函数、积分变换和数学物理方程三大部分内容，共 12 章，每章都有内容概要，同时重点进行了习题解析．

本书适合作为高等院校电气信息类、物理类各本科专业的参考工具书，也可供相关专业的本科生、研究生、教师和工程技术人员等参考．

中国计量出版社出版
北京和平里西街甲 2 号
邮政编码 100013
电话（010）64275360
http：//www.zgjl.com.cn
三河市灵山红旗印刷厂
新华书店北京发行所发行

*
787 mm×1092 mm 16 开本 印张 8.5 字数 203 千字
2009 年 8 月第 1 版 2009 年 8 月第 1 次印刷
*
印数 1—2 000 **定价：** 16.00 元

前　言

《数学物理方法》是高等学校物理学、电子学等专业的一门重要的基础数学课程，它为进行下一步的专业课程学习提供了非常重要的数学处理方法和工具．为了帮助读者熟练掌握该课程的理论和方法，增强分析问题和解决问题的能力，我们在编写了《数学物理方法》教材的基础上，又组织编写了这本参考书．

本书包括复变函数、积分变换和数学物理方程三大部分内容，共分12章，每章都有内容概要，并重点进行了习题解析．其中，内容概要给出了各章的基本概念、重要定理和主要方法；习题解析主要对《数学物理方法》（王培光等．中国计量出版社，2007）教材中的习题做了比较详细的解答．本书结构完整，既可与配套教材一起使用，也可单独使用．

本书编写过程中得到了河北大学电子信息工程学院以及中国计量出版社的大力支持，在此表示深深的感谢．

由于编者水平有限，书中难免出现不妥及疏漏之处，恳请专家和读者不吝赐教．

编　者

2009.8

目　　录

第 1 篇　复变函数

第 2 篇　积分变换

第 3 篇　数学物理方程

第 1 篇　复 变 函 数

第 1 章　复数与复变函数

内 容 概 要

1.1　复数的概念及其表示方法

1.1.1　复数的概念

设 x，y 为任意实数，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ 为虚数单位，称形如 $x+\mathrm{i}y$ 的数为**复数**，记作 $z=x+\mathrm{i}y$. 其中 x 和 y 分别称为复数 z 的**实部**和**虚部**，记作

$$x=\mathrm{Re}(z)\text{，}y=\mathrm{Im}(z)\ . \tag{1.1.1}$$

特别地，当 $x=0$，$y\neq0$ 时，$z=\mathrm{i}y$ 为纯虚数；当 $y=0$ 时，$z=x$ 为实数.

复数 $x-\mathrm{i}y$ 称为 $z=x+\mathrm{i}y$ 的**共轭复数**，记作 z^* 或 $\bar{z}$. 显然，$(z^*)^*=z$.

需要注意的是，复数是无序的，一般不能比较大小，只能说复数相等与否. 两个复数相等当且仅当它们的实部和虚部分别相等，即

$$x_1+\mathrm{i}y_1=x_2+\mathrm{i}y_2 \Longleftrightarrow x_1=x_2,y_1=y_2\ . \tag{1.1.2}$$

特别地，有

$$z=0 \Longleftrightarrow x=0,y=0\ . \tag{1.1.3}$$

1.1.2　复数的表示方法

1. 代数表示　复数的定义形式 $z=x+\mathrm{i}y$ 称为复数的代数形式.

2. 几何表示　在几何上，我们可以通过平面上的点或向量来表示复数.

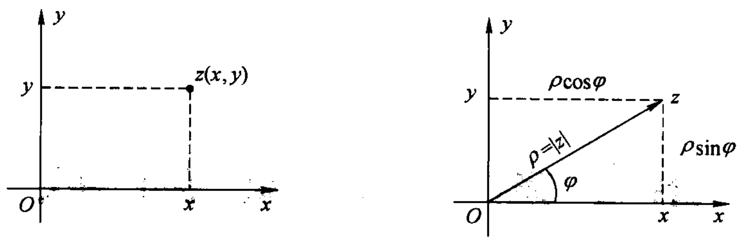
(1) 点表示　一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 在本质上是由一个有序实数对 (x,y) 所惟一确定的，这样，复数的全体便与坐标平面 xOy 上点的全体形成了一一对应

$$\text{复数 } z=x+\mathrm{i}y \longleftrightarrow xOy \text{ 平面上的点 } z(x,y).$$

因此，我们可以用横坐标为 x，纵坐标为 y 的点来表示复数 $z=x+\mathrm{i}y$，如图 1.1.1 (a) 所示. 这种用来表示复数的 xOy 平面称为**复平面**，记作 C，x 轴称为**实轴**，y 轴称为**虚轴**.

(2) 向量表示　对于复平面上的任意一点 z，它总是惟一地确定一个从原点出发并指向该点的向量 $\overrightarrow{oz}$，从而复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 与向量 $\overrightarrow{oz}$ 也形成了一一对应关系

$$\text{复数 } z=x+\mathrm{i}y \longleftrightarrow \text{向量 } \overrightarrow{oz}\ .$$



(a) 复数的点表示　　(b) 复数的向量表示

图 1.1.1　复数的几何表示

因此，我们也可以用向量$\overrightarrow{oz}$来表示复数$z=x+\mathrm{i}y$，如图 1.1.1（b）所示．其中向量$\overrightarrow{oz}$的长度ρ称为复数z的**模**，记作$|z|$．当$z\neq 0$时，向量$\overrightarrow{oz}$与实轴正向之间的夹角φ称为复数z的**辐角**，记作 $\mathrm{Arg}z$．由图 1.1.1（b），易知

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2},\ |x|\leqslant|z|,\ |y|\leqslant|z|,\ |z|\leqslant|x|+|y|. \tag{1.1.4}$$

$$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ \tan\varphi=\frac{y}{x}. \tag{1.1.5}$$

需要指出的是，由于两个向量之间的夹角有无穷多个，而且任意两个夹角之间相差2π的整数倍，所以任何一个非零复数有无穷多个辐角，我们将满足$-\pi<\mathrm{Arg}z\leqslant\pi$（或者$0\leqslant\mathrm{Arg}z<2\pi$）的辐角称为 $\mathrm{Arg}z$ 的主值或z的**主辐角**，记作 $\arg z$．于是，复数z的辐角全体可表示为

$$\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots). \tag{1.1.6}$$

注　当$z=0$时，z的模为零而辐角无意义．

3．三角表示　利用直角坐标与极坐标的关系

$$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$$

可以把非零复数$z=x+\mathrm{i}y$表示成三角形式

$$z=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)=|z|[\cos(\mathrm{Arg}z)+\mathrm{i}\sin(\mathrm{Arg}z)]. \tag{1.1.7}$$

4．指数表示　利用 Euler 公式$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}=\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi$，可将$z=x+\mathrm{i}y$表示成指数形式

$$z=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}=|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{Arg}z}. \tag{1.1.8}$$

注　在复数的乘、除、乘方、开方运算中，往往运用三角形式和指数形式计算比较简便．

1.2　复数的基本代数运算

1.2.1　复数的四则运算

1．设$z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$为两个任意复数，z_1与z_2的四则运算为：

加（减）法
$$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2); \tag{1.2.1}$$

乘法
$$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1); \tag{1.2.2}$$

除法
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\quad(z_2\neq0). \tag{1.2.3}$$

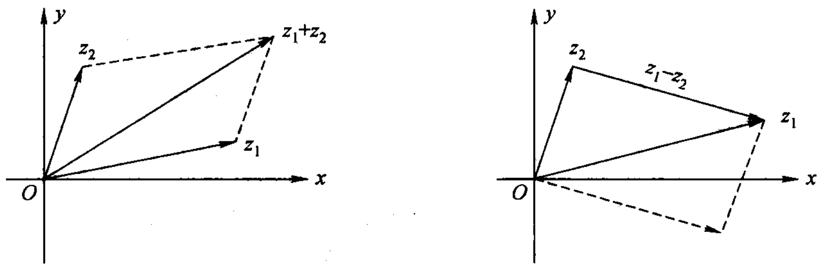
显然，复数的加法和乘法满足交换律、结合律和分配律．

结合共轭复数的定义，很容易得到共轭复数的下列运算性质：

$$\overline{z_1 \pm z_2}=\overline{z_1} \pm \overline{z_2},\ \overline{z_1 z_2}=\overline{z_1}\ \overline{z_2},\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}},\ z+\bar{z}=2\mathrm{Re}(z),$$

$$z-\bar{z}=2\mathrm{i}\mathrm{Im}(z),\ z\bar{z}=\mathrm{Re}^2(z)+\mathrm{Im}^2(z). \tag{1.2.4}$$

2. 四则运算的几何意义　设 z_1，z_2 为两个复数，z_1 与 z_2 的加、减法满足向量运算的平行四边形法则，如图 1.2.1 所示．



(a) 向量的加法　　(b) 向量的减法

图 1.2.1　平行四边形法则

由向量相加减的几何性质，很容易得到复数的和与差满足下列不等式：

$$|z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|, \tag{1.2.5}$$

$$|z_1 \pm z_2| \geqslant \big||z_1|-|z_2|\big|. \tag{1.2.6}$$

对于复数的乘除运算，不妨设

$$z_1=\rho_1(\cos\varphi_1+\mathrm{i}\sin\varphi_1)=\rho_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1},\ z_2=\rho_2(\cos\varphi_2+\mathrm{i}\sin\varphi_2)=\rho_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}.$$

则

$$z_1 z_2=\rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+\mathrm{i}\sin(\varphi_1+\varphi_2)]=\rho_1\rho_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)}, \tag{1.2.7}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+\mathrm{i}\sin(\varphi_1-\varphi_2)]=\frac{\rho_1}{\rho_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1-\varphi_2)}\quad (z_2\neq 0). \tag{1.2.8}$$

在几何上，$z_1 z_2$ 相当于将 z_1 的模扩大 $|z_2|$ 倍并旋转一个角度 $\mathrm{Arg}z_2$；$\dfrac{z_1}{z_2}$ 相当于将 z_1 的模缩小 $|z_2|$ 倍并反向旋转一个角度 $\mathrm{Arg}z_2$.

1.2.2　复数的乘幂与方根

1. 乘幂　复数 z 的 n 次乘幂为

$$z^n=\rho^n(\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi)=\rho^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}\quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots). \tag{1.2.9}$$

2. 方根　称满足方程 $w^n=z$（n 为正整数）的复数 w 为 z 的 n 次方根，记作 $\sqrt[n]{z}$.

$$w=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\arg z+2k\pi}{n}\right)=\sqrt[n]{|z|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\arg z+2k\pi}{n}}\quad (k=0,1,2,\cdots,n-1). \tag{1.2.10}$$

注　任何一个非零复数 z 的 n 次方根有 n 个不同的值．

1.3　复球面与无穷远点

关于无穷远点，可作如下理解：将一个球放在复平面上，并使该球以南极 S 与复平面相

切于原点．对于复平面内任意一点 z，用一条直线将 z 与球的北极 N 相连，交球面于点 P，如图 1.3.1 所示，这样，复平面上的有限远点便与球面上除 N 之外的点形成了一一对应，即

$$\text{复平面上的所有有限远点} \longleftrightarrow \text{球面上除 N 之外的点}.$$

我们称这种对应关系为**测地投影**．

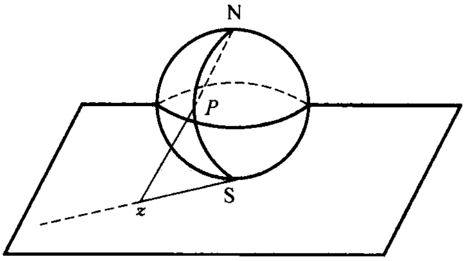


图 1.3.1 测地投影

当复平面上的点 z 的模越来越大时，它在球面上的测地投影越来越接近于北极 N，而球面上只有一个北极 N. 因此，我们约定复平面上有一个理想的点，称为**无穷远点**，记作∞，它与球面上的北极 N 通过测地投影一一对应，即

$$\text{复平面上的无穷远点}\infty \longleftrightarrow \text{球面上的点 N}.$$

我们称这样的球面为**复球面**．因此，复数不仅可以用复平面上的点来表示，也可以用复球面上的点来表示．

对于无穷远点，还可以用变换（或映射）的语言来定义．例如，变换 $w=1/z$ 就建立了复数 z 和复数 w 之间的一一对应关系．复数 $z=0$ 对应于 $w=\infty$，而 $z=\infty$对应于 $w=0$．

1.4 复变函数

1.4.1 区域的相关概念

1. 邻域　复平面上以点 z_0 为圆心，以任意小正实数 ε 为半径的圆的内部所有点构成的集合 $|z-z_0|<\varepsilon$ 称为点 z_0 的 ε **邻域**．由不等式 $0<|z-z_0|<\varepsilon$ 所确定的点集称为点 z_0 的**去心邻域**．

2. 内点　对于平面点集 E，若点 z_0 及其邻域均属于 E，则称点 z_0 为 E 的**内点**．

3. 外点　若 z_0 及其邻域均不属于 E，则称点 z_0 为 E 的**外点**．

4. 边界　若点 z_0 的任意一个邻域内既有属于点集 E 的点，又有不属于 E 的点，则称 z_0 为 E 的**边界点**．E 的所有边界点组成的集合称为 E 的**边界**，记作 ∂E.

5. 开集　若点集 E 的每个点都是内点，则称 E 为**开集**．

6. 区域　区域是指满足下列两个条件的点集：

（1）全部由内点组成（开集）；

（2）具有连通性，即点集内任意两点都可以用一条折线连接起来，而且折线上的点全都属于该点集．

区域可用符号 D 来表示．

7. 闭区域　区域 D 及其边界所组成的点集称为**闭区域**，记作 $\overline{D}$.

区域的相关概念如图 1.4.1 所示．

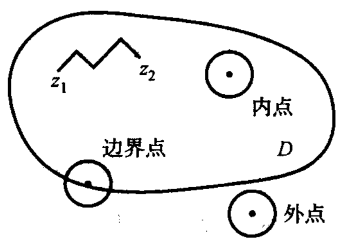


图 1.4.1 区域的相关概念

例 1.4.1 $|z-z_0|<r$ 表示圆形域，$|z-z_0|\leqslant r$ 表示闭圆域；

$a<|z-z_0|<b$ 表示环形域，$a\leqslant|z-z_0|\leqslant b$ 表示闭环域．

8. 简单曲线（Jordan 曲线） 设曲线 $C: z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)$，$a\leqslant t\leqslant b$，若对于 a，b 之间的 t_1，t_2，当 $t_1\neq t_2$ 时，有 $z(t_1)=z(t_2)$，则称点 $z(t_1)$ 为曲线 C 的**重点**．称没有重点的连续曲线 C 为**简单曲线**．

9. 简单闭曲线 若简单曲线 C 的两个端点重合，则称 C 为**简单闭曲线**．

10. 单通区域 对于复平面上的区域 D，若在其中任作一条简单闭曲线，曲线的内部总属于 D，则称 D 为**单连通区域**，简称**单通区域**．

11. 复通区域 一个区域不是单通区域，则为**复通区域**（或**多通区域**）．对于复通区域，我们总可以通过作一些适当的割线将复通区域不相连的边界连接起来，从而使复通区域单连通化．

区域边界的正方向 通常约定：（当人）沿边界环行时，若包围的区域始终在人的左手边，则前进方向为边界的正方向．

对于有界的单通区域，逆时针方向即为正方向，而复通区域的外边界逆时针方向为正方向，内边界顺时针方向为正方向，如图 1.4.2 所示．

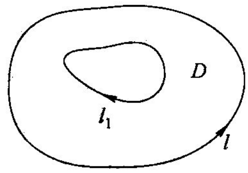


图 1.4.2 区域边界的正方向

1.4.2 复变函数的概念

1. 设 E 为平面点集（复数集），若对于 E 中的每一个点（复数）$z=x+\mathrm{i}y$，按照一定的法则 f，总有一个或多个复数 $w=u+\mathrm{i}v$ 与之对应，则称复变量 w 为复数 z 的**复变函数**，记作 $w=f(z)$，其中 E 称为函数 $f(z)$ 的**定义域**，z 为**自变量**，w 为**因变量**．

2. 若对应 z 的 w 是惟一的，则称函数 $w=f(z)$ 是**单值函数**；若对应 z 的 w 有两个或两个以上，则称函数 $w=f(z)$ 是**多值函数**．例如：$f(z)=z^n=\rho^n(\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi)$ 为单值函数；$f(z)=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\dfrac{\varphi}{n}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\varphi}{n}\right)$（其中，$n$ 为正整数）为 n 值函数；$f(z)=\mathrm{Arg}z$ 为无穷多值函数．

3. 由于复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 总可以由实部 x 和虚部 y 来表示，因此，复变函数

$$w=f(z)=u+\mathrm{i}v=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$$

可以由两个二元实函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 表示．这样，一个复变函数总是对应着一对二元实函数，从而关于复变函数的讨论总可以转化为关于实变函数的讨论，而且实变函数的许多定义、性质和定理也都可以直接推广到复变函数．

1.4.3 复变函数的几何意义

函数 $w=f(z)$ 在几何上可以看做是把 z 平面上的点集 E 变到 w 平面上的点集 G 的映射或变换．若 E 中的点 z 被映射 $w=f(z)$ 映射成 G 中的点 w，则称 w 为 z 的**像**，而 z 称为 w 的**原像**，如图 1.4.3 所示．

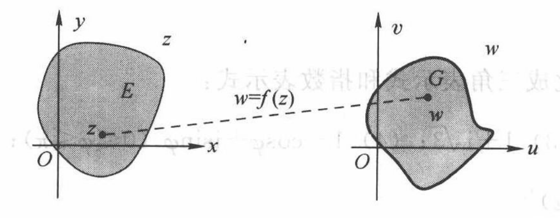


图 1.4.3 映射

1.5 复变函数的极限与连续

1.5.1 复变函数的极限

1. 设函数 $w=f(z)$ 在点 z_0 的去心邻域 $0<|z-z_0|<\rho$ 内有定义，若存在复数 A，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总能找到 $\delta(\varepsilon)>0$，使得当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(z)-A|<\varepsilon$ 成立，则称 A 为 $f(z)$ 当 z 趋于 z_0 时的极限，记作

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=A \quad \text{或} \quad \text{当 } z\to z_0 \text{ 时，} f(z)\to A. \tag{1.5.1}$$

注 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$ 意味着不论 z 从什么方向、以何种方式趋于 z_0，$f(z)$ 都趋于同一个常数 A，这比一元实函数极限的定义要严格的多.

2. 关于极限的基本定理 设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，$z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$，$A=u_0+\mathrm{i}v_0$ 为一复数，则 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}u(x,y)=u_0$ 和 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}v(x,y)=v_0$ 成立.

3. 关于极限的计算 若 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$，$\lim\limits_{z\to z_0}g(z)=B$，则

$$\lim_{z\to z_0}f(z)\pm g(z)=A\pm B,\quad \lim_{z\to z_0}f(z)g(z)=AB,\quad \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{A}{B}\ (B\neq 0).$$

1.5.2 复变函数的连续性

1. 设 z_0 是复变函数 $w=f(z)$ 的定义域中的一点，若 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$，则称 $f(z)$ 在点 z_0 **连续**. 若 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续，则称 $f(z)$ 在 D 内连续.

2. 关于连续性的基本定理 函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在点 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 连续的充要条件是 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在点 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 处连续，即

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)\Longleftrightarrow\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}u(x,y)=u(x_0,y_0),\\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}v(x,y)=v(x_0,y_0).\end{cases}$$

3. 连续函数的性质

性质 1 若 $f(z)$和 $g(z)$ 在点 z_0 连续，则它们的和、差、积、商（分母在 z_0 不为零）也在点 z_0 连续.

性质 2 连续函数的复合函数仍连续.

习 题 解 析

1.1 将下列复数化成三角表示式和指数表示式：

(1) i；(2) -1；(3) $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$；(4) $1-\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi$ $(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$；(5) $\dfrac{2\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}}$；

(6) $\dfrac{(\cos5\varphi+\mathrm{i}\sin5\varphi)^2}{(\cos3\varphi-\mathrm{i}\sin3\varphi)^3}$.

解 (1) $\mathrm{i}=\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.

(2) $-1=\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$.

(3) $1+\mathrm{i}\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

(4) $$1-\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi=2\sin^2\frac{\varphi}{2}+\mathrm{i}2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}=2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\sin\frac{\varphi}{2}+\mathrm{i}\cos\frac{\varphi}{2}\right)$$
$$=2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\pi-\varphi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi-\varphi}{2}\right)=2\sin\frac{\varphi}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi-\varphi}{2}}\quad(0\leqslant\varphi\leqslant\pi).$$

(5) $$\frac{2\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}}=\frac{2\mathrm{i}(-1-\mathrm{i})}{(-1+\mathrm{i})(-1-\mathrm{i})}=1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}.$$

(6) 利用棣摩弗公式及复数的除法运算法则，有
$$\frac{(\cos5\varphi+\mathrm{i}\sin5\varphi)^2}{(\cos3\varphi-\mathrm{i}\sin3\varphi)^3}=\frac{\cos10\varphi+\mathrm{i}\sin10\varphi}{\cos(-9\varphi)+\mathrm{i}\sin(-9\varphi)}=\cos19\varphi+\mathrm{i}\sin19\varphi=\mathrm{e}^{\mathrm{i}19\varphi}.$$

1.2 求下列复数的实部、虚部、模与辐角主值（规定 $-\pi<\arg z\leqslant\pi$）：

(1) $1-\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha\ (0\leqslant\alpha\leqslant\pi)$；(2) $(\sqrt{3}+\mathrm{i})^{-3}$；(3) $\sqrt[3]{\mathrm{i}}$；(4) $\dfrac{2\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}}$.

解 (1) 令 $z=1-\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha$，则 $\mathrm{Re}(z)=1-\cos\alpha$，$\mathrm{Im}(z)=\sin\alpha$，$|z|=\sqrt{(1-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}=2\sin\frac{\alpha}{2}\ (0\leqslant\alpha\leqslant\pi)$，$\tan\varphi=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\cot\frac{\alpha}{2}$，又因为 $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$，$-\pi<\arg z\leqslant\pi$，所以 $\arg z=\frac{1}{2}(\pi-\alpha)$.

(2) 首先将 $z=\sqrt{3}+\mathrm{i}$ 转化为指数形式．由于 $|z|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$，$\arg z=\frac{\pi}{6}$，所以
$$w=(\sqrt{3}+\mathrm{i})^{-3}=\left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^{-3}=\frac{1}{8}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}=-\frac{\mathrm{i}}{8}.$$
因此，$\mathrm{Re}(w)=0$，$\mathrm{Im}(w)=-\frac{1}{8}$，$|w|=\frac{1}{8}$，$\arg w=-\frac{\pi}{2}$.

(3) 因为 $\mathrm{i}=1\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)},k=0,\pm1,\pm2,\cdots$. 所以
$$z=\sqrt[3]{\mathrm{i}}=1\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}}=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right),k=0,1,2.$$
因此，无论 k 为何值，$|z|=1$ 恒成立，而

当 $k=0$ 时，$\mathrm{Re}(z)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\mathrm{Im}(z)=\frac{1}{2}$，$\arg z=\frac{\pi}{6}$；

当 $k=1$ 时，$\mathrm{Re}(z)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\mathrm{Im}(z)=\frac{1}{2}$，$\arg z=\frac{5\pi}{6}$；

当 $k=2$ 时，$\mathrm{Re}(z)=0$，$\mathrm{Im}(z)=-1$，$\arg z=-\frac{\pi}{2}$.

(4) 因为 $z=\dfrac{2\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}}=1-\mathrm{i}$，所以 $\mathrm{Re}(z)=1$，$\mathrm{Im}(z)=-1$，$|z|=\sqrt{2}$，$\arg z=-\dfrac{\pi}{4}$.

1.3 下列各式分别表示复平面上哪些集合？并作图 .

(1) $|z-\alpha|\leqslant r$；(2) $|z-\alpha|+|z+\bar{\alpha}|\leqslant|\alpha-\bar{\alpha}|$，其中 $|\alpha-\bar{\alpha}|>|\alpha+\bar{\alpha}|>0$；(3) $\mathrm{Re}^2(z)\leqslant 1$.

解 (1) $|z-\alpha|\leqslant r$ 表示以点 α 为圆心，以 r 为半径的圆及其内部 . 如图 1.1 所示 .

(2) 设 $z=x+\mathrm{i}y$，$\alpha=a+\mathrm{i}b$，则

$$|z-\alpha|=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2},\ |z+\bar{\alpha}|=\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2},$$

$$|\alpha-\bar{\alpha}|=2|b|,\ |\alpha+\bar{\alpha}|=2|a| \quad (a,b\neq 0).$$

于是，原不等式转化为

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}+\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2}\leqslant 2|b|,$$

整理，得 $(b^2-a^2)x^2+b^2(y-b)^2\leqslant b^2(b^2-a^2)$，即

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{(y-b)^2}{(b^2-a^2)}\leqslant 1 \quad (b^2-a^2>0).$$

它表示以 α 和 $-\bar{\alpha}$ 为焦点的椭圆及其内部，如图 1.2 所示 .

(3) 因为 $z^2=(x+\mathrm{i}y)^2=x^2-y^2+2xy\mathrm{i}$，$\mathrm{Re}^2(z)=x^2-y^2$，所以 $\mathrm{Re}^2(z)\leqslant 1$ 即为 $x^2-y^2\leqslant 1$，它表示双曲线 $x^2-y^2=1$ 及其之间部分 . 如图 1.3 所示 .

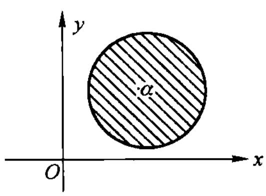


图 1.1

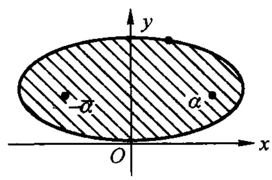


图 1.2

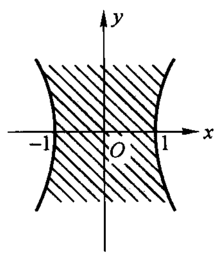


图 1.3

1.4 指出不等式 $0<\arg\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}<\dfrac{\pi}{4}$ 中点 z 轨迹的所在范围，并作图 .

解 设 $z=x+\mathrm{i}y$，则 $\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}=\dfrac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}+\mathrm{i}\dfrac{-2x}{x^2+(y+1)^2}$.

因为 $0<\arg\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}<\dfrac{\pi}{4}$，所以

$$\begin{cases} 0<\dfrac{-2x}{x^2+y^2-1}<1, \\ x^2+y^2-1>0, \\ -2x>0 . \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x<0, \\ x^2+y^2>1, \\ (x+1)^2+y^2>2. \end{cases}$$

它表示 y 轴左侧且在圆 $(x+1)^2+y^2=2$ 的外部所有点的集合，如图 1.4 所示．

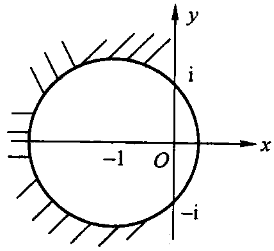


图 1.4

1.5 如果复数 z_1，z_2，z_3 满足等式 $\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$，证明：$|z_2-z_1|=|z_3-z_1|=|z_2-z_3|$，并说明这些等式的几何意义．

证明 由已知等式可得

$$\left|\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right|=\left|\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\right| \Longrightarrow |z_1-z_3|^2=|z_2-z_1|\cdot|z_2-z_3|. \qquad ①$$

再由

$$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}-1=\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}-1 \Longrightarrow \frac{z_2-z_3}{z_3-z_1}=\frac{z_1-z_2}{z_2-z_3} \Longrightarrow \left|\frac{z_2-z_3}{z_3-z_1}\right|=\left|\frac{z_1-z_2}{z_2-z_3}\right|$$

$$\Longrightarrow |z_2-z_3|^2=|z_1-z_2|\cdot|z_3-z_1|. \qquad ②$$

将以上两式相除得 $|z_1-z_3|^3=|z_2-z_3|^3$，于是 $|z_1-z_3|=|z_2-z_3|$．再结合②式，得 $|z_1-z_2|=|z_2-z_3|$，从而 $|z_2-z_1|=|z_3-z_1|=|z_2-z_3|$．这说明，当复数 z_1,z_2,z_3 满足等式 $\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$ 时，以 z_1,z_2,z_3 为顶点的三角形为等边三角形．

1.6 求下列各式的值：

(1) $(\sqrt{3}-\mathrm{i})^5$；(2) $\sqrt[3]{1-\mathrm{i}}$；(3) $\sqrt[6]{-1}$；(4) i^{i}.

解 (1) $(\sqrt{3}-\mathrm{i})^5=2^5\left(\cos\dfrac{11}{6}\pi+\mathrm{i}\sin\dfrac{11}{6}\pi\right)^5$，

或$=2^5\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right]^5=32\cos\dfrac{5\pi}{6}-\mathrm{i}\sin\dfrac{5\pi}{6}=-16\sqrt{3}-16\mathrm{i}$.

(2) 因为 $1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7}{4}\pi+\mathrm{i}\sin\dfrac{7}{4}\pi\right)$，所以

$$\sqrt[3]{1-\mathrm{i}}=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{7}{4}\pi+2k\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\frac{7}{4}\pi+2k\pi}{3}\right),$$

$$\text{或}=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{-\frac{1}{4}\pi+2k\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{-\frac{1}{4}\pi+2k\pi}{3}\right) \quad (k=0,1,2).$$

即 $\sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}-\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$，$\sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\dfrac{7\pi}{12}\right)$，$\sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)$.

(3) $\sqrt[6]{-1}=\cos\dfrac{\pi+2k\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi+2k\pi}{6}$，$(k=0,1,2,3,4,5)$，即

$$\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2},\ \cos\frac{3\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{6}=\mathrm{i},\ \cos\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2},$$

$$\cos\frac{7\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2},\ \cos\frac{3\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}=-\mathrm{i},\ \cos\frac{11\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2}.$$

(4) $\mathrm{i}^{\mathrm{i}}=\left[e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}\right]^{\mathrm{i}}=e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

1.7 画出下列关系所表示的点 z 的轨迹并确定它是不是区域：

(1) $\mathrm{Re}(z)>1$；(2) $1<|z-2\mathrm{i}|<2$；(3) $\dfrac{\pi}{4}\leqslant\arg z\leqslant\dfrac{3\pi}{4}$；

(4) $0<\arg(z-1)<\dfrac{\pi}{4}$，且 $2\leqslant\mathrm{Re}(z)\leqslant3$.

解 (1) 表示以直线 $\mathrm{Re}(z)=x=1$ 为边界的右半平面，如图 1.5 所示，它是单连通区域.

(2) 表示以 2i 为中心，分别以 1 和 2 为半径的圆之间的部分，如图 1.6 所示，它是复连通区域.

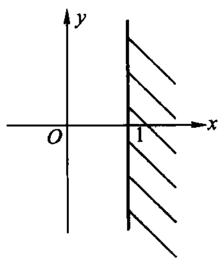


图 1.5

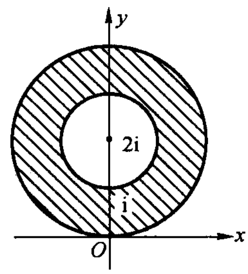


图 1.6

(3) 表示以从原点引出的两条射线 $\arg z=\dfrac{\pi}{4}$ 和 $\arg z=\dfrac{3\pi}{4}$ 为边界构成的无界闭角域，如图 1.7 所示，它不是区域，因为射线上的点不是内点.

(4) 令 $w=z-1=(x-1)+\mathrm{i}y$，因为 $0<\arg w<\dfrac{\pi}{4}$，所以 $0<\dfrac{y}{x-1}<1$，又由于 $y>0$，$x-1>0$，所以 $0<y<x-1$ 且 $x>1$.

又根据题设 $2\leqslant\mathrm{Re}(z)\leqslant3$，可知原题表示以直线 $\mathrm{Re}(z)=2$ 和 $\mathrm{Re}(z)=3$ 为底，实轴 $y=0$ 和直线 $y=x-1$ 为腰的梯形内部及上、下底，如图 1.8 所示，它不是区域.

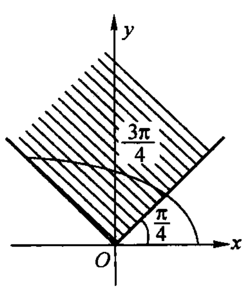


图 1.7

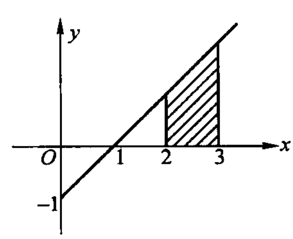


图 1.8

1.8 设 $f(z)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^2+y^6}, & z\neq 0,\\ 0, & z=0.\end{cases}$ 求证：$f(z)$ 在原点处不连续．

证明 由于 $\lim\limits_{\substack{z\to 0\\ y=x}}f(z)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4}{x^2+x^6}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1+x^4}=0$，$\lim\limits_{\substack{z\to 0\\ x=y^3}}f(z)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y^6}{y^6+y^6}=\dfrac{1}{2}$，于是，极限 $\lim\limits_{z\to 0}f(z)$ 不存在，从而 $f(z)$ 在原点处不连续．

1.9 如果 $f(z)$ 在点 z_0 处连续，证明：$\overline{f(z)}$，$|f(z)|$ 也在点 z_0 处连续．

证明 设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，$z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$，由 $f(z)$ 在点 z_0 连续可知二元实函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续，从而 $u(x,y)$ 和 $-v(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续，于是 $\overline{f(z)}=u(x,y)-\mathrm{i}v(x,y)$ 在点 z_0 处连续．

又 $|f(z)|=\sqrt{u^2(x,y)+v^2(x,y)}$，根据幂函数及复合函数的连续性，知 $|f(z)|$ 也在点 z_0 处连续．

1.10 如果 $f(z)$ 在点 z_0 处连续，且 $f(z_0)\neq 0$，证明：存在 z_0 的邻域使 $f(z)\neq 0$．

证明 由于 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$，且 $f(z_0)\neq 0$，不妨取 $\varepsilon=\dfrac{|f(z_0)|}{2}>0$，则 $\exists\,\delta>0$，使得当 $|z-z_0|<\delta$ 时，有 $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon=\dfrac{|f(z_0)|}{2}$，从而 $|f(z_0)|-\dfrac{|f(z_0)|}{2}<|f(z)|$，即 $|f(z)|>\dfrac{|f(z_0)|}{2}>0$. 因此，当 $z\in O(z_0,\delta)$ 时，$f(z)\neq 0$．