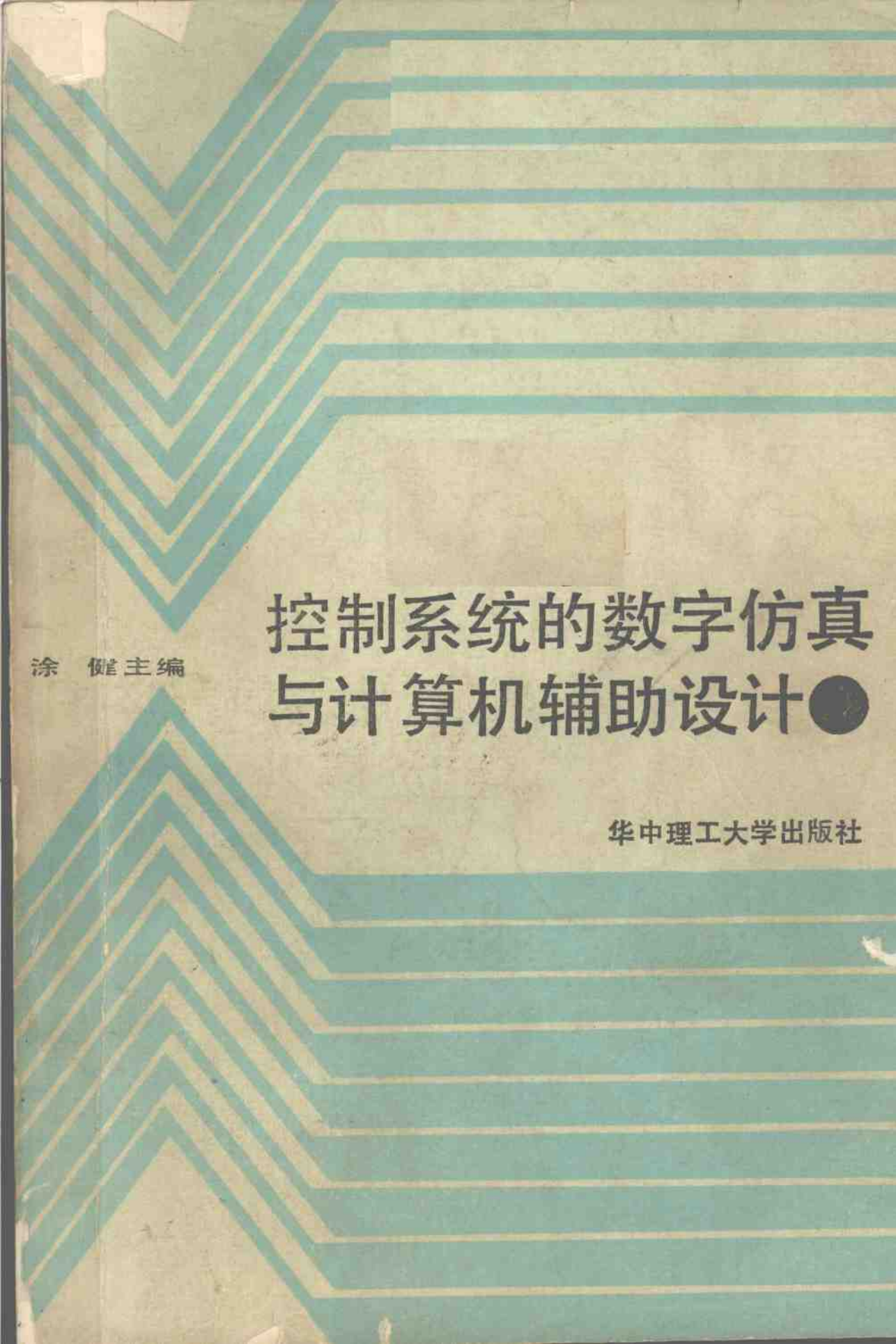




# 控制系统的数字仿真 与计算机辅助设计●

涂 健 主编

华中理工大学出版社

# 控制系统的数字仿真 与计算机辅助设计

主编 涂健 编者 罗宗度 陈贤威

华中理工大学出版社

# 控制系统的数字仿真与计算机辅助设计

涂健 罗宗度 陈贤威 韩瑞根

## 控制系统的数字仿真与计算机辅助设计

主编 涂 健 编者 罗宗度 陈贤威

责任编辑 韩瑞根

华中理工大学出版社出版发行

(武昌喻家山)

新华书店湖北发行所经销

华中理工大学出版社沔阳印刷厂印刷

开本: 787×1092毫米 1/16 印张: 22.5 字数: 579 000

1985年2月第1版

1989年2月第2次印刷

印数: 10 001—15 000

ISBN 7-5609-0376-2/TP·31

定价: 4.40元

华中理工大学出版社

## 前 言

控制系统的数字仿真是计算机应用的重要方面。它为控制系统的分析、研究、设计以及自动控制的教育和训练提供了快速而又经济的手段,并在这些领域里得到广泛应用。

控制系统计算机辅助设计是在系统仿真技术基础上于七十年代初发展起来的一门新技术。它包含控制系统分析、综合、设计、检验等各方面的计算机处理。使用这种技术,可以比常规设计短得多的时间得到最优设计方案。它是现代控制理论应用于工程实际的桥梁。

控制系统的数字仿真和计算机辅助设计是控制理论、计算数学和计算机科学三者有关方面的统一。它已成为自动控制学科的一个分支,并在自动控制技术的发展中起着重要的作用。

我院控制系统仿真的研究工作始于一九七八年,经过几年的工作,已建立了一套较为完整的仿真软件,可以基本解决自动控制教学、科研和工程设计所提出的仿真问题。随后又开展了控制系统计算机辅助设计方面的研究工作,并建立了一些设计程序。

从一九八一年起,我们为工业自动化专业本科学生开设了“控制系统的数字仿真”课程,随后又为自动化学科的研究生开设了“控制系统的数字仿真与计算机辅助设计”课程。本书是在上述科研和教学工作的基础上编写而成的。全书共分八章:第一章是绪论;第二到第四章是讲述控制系统数字仿真模型的建立、算法及其程序实现;第五章介绍了一种基于频率法的单变量系统控制器设计的算法及其程序实现;第六到第八章介绍了多变量系统几种常用的现代设计方法的设计原理、算法及部分程序实现。

本书各章具有独立性。除第一、六、七章外,其他各章均附有 BASIC 程序清单及程序使用说明。全部程序均在国产 DJS-130 机上通过。书中设有许多计算实例,它可以帮助我们了解程序的使用方法。只需了解使用的读者,参看各章附录及计算实例即可。

本书第三、四、六、八章由涂健同志编写,第一、二、七章由罗宗虔同志编写,第五章由陈贤威同志编写。在我们从事本项工作的过程中,自控计算机系系统仿真实验室的全体同志曾给予我们大力协助,在此特向他们表示感谢。

由于我们的水平有限,错误之处欢迎读者批评指正。

编 者

1983年12月

# 目 录

10.11下  
上机  
2+10+4=00

|                                |       |
|--------------------------------|-------|
| 第一章 绪论 .....                   | (1)   |
| § 1-1 仿真技术概况 .....             | (1)   |
| § 1-2 控制系统计算机辅助设计概况 .....      | (2)   |
| § 1-3 本书主要内容 .....             | (3)   |
| 本章参考文献 .....                   | (4)   |
| 第二章 面向传递函数和结构图的连续系统的数字仿真 ..... | (6)   |
| § 2-1 连续系统的数学模型 .....          | (6)   |
| § 2-2 实现问题 .....               | (8)   |
| § 2-3 常微分方程初值问题的数值解法 .....     | (17)  |
| § 2-4 面向传递函数的数字仿真 .....        | (24)  |
| § 2-5 面向系统结构图的数字仿真 .....       | (28)  |
| 本章参考文献 .....                   | (36)  |
| 附录2.1 面向传递函数数字仿真程序使用说明 .....   | (36)  |
| 附录2.2 线性系统结构图法仿真程序使用说明 .....   | (43)  |
| 第三章 连续系数按环节离散化的数字仿真 .....      | (55)  |
| § 3-1 连续系统的离散化 .....           | (55)  |
| § 3-2 典型环节的离散系数及其差分方程 .....    | (61)  |
| § 3-3 仿真系统的构成 .....            | (74)  |
| § 3-4 非线性系统的仿真 .....           | (76)  |
| § 3-5 应用举例 .....               | (81)  |
| § 3-6 关于仿真误差及数值稳定性问题 .....     | (91)  |
| 本章参考文献 .....                   | (93)  |
| 本章附录 程序说明及清单 .....             | (93)  |
| 第四章 采样控制系统的仿真与设计 .....         | (109) |
| § 4-1 采样控制系统的仿真(一) .....       | (110) |
| § 4-2 采样控制系统的仿真(二) .....       | (111) |
| § 4-3 采样控制系统的仿真(三) .....       | (118) |
| § 4-4 状态方程的离散化 .....           | (123) |
| § 4-5 采样控制系统的Z域设计法 .....       | (128) |
| § 4-6 采样控制系统的时域设计法 .....       | (140) |
| 本章参考文献 .....                   | (150) |
| 附录4.1 例4.2.2的计算程序 .....        | (150) |

|                                                                    |       |
|--------------------------------------------------------------------|-------|
| 附录4.2 采样控制系统和连续控制系统通用仿真程序 .....                                    | (152) |
| 附录4.3 状态方程离散化计算程序 .....                                            | (166) |
| <b>第五章 单输入-单输出系统的计算机辅助设计</b> .....                                 | (172) |
| § 5-1 基于频域法的串联校正原理 .....                                           | (172) |
| § 5-2 传递函数幅频特性和相频特性的计算 .....                                       | (173) |
| § 5-3 无源校正装置的设计 .....                                              | (181) |
| § 5-4 有源校正装置(调节器)的设计 .....                                         | (200) |
| 本章参考文献 .....                                                       | (219) |
| <b>第六章 多变量控制系统设计的逆乃氏阵列法</b> .....                                  | (220) |
| § 6-1 系统描述 .....                                                   | (221) |
| § 6-2 多项式矩阵的变换与标准形 .....                                           | (224) |
| § 6-3 最小阶系统及分解零点 .....                                             | (227) |
| § 6-4 传递函数阵的极点和零点 .....                                            | (233) |
| § 6-5 线性多变量系统的一般结构及基本关系式 .....                                     | (239) |
| § 6-6 系统的稳定性 .....                                                 | (240) |
| § 6-7 对角优势 .....                                                   | (245) |
| § 6-8 对角优势的实现 .....                                                | (255) |
| § 6-9 INA法设计步骤和CAD程序 .....                                         | (264) |
| 本章参考文献 .....                                                       | (267) |
| <b>第七章 多变量控制系统设计的极点配置法</b> .....                                   | (268) |
| § 7-1 前言 .....                                                     | (268) |
| § 7-2 单输入系统的极点配置 .....                                             | (269) |
| § 7-3 多变量系统极点配置的单秩法 .....                                          | (276) |
| § 7-4 多变量系统极点配置的双级单秩法 .....                                        | (281) |
| § 7-5 多变量系统极点配置的非限定秩法 .....                                        | (291) |
| § 7-6 多变量系统极点配置的满秩法 .....                                          | (296) |
| § 7-7 多变量系统的动态补偿器设计 .....                                          | (297) |
| § 7-8 多变量系统PID调节器的设计 .....                                         | (299) |
| 本章参考文献 .....                                                       | (303) |
| 附录7.1 确定超定方程 $M^T F^T = a - d$ 的相容条件 $\alpha a = \beta^T z$ .....  | (304) |
| 附录7.2 几个定理 .....                                                   | (305) |
| 附录7.3 $g(\lambda_1) = \text{Cadj}(\lambda_1 I - A)B$ 的秩为1的证明 ..... | (306) |
| 附录7.4 计算特征多项式系数的 Faddeev 算法 .....                                  | (306) |
| 附录7.5 用镜像映射法化矩阵为上Hessenberg阵 .....                                 | (307) |
| <b>第八章 线性定常二次型最优控制系统的计算机辅助设计</b> .....                             | (309) |
| § 8-1 线性定常二次型最佳调节器的基本性质 .....                                      | (309) |
| § 8-2 连续黎卡提代数方程的负指数解 .....                                         | (311) |

|                                  |       |
|----------------------------------|-------|
| § 8-3 连续黎卡提代数方程的求解 .....         | (315) |
| § 8-4 离散黎卡提代数方程的非递推解 .....       | (319) |
| § 8-5 求解黎卡提代数方程Schur向量法的实现 ..... | (322) |
| § 8-6 二次型最优控制系统计算机辅助设计程序 .....   | (330) |
| 本章参考文献 .....                     | (339) |
| 本章附录 线性二次型最优控制系统设计程序 .....       | (340) |

# 第一章 绪 论

## § 1-1 仿真技术概况

仿真 (Simulation) 的定义, 许多学者从不同的角度或范畴进行过描述<sup>(注1)</sup>, 但可概括为: 所谓仿真, 就是用模型 (物理模型或数学模型) 代替实际系统进行实验和研究。

仿真所遵循的基本原则是相似原理, 即几何相似、环境相似和性能相似。依据这个原理, 仿真可分为物理仿真和数学仿真 (即模拟计算机仿真和数字计算机仿真)。

所谓物理仿真, 就是应用几何相似原理, 制作一个与实际系统相似但几何尺寸较小的物理模型 (例如飞机模型放在气流场相似的风洞中) 进行实验研究。

所谓数学仿真, 就是应用性能相似原理, 构成数学模型在计算机上进行实验研究。

根据仿真使用的计算机的种类, 又可把仿真分为模拟计算机仿真, 数字计算机仿真和模拟/数字混合仿真。有时必须有部分实物介入, 则称为半物理仿真。

由于计算机仿真能够为许多实验提供方便、灵活的“活的数学模型”, 因此凡是可以用模型进行实验的, 几乎都可以用计算机仿真来研究被仿真系统本身的各种特性、选择最佳参数和设计最合理的系统方案。所以随着计算机技术的发展, 计算机仿真越来越多地取代纯物理仿真。尽管有时还必须有一部分实物介入计算机仿真系统, 但是仿真系统的主体是计算机。所以今后我们一讲到仿真, 主要是指有计算机参与的计算机仿真。

计算机仿真是一门综合性的新学科, 它的应用范围很广, 可用于工程系统、社会经济系统、生物系统等诸方面。在工业发达国家, 仿真技术已受到普遍的重视, 并得到了广泛的应用。在国际上成立了国际仿真联合会 (International Association for Mathematics and Computers in Simulation—IAMCS), 每年举行两次有关仿真技术的学术会议。

就控制系统的仿真而言, 它是一门涉及到控制理论、计算数学和计算机技术的综合性的学科。

计算机仿真技术的发展, 就硬件而言, 大致经历了如下几个历史阶段。

四十年代出现了模拟计算机, 这时的模拟计算机大都是用来设计飞机的专用计算机。五十年代初, 出现了通用的模拟计算机。

五十年代, 数字计算机有很大的发展, 加上这一时期在微分方程数值解的理论方面又有很大进展, 所以在几种高级语言 (如FORTRAN, ALGOL等) 出现以后, 在五十年代末期, 数字计算机便在非实时仿真方面开始得到广泛应用。

由于这时数字计算机在速度方面还不能满足高速动态系统仿真的要求, 所以在1958年出现了第一台专用的模拟/数字混合计算机, 它是用来解决导弹轨道的计算问题。六十年代初期, 出现了模拟/数字混合计算机的商品。

近年以来, 计算机技术又有飞速的发展, 数字计算机已有可能解决高速动态系统的实时仿真问题, 所以模拟/数字混合计算机将被数字机所取代。

注: (1)表示本章参考文献1。(以下同)。

在计算机硬件飞速发展的同时,仿真软件也有很大的发展。在国外,早在六十年代就出现了多种仿真语言。到目前为止,已形成了许多各具特色的仿真语言。常见的有:DSL, CSMP, CSSL, DARE—P等。

在仿真算法方面,求解微分方程初值问题的经典数值积分法,如龙格-库塔法和Adams方法,现在仍得到广泛应用。在控制系统的仿真中,由于仿真技术和控制理论相结合,又出现了以采样理论为基础的仿真算法,如Z变换法和状态转移法等。为了适应快速仿真的需要,随后又出现了许多快速仿真算法,诸如时域矩阵法,增广矩阵法,替换法,根匹配法和可调整的数值积分法等。从目前情况来看,在精度和效率两方面都满意的算法还很少。因此,发展一种又准又快的算法具有十分重要的意义。

仿真过程可以用图1-1的方框图来表示。



图1-1 仿真过程

**第一步 建立系统的数学模型。**对于某些系统,可以通过某些基本定律,如牛顿定律、克希霍夫定律等来建立数学模型。而对很多系统,由于系统的复杂性,则必须利用实验方法通过系统辨识技术来建立数学模型。数学模型是系统仿真的依据,所以,数学模型的准确性是十分重要的。

**第二步 建立仿真模型。**即通过一定的算法对原系统的数学模型进行离散化处理。就连续系统而言,就是建立相应的差分方程或一个离散化系统的方框图。

**第三步 编制仿真程序。**对于非实时仿真,可用一般高级语言或仿真语言。对于快速的实时仿真,则往往需要用汇编语言。

**第四步 进行仿真实验并输出仿真结果。**通过实验对仿真模型及程序进行校验和修改,然后按系统仿真的要求输出仿真结果。

在我国,从七十年代后期开始仿真技术有较大的发展。1979年,中国自动化学会成立了仿真技术专业委员会。现在,已有许多高等院校设置了仿真技术课程。随着我国计算机技术的发展,仿真技术必将有更大的发展和普及,并在我国四个现代化的建设中发挥更重要的作用。

## § 1-2 控制系统计算机辅助设计概况

控制系统计算机辅助设计(Control System Computer Aided Design)是70年代发展起来的一种新技术,简称CSCAD技术。它是利用计算机的高速运算、大容量存贮、惊人的信息加工等能力来帮助设计人员进行设计的一种技术。

CSCAD技术是在仿真技术的基础上发展起来的。最早见到的CSCAD软件包大部分是控制系统数字仿真的推广。例如,Thompson和Young将著名的MIMIC仿真语言和NASA分析程序改造成为EXATLAN的CSCAD软件包<sup>[6]</sup>。Chubb将IBM公司的CSMP/360仿真语言改造后用于控制系统的设计<sup>[6]</sup>。加拿大Alberta大学DACS(Data Acquisition Control and Simulation)中心在七十年代初期研制的一套CSCAD软件包——GEMCOPE(General Multipurpose Simulation and Control Package),其主线也是系统仿真程序<sup>[7]</sup>。

在这些早期的软件包中,系统的设计主要是用线性二次型最优控制理论来设计线性最优控制系统,它归结为求解黎卡提代数方程,或者利用古典的频率法、根轨迹法等来设计单变量系统的校正装置<sup>[8~10]</sup>。

在CSCAD技术的发展过程中,英国的Rosenbrock学派作出了很大贡献<sup>[11~13]</sup>。该学派成功地将古典频域法推广应用于线性多变量系统。在这个基础上,英国曼彻斯特大学(UMIST)的控制中心发展了一套比较完整的用于多变量系统设计的软件包<sup>[14~16]</sup>。Rosenbrock学派的成功引起了国际同行的普遍重视,并已在其他一些国家推广使用。

日本东京大学工学院古田胜久等人对CSCAD技术的发展也作出了出色的贡献。他们在七十年代末期建立了一个DPACS-F(Design Package for Control System-Developed by Furuta Lab)系统<sup>[17,18]</sup>。这个系统反映了七十年代末期CSCAD技术的国际水平。

近十年来,CSCAD技术已经发展得比较完善,形成了不少人机交互式的半自动化的CSCAD系统,这种系统主要由以下几部分构成:

- (1) 管理程序。它对CSCAD系统的硬、软件资源进行管理。
- (2) 信号处理和系统辨识程序。对测试数据进行处理,并建立系统的数学模型。
- (3) 模型分析与变换程序。它对系统模型的基本性能进行分析(如稳定性、能控性及能观性等),并根据设计方法的要求,对模型进行变换。
- (4) 系统设计程序。根据提出的性能指标设计系统的控制器。由于要求不同,应该提供几种方法供使用者选择。常用的设计方法有经典的频域法,状态空间法和现代频域法等。
- (5) 系统仿真程序。它对系统的动态响应进行计算。由于该序在判断设计的结果是否满足要求时需要多次使用,所以要求计算快速准确。

- (6) 输入/输出程序。实现数据、图象及指令的输入输出,实现人机信息交换。

发展CSCAD技术可以给我们带来如下的好处:

- (1) 能缩短设计周期,并便于进行最优化设计,从而提高设计质量。
- (2) 能减少设计定型实验,节约设计费用。
- (3) 能使先进的但设计计算复杂的控制理论应用于工程设计,它是现代控制理论应用于工程实际的桥梁。
- (4) 能促进控制理论及控制系统的教学,提高教学质量。
- (5) 能促进控制理论的发展。

## § 1-3 本书主要内容

本书主要内容分三部分:第一部分(第二至第四章)主要介绍控制系统的数字仿真;第二部分(第五章)介绍单变量控制系统的计算机辅助设计;第三部分(第六至第八章)主要介绍多变量系统的计算机辅助设计。各章主要内容如下:

第二章主要介绍连续系统的数学模型,常微分方程初值问题的数值解法,并以四阶龙格-库塔方法为基础,建立面向传递函数和结构图的通用仿真程序。

第三章是介绍连续系统按环节离散化的仿真。首先讨论了仿真模型建立的基本原理;随后详细地介绍了各种典型线性环节及非线性环节的数学模型,仿真系统的构成方法及应用举例;最后还讨论了该算法的数值稳定性问题。本章的仿真程序适用于线性及具有典型非线性环节系统的仿真。

第四章主要讨论采样控制系统的仿真。首先介绍了只需获得采样时刻响应的仿真方法。随后,较详细地讨论了能得到采样时刻之间响应的算法(广义 $Z$ 变换法和对象按环节离散化的算法)及其程序实现。此外还介绍了状态方程离散化的一种算法和程序以及采样控制系统的 $Z$ 域和时域设计方法。

第五章主要介绍基于频率法的单输入-单输出系统的计算机辅助设计。根据频域性能指标确定控制器的结构和参数,然后对已校正的控制系统进行仿真。另外,还附有适用于无源校正装置和有源调节器的设计程序。

第六章是介绍多变量系统的逆乃氏阵列(简称INA)设计法。本章共有九节,前四节对本设计方法所涉及的一些基本理论作了简要的介绍。这些基本理论和知识实际上也是所有现代频域设计法的理论基础。后五节是介绍INA设计法的基本原理及其实现方法,其中较详细地介绍了传递函数阵对角优势实现的算法。

第七章主要介绍多变量系统输出反馈的极点配置设计方法,其中着重介绍单秩法、双秩法、非限定秩法,随后介绍满秩法、动态补偿器和PID调节器的设计方法。

第八章是讨论线性定常二次型最优控制系统的设计。本章着重讨论了用Schur向量法求解黎卡提代数方程问题,并建立了一个适用于连续和离散两类系统设计和仿真的通用程序。当加权阵 $Q$ 、 $R$ 给定时,可以求出闭环系统的特征值,状态反馈矩阵及系统的响应。

本书第一至第五章,可作为自动化学科大学本科“控制系统数字仿真与计算机辅助设计”一课的教材。第六至第八章,可供大学高年级学生及研究生参考。

## 本章参考文献

1. A. Alan, B. Pritsker, *Compilation of definition of Simulation*, Simulation, Vol. 33, No. 2, 1979, 8.
2. 文传源, 仿真技术的几个问题和发展, 国内外自动化发展动向报告集, 中国自动化学会, p. 121—135, 1980, 9.
3. J. M. Smith, *Mathematical Modelling and Digital Simulation for Engineers and Scientists*, John Wiley & Sons, Inc., 1977.
4. G. A. 科恩, J. V. 韦特著, 李仰东等译, 连续系统数字仿真, 科学出版社, 1981.
5. J. G. Thompson, K. R. Young, *Computer Interactive Modeling and Analysis of Control Systems*, Proc. JACC, Georgia Tech., Atlanta, Georgia, 1970, pp. 352—353.
6. B. A. Chubb, *Application of a Continuous Systems Modeling Program to Control System Design*, *ibid*, pp. 350—351.
7. D. Grant, Fisher, *Description and Application of a Computer Program for Control System Design*, Automatica, Vol. 8, No. 5, 1972, pp. 737—746.
8. F. E. Wallace, A. F. Starr, M. B. Newman, *The Use of a Time-Shared Computer for Control Synthesis and Design*, Proc. JACC, 1970, pp. 513—523.
9. P. Atkinson, R. L. Davey, *Computer Aided Design of Closed-Loop Control Systems*, *International Conference in Computer Aided Design*, April, 1969, pp. 542—550.
10. R. J. Aird, A. D. Moseley, *On Time Computer Analysis for Control System Design*, *ibid*, pp. 551—559.

11. H.H. Rosenbrock, *State Space and Multivariable Theory*, Nelson, 1970.
12. H.H. Rosenbrock, *Computer-Aided Control System Design*, Academic Press, 1974.
13. H.H. Rosenbrock, *Design of Multivariable System Using the Inverse Nyquist Array*, Proc. IEE, Vol. 116, 1969, pp. 1926—1936.
14. H.H. Rosenbrock, *Computer-Aided Design of Multivariable Control System*, "Multivariable Control Systems", 1975, pp. 1—24.
15. R. Luntz, N. Munro, R. S. Mcleod, *Computer Aided Design of Multivariable Control Systems*, "Multivariable Control System Design and Applications", 1971, pp. 59—65.
16. N. Munro, *The UMIST Control System Design and Synthesis Suites*, "Computer Aided Design of Control Systems" Proc. of the IFAC Symposium, Edited by M.A. Cuenod, 1979, pp. 343—348.
17. 古田勝久, 梶原宏三, 制御系のためのCAD, 計測と制御, Vol. 18, No. 9, 1979.
18. K. Furuta, H. Kajiura, K. Tsuruoka, *Computer Aided Design Program for Linear Multivariable Control System*, "Computer Aided Design of Control System Design", Proc. of the IFAC Symposium, Edited by M.A. Cuenod, 1979, pp. 267—272.
19. 熊光楞, 控制系统计算机辅助设计-CSCAD 软件包综述, 清华大学, 第三次全国仿真会议论文, 1981.
20. 王正中, 系统仿真及仿真计算机, 国内外自动化发展动向报告集, 中国自动化学会, pp. 136—143, 1980.9.

## 第二章 面向传递函数和结构图的连续系统的数字仿真

本章首先简单介绍连续系统的数学模型以及最小实现的几种标准型, 然后介绍有关微分方程数值解法的基本概念和几种常用的数值方法。在此基础上, 根据工程人员的习惯, 介绍面向传递函数和面向结构图的通用数字仿真程序的建立和使用方法。

### § 2-1 连续系统的数学模型

一个系统, 可用不同的数学模型来描述。常用的数学模型有: 微分方程或微分算子矩阵方程、传递函数或传递函数阵以及状态空间表达式。在这一节里, 仅就这些数学模型作简单介绍, 以便在建立仿真程序时, 选择适当的仿真模型。

#### 一、微分方程和微分算子矩阵方程

对于单输入单输出系统可以用高阶微分方程来表示, 其一般形式如下

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n} y(t) + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \cdots + a_{n-1} \frac{d}{dt} y(t) + a_n y(t) \\ = c_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} u(t) + c_2 \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} u(t) + \cdots + c_{n-1} \frac{d}{dt} u(t) + c_n u(t). \end{aligned} \quad (2.1-1)$$

式中,  $y(t)$  为系统的输出量,  $u(t)$  为系统的输入量。若引进微分算子  $p = \frac{d}{dt}$ , 则(2.1-1)式可写成

$$\begin{aligned} p^n y(t) + a_1 p^{n-1} y(t) + \cdots + a_{n-1} p y(t) + a_n y(t) \\ = c_1 p^{n-1} u(t) + c_2 p^{n-2} u(t) + \cdots + c_{n-1} p u(t) + c_n u(t). \end{aligned} \quad (2.1-2)$$

或

$$\sum_{j=0}^n a_{n-j} p^j y(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_{n-i} p^i u(t), \quad (2.1-3)$$

其中,  $a_0 = 1$ , 或

$$\frac{y(t)}{u(t)} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} c_{n-i} p^i}{\sum_{j=0}^n a_{n-j} p^j}. \quad (2.1-4)$$

同理, 对于多输入多输出系统可用线性微分方程组来描述, 通常写成微分算子矩阵方程的形式

$$\left. \begin{aligned} P(p)z(t) &= Q(p)u(t), \\ y(t) &= R(p)z(t) + E(p)u(t), \end{aligned} \right\} \quad (2.1-5)$$

其中,  $u(t)$  为  $m \times 1$  输入向量,  $y(t)$  为  $l \times 1$  输出向量,  $z(t)$  为  $r \times 1$  系统分状态 (partial state) 向

量,  $P(p)$ 、 $Q(p)$ 、 $R(p)$ 、 $E(p)$  分别为  $r \times r$ 、 $r \times m$ 、 $l \times r$ 、 $l \times m$  的微分算子多项式矩阵。

## 二、传递函数和传递函数阵

对(2.1-1)两边逐项进行拉氏变换并考虑初值为零, 可得到

$$\begin{aligned} (s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n) Y(s) \\ = (c_1 s^{n-1} + c_2 s^{n-2} + \dots + c_{n-1} s + c_n) U(s). \end{aligned} \quad (2.1-6)$$

于是单输入单输出系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{c_1 s^{n-1} + c_2 s^{n-2} + \dots + c_{n-1} s + c_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}. \quad (2.1-7)$$

如果传递函数  $\tilde{G}(s)$  的分子与分母的阶数相同, 则可以利用长除法化为

$$\begin{aligned} \tilde{G}(s) &= \frac{c_1 s^{n-1} + c_2 s^{n-2} + \dots + c_{n-1} s + c_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} + d \\ &= G(s) + d, \end{aligned} \quad (2.1-8)$$

式中,  $G(s)$  即为(2.1-7)所示的真有理分式,  $d$  为常数。

对于多输入多输出系统, 如果知道了每个输出对于每个输入之间的传递函数, 便可得到输出向量关于输入向量的传递函数阵。

现以图2-1简单的双输入双输出系统为例来说明。

图中  $G_{ij}$  表示第  $i$  个输出与第  $j$  个输入之间的传递函数。于是输入与输出之间的拉氏变换关系可表为

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= G_{11}(s)U_1(s) + G_{12}(s)U_2(s), \\ Y_2(s) &= G_{21}(s)U_1(s) + G_{22}(s)U_2(s), \end{aligned} \quad (2.1-9)$$

若用矩阵表示, 则可写成

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}. \quad (2.1-10)$$

同理, 可推广到  $m$  个输入和  $l$  个输出的情况, 此时

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ \vdots \\ Y_l(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \dots & G_{1m}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \dots & G_{2m}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{l1}(s) & G_{l2}(s) & \dots & G_{lm}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ \vdots \\ U_m(s) \end{bmatrix}, \quad (2.1-11)$$

$$\text{或} \quad Y(s) = G(s)U(s), \quad (2.1-12)$$

式中,  $Y(s) = (Y_1(s) \dots Y_l(s))^T$  为  $l \times 1$  输出向量的拉氏变换,  $U(s) = (U_1(s) \dots U_m(s))^T$  为  $m \times 1$  的输入向量的拉氏变换,

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \dots & G_{1m}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \dots & G_{2m}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{l1}(s) & G_{l2}(s) & \dots & G_{lm}(s) \end{bmatrix} \quad (2.1-13)$$

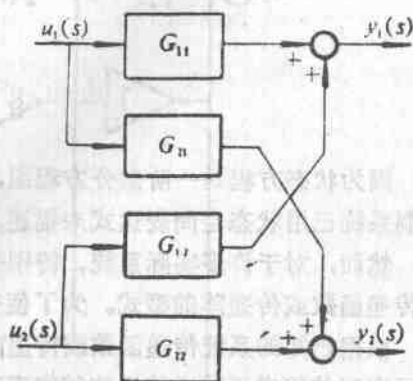


图2-1 多输入多输出系统

就是  $Y(s)$  与  $U(s)$  之间传递函数阵。

此外, 传递函数阵还可从微分算子矩阵方程求得。对 (2.1-5) 方程取拉氏变换并假定分状态和它的有关导数的初值为零, 便可得到

$$\left. \begin{aligned} Z(s) &= P^{-1}(s)Q(s)U(s) \\ Y(s) &= [R(s)P^{-1}(s)Q(s) + E(s)]U(s) \end{aligned} \right\} \quad (2.1-14)$$

$$\therefore G(s) = R(s)P^{-1}(s)Q(s) + E(s) \quad (2.1-15)$$

### 三、状态空间表达式

线性定常系统的状态空间表达式包括下列两个矩阵方程

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (2.1-16)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t). \quad (2.1-17)$$

(2.1-16) 式由  $n$  个一阶微分方程组成, 称为状态方程; (2.1-17) 式由  $l$  个线性代数方程组成, 称为输出方程。式中,  $x(t)$  为  $n \times 1$  的状态向量;  $u(t)$  为  $m \times 1$  的控制向量;  $y(t)$  为  $l \times 1$  的输出向量;  $A$  为  $n \times n$  的状态矩阵, 由控制对象的参数决定;  $B$  为  $n \times m$  的控制矩阵;  $C$  为  $l \times n$  的输出矩阵;  $D$  为  $l \times m$  的直接传输矩阵。

如果传递函数或传递函数阵各元素为严格真有理分式, 则  $D$  为零, 此时 (2.1-17) 式为

$$y(t) = Cx(t). \quad (2.1-18)$$

## § 2-2 实现问题

因为状态方程是一阶微分方程组, 所以非常适宜用数字计算机来求其数值解。如果一个控制系统已用状态空间表达式来描述, 便可直接用这个表达式来编制仿真程序。

然而, 对于许多实际系统, 特别是对于一些复杂系统, 其数学模型往往是通过实验得到的传递函数或传递阵的型式。为了便于数字仿真, 就必须把它们变换为状态空间表达式。

根据已知的系统传递函数或传递阵  $G(s)$  求相应的状态空间表达式称为实现问题。对于一个可实现的传递函数或传递阵其实现不是唯一的。这里仅仅介绍传递函数的几种有代表性的实现以及求传递阵实现的一种方法。

### 一、单变量系统的实现

#### (1) 可控标准型

将 (2.1-7) 式改写为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} (c_1 s^{n-1} + c_2 s^{n-2} + \dots + c_{n-1} s + c_n) \quad (2.2-1)$$

再将 (2.2-1) 取拉氏反变换, 可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^n z(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} z(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dz(t)}{dt} + a_n z(t) &= u(t), \\ y(t) &= c_1 \frac{d^{n-1} z(t)}{dt^{n-1}} + c_2 \frac{d^{n-2} z(t)}{dt^{n-2}} + \dots + c_{n-1} \frac{dz(t)}{dt} + c_n z(t). \end{aligned} \right\} \quad (2.2-2)$$

取一组状态变量为

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= z, \\ x_2 &= \dot{z}, \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= z^{(n-2)}, \\ x_n &= z^{(n-1)}. \end{aligned} \right\} \quad (2.2-3)$$

便可得到可控标准型实现，其系数矩阵为

$$\left. \begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}, & B &= \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ C &= [c_n \ c_{n-1} \ \cdots \ c_2 \ c_1]. \end{aligned} \right\} \quad (2.2-4)$$

其模拟图如图2-2所示。

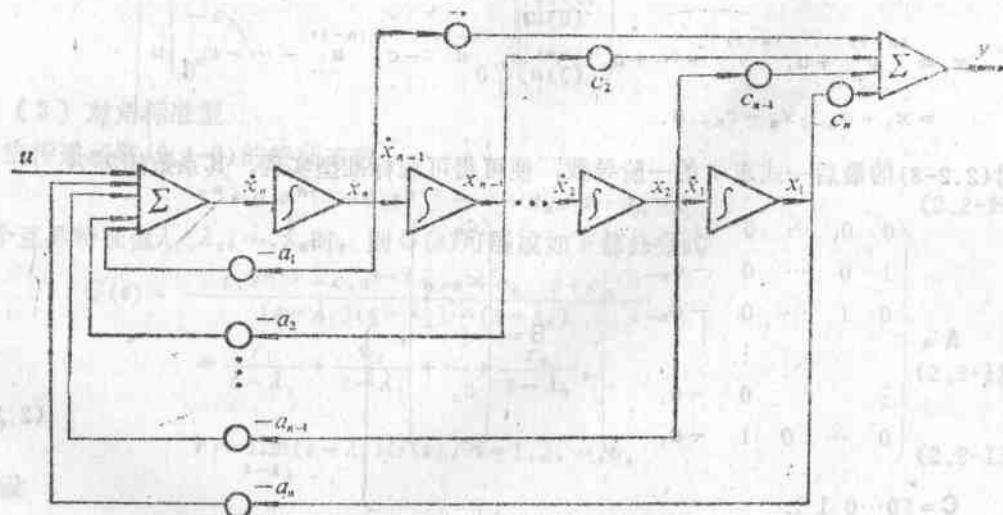


图2-2 可控标准型模拟图

## (2) 可观标准型

首先将(2.1-7)化为高阶微分方程

$$\begin{aligned} & \frac{d^n}{dt^n} y(t) + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \cdots + a_{n-1} \frac{d}{dt} y(t) + a_n y(t) \\ &= c_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} u(t) + c_2 \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} u(t) + \cdots + c_{n-1} \frac{d}{dt} u(t) + c_n u(t). \end{aligned} \quad (2.2-5)$$

考虑到非零初始条件的拉氏变换

$$L\left[\frac{d^n}{dt^n} y(t)\right] = s^n Y(s) - s^{n-1} y(0) - s^{n-2} \dot{y}(0) - \cdots - s y^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0). \quad (2.2-6)$$

取(2.2-5)式非零初始条件的拉氏变换，并将s同次项合并整理，使得

$$\begin{aligned}
 Y(s) = & \frac{c_1 s^{n-1} + c_2 s^{n-2} + \cdots + c_{n-1} s + c_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} U(s) \\
 & + \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \{ y(0) s^{n-1} + [\dot{y}(0) \\
 & + a_1 y(0) - c_1 u(0)] s^{n-2} + [\ddot{y}(0) + a_1 \dot{y}(0) \\
 & + a_2 y(0) - c_1 \dot{u}(0) - c_2 u(0)] s^{n-3} + \cdots + [^{(n-1)}\dot{y}(0) \\
 & + a_1 ^{(n-2)}\dot{y}(0) + \cdots + a_{n-1} ^{(n-2)}\dot{y}(0) - c_1 ^{(n-2)}\dot{u}(0) - c_2 ^{(n-2)}\dot{u}(0) - \cdots - c_{n-1} u(0)] \}
 \end{aligned} \quad (2.2-7)$$

若取一组状态变量

$$\left. \begin{aligned}
 x_n &= y, \\
 \dot{x}_{n-1} &= \dot{y} + a_1 y - c_1 u = \dot{x}_n + a_1 x_n - c_1 u, \\
 \dot{x}_{n-2} &= \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_2 y - c_1 \dot{u} - c_2 u = \dot{x}_{n-1} + a_2 x_n - c_2 u, \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_1 &= ^{(n-1)}\dot{y} + a_1 ^{(n-2)}\dot{y} + \cdots + a_{n-1} \dot{y} - c_1 ^{(n-1)}\dot{u} - c_2 ^{(n-1)}\dot{u} - \cdots - c_{n-1} u \\
 &= \dot{x}_2 + a_{n-1} x_n - c_{n-1} u.
 \end{aligned} \right\} \quad (2.2-8)$$

并对(2.2-8)的最后一式求  $t$  的一阶导数, 便可得可观标准型实现, 其系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & -a_2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} c_n \\ c_{n-1} \\ \vdots \\ c_2 \\ c_1 \end{bmatrix}, \quad (2.2-9)$$

$$C = [0 \cdots 0 \ 1].$$

其模拟图如图2-3所示。

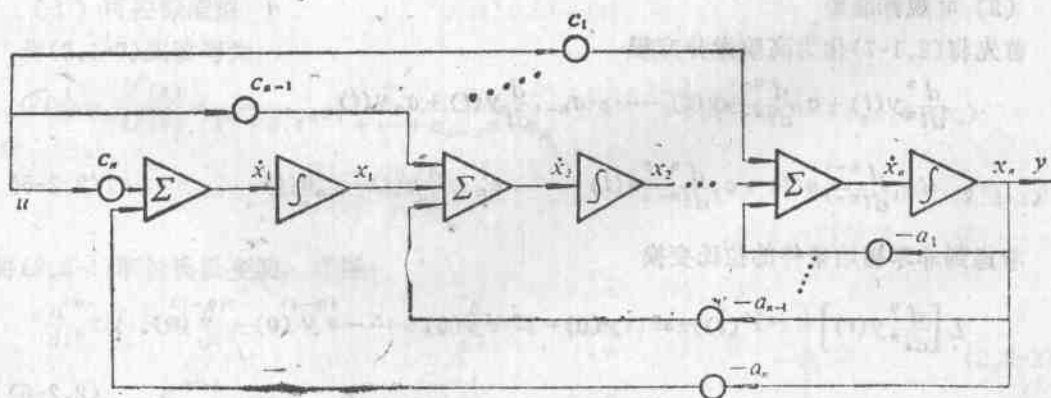


图2-3 可观标准型模拟图