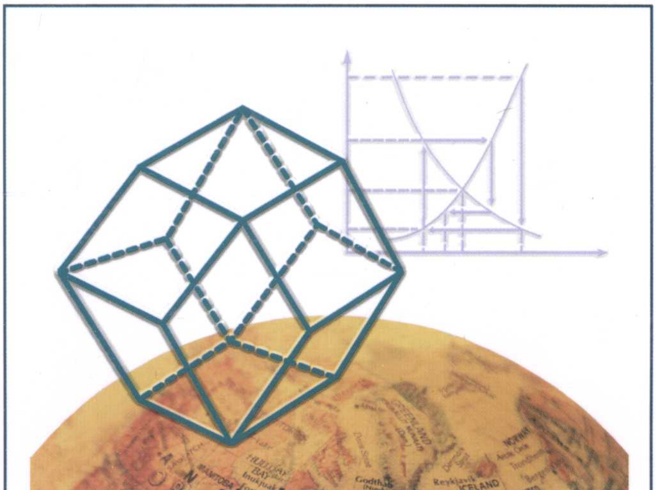
高等学校数学教材系列丛书

数学建模简明教程



党林立　孙晓群　主编

西安电子科技大学出版社　http://www.xduph.com

高等学校数学教材系列丛书

数学建模简明教程

主编　　党林立　孙晓群

参编　翟亮亮　魏朝颖　李美丽
　　　郝上京　高　楠　李富民

西安电子科技大学出版社

2009

内 容 简 介

为适应数学建模教学和竞赛的需要，针对工科本科院校和高职高专院校学生实际，在多年教学讲义的基础上，我们编写了这本《数学建模简明教程》。

本书选取了常见的初等模型、优化模型、微分方程模型、离散模型、概率模型中的经典示例进行分析讲解。每章各节内容相对独立，建模步骤完整，不涉及新的数学概念，减少了繁杂的数学推导，读者无需太深的数学知识，便可顺利阅读、学习本书内容。每个模型侧重于问题分析，抓住问题本质和解决思路，有利于启发学生思维，培养其分析、解决问题的能力。考虑到计算机技术及数学软件的发展和普及，书中增加了目前较为实用的数学软件 MATLAB 和 LINGO 的简介，便于读者上机计算。

本书可作为普通高等院校理工科及高职高专院校相关专业数学建模课程的教材和大学生数学建模竞赛的辅导用书，也可供科技工作者建模参考。

★本书配有电子教案，需要者可登录出版社网站，免费下载。

图书在版编目(CIP)数据

数学建模简明教程/党林立，孙晓群主编．—西安：西安电子科技大学出版社，2009.10

高等学校数学教材系列丛书

ISBN 978-7-5606-2341-2

Ⅰ．数…　Ⅱ．①党…　②孙…　Ⅲ．数学模型—高等学校—教材　Ⅳ．O141.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 170208 号

策　　划　李惠萍

责任编辑　李惠萍

出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)

电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　　编　710071

网　　址　www.xduph.com　　电子邮箱　xdupfxb001@163.com

经　　销　新华书店

印刷单位　陕西天意印务有限责任公司

版　　次　2009 年 10 月第 1 版　2009 年 10 月第 1 次印刷

开　　本　787 毫米×960 毫米　1/16　印张 14.75

字　　数　264 千字

印　　数　1～4000 册

定　　价　20.00 元

ISBN 978-7-5606-2341-2/O・0101

XDUP 2633001-1

前　　言

20 世纪 80 年代初，数学建模教学开始进入我国大学课堂。经过 20 多年的发展，现在绝大多数本科院校和许多专科学校都开设了各种形式的数学建模课程和讲座，为培养学生利用数学方法分析、解决实际问题的能力开辟了一条有效的途径。我校是较早开展数学建模教学和竞赛活动的院校，为适应数学建模教学和竞赛需要，针对工科本科院校和高职高专院校学生实际，在多年教学讲义的基础上，我们编写了这本《数学建模简明教程》。

本书突出的特点是实用简明，易于教学。本书选取了常见的初等模型、优化模型、微分方程模型、离散模型、概率模型中的经典示例进行分析讲解。每章各节内容相对独立，建模步骤完整，不涉及新的数学概念，减少了繁杂的数学推导，读者无需具有太深的数学知识，便可顺利阅读、学习本书内容。每个模型侧重于问题分析，抓住问题本质和解决思路，有利于启发学生思维，培养其分析、解决问题的能力。考虑到计算机技术和数学软件的发展与普及，书中增加了目前较为实用的数学软件 MATLAB 和 LINGO 的简介，便于读者上机计算。

本书可作为普通高校理工科及高职高专院校相关专业数学建模课程的教材和大学生数学建模竞赛的辅导书，也可供科技工作者建模参考。讲授全书内容大约需要 54 学时。对于学时较少的专业，可灵活选择若干章节进行讲授。

本书得到了西安石油大学教材建设资金的资助，由西安石油大学数学建模教学与竞赛课程组老师编写。党林立、孙晓群担任主编，并负责统稿、修改、定稿；参加编写的还有翟亮亮、魏朝颖、李美丽、郝上京、高楠、李富民，最后由李富民教授对全书进行审阅和修改。

作者对西安电子科技大学出版社的大力支持和热情帮助表示衷心感谢。热情欢迎广大读者对本书提出宝贵意见，以便进一步修改完善。

编　者

2009 年 6 月

目　　录

第一章　数学模型概论

1.1　数学与数学模型

我们生活在丰富多彩、千变万化的现实世界里，而世界上一切事物都是按照一定的客观规律运动、变化着. 事物之间彼此相互联系和制约，其间必然蕴涵着一定的数量关系. 数学是研究现实世界的空间形式和数量关系的科学. 随着科技的迅猛发展，数学应用已从传统的物理、力学、电磁学等工程技术领域，深入到科技、经济、金融、信息、材料、环境等社会生活的各个领域，特别是并行计算、网络等计算机技术与数学的结合，使数学如虎添翼，由一门理论学科发展成为一种数学技术，成为高新技术的基础，在各领域发挥着越来越重要的作用.

从小学、中学到大学，我们做过的很多数学应用题，已让我们体会到数学和它的应用，但实际问题远比数学应用题复杂，如气象工作者要根据气象资料准确预报天气；生理医学家要确定药物在体内的浓度分布，进而评价药物的疗效；公司经理要根据产品需求、生产条件、生产成本等信息，决策生产经营计划，以获取较高经济效益；甚至我们日常出行路线的优化等都涉及数学问题. 要用数学方法解决这些实际问题，就必须架设实际问题与数学之间的桥梁，将实际问题转化为一个相应的数学问题，然后对这个数学问题进行分析和计算，最后用所得的结果来解答实际问题.

日常生活中，我们参观展览会、博览会，看到精美的汽车模型、建筑模型、火箭模型、飞机模型、人造卫星模型等，这些是反映实物形态的直观模型. 在我们每个人的头脑中也存储着不少模型，如认识的人的形象、社会活动规范、某项技术方法等，这些是供人们思维决策的抽象模型. 数学模型这个概念并不是新名词，公元前三世纪，欧几里德建立的欧氏几何学，就是对现实世界的空间形式提出的一个数学模型，该模型十分有效，一直沿用至今. 近代力学、物理学的重要微分方程，也是抓住这些学科的本质的数学模型，成为相关学科的

核心内容和基础.

什么是数学模型(Mathematical Model)? 数学模型是用数学符号、公式、图表等刻画现实对象数量规律的数学表达式、图形或算法，是一种理想化、抽象化的方法，是用数学解决实际问题的典型方法. 一般地，数学模型实际上就是对于现实问题中的某一特定对象，为了某个特定目的，做出一些必要的简化和假设，运用适当的数学工具得到的一个数学结构. 它或者能解释特定现象的现实性态，或者能预测对象未来状况，或者能提供处理对象的最优决策或控制.

在现实问题中，由于特定对象系统形形色色、千差万别，描述它们的模型也就种类繁多. 常见的数学模型分类有：

(1) 按照模型所使用的数学方法可分为确定性模型、随机性模型和模糊性模型.

• 确定性模型：模型相应的实际对象具有确定性和固定性，对象间又具有必然的关系，这类模型的表示形式可以是各种各样的方程式、关系式、逻辑关系式、网络图等，所使用的方法是经典的数学方法.

• 随机性模型：这类模型的实际对象具有随机性，数学模型的表示工具是概率论、过程论及数理统计等.

• 模糊性模型：这类模型相应的实际对象及其关系具有模糊性，数学模型的基本表示工具是 Fuzzy 集合理论及 Fuzzy 逻辑等.

(2) 按照对研究对象的了解程度，可分为白箱模型、灰箱模型和黑箱模型.

白箱是指可以用像力学、电路理论等一些机理(指数量关系方面)清楚的学科来描述的现象，其中需要研究的主要内容是优化设计和控制方面的问题. 灰箱主要是指应用领域中机理尚不清楚的现象，对于这类问题，在建立和改善模型方面还有许多工作要做. 至于黑箱，主要包括的是在应用领域中一些机理完全不清楚的现象.

(3) 按照数学模型的结构可分为分析的模型、非分析的模型和图论的模型.

分析的模型是以无穷小量概念为基础，研究函数中变量之间的依赖关系，如常微分方程、偏微分方程、积分变换、无穷级数和积分方程等. 非分析的模型是用符号系统来表示方程或表达式中变量和常数的运算关系(如代数)，或者研究它们的坐标关系(如几何)，集合论、群论、抽象几何均属此类型. 图论的模型是以点和点的连线(有向的或无向的)来表示各种关系的图形，这类图形既能表达分析的问题，又能表达非分析的问题，具有独特的运算形式，如结构树图、决策树图、状态图等.

(4) 按照模型研究变量特性，可分为离散模型和连续模型，或者线性模型和非线性模型，或者参数定常模型和参数时变模型，或者单变量模型和多变量模型，或者静态模型和动态模型，或者集中参数模型和分布参数模型等.

(5) 按照模型应用领域可分为工程模型、人工模型、交通模型、生态模型、生理模型、经济模型、社会模型等.

1.2　数学建模的方法与步骤

在了解了数学模型的概念之后，如何建立数学模型，是本教程的核心，本节我们给出建立数学模型的一般方法和步骤.

1. 明确问题

要建立现实问题的数学模型，第一步是对要解决的问题有一个明确清晰的提法，通常我们碰到的某个实际问题，在开始阶段是比较含糊不清的，又带有实际背景，因此在建模前必须对问题进行全面、深入、细致的了解和调查，查阅有关文献，同时要着手收集有关数据，收集数据时应事先考虑好数据的整理形式，例如利用表格或框图形式等. 在这期间还应仔细分析已有的数据和条件，使问题进一步明确化，即从数据中可得到什么信息，数据来源是否可靠，所给条件有什么意义，哪些条件是本质的，哪些条件是可以变动的等. 对数据和条件的分析会进一步增强我们对问题的了解，使我们更好地抓住问题的本质及特征，为建立数学模型打下良好的基础.

2. 合理假设

建立数学模型的主要目的在于解决现实问题. 然而现实问题不经过理想化、简单化处理就很难转变成数学问题，即使建立了模型，也会因过于复杂而很难求解. 因此，做出合理的假设在数学建模中起着至关重要的作用. 所谓合理的假设，是指这些假设既能抓住问题的本质特征，又能使问题得到简化，便于进行数学描述，我们称这样的假设为简化问题的假设. 这里要提醒注意的是：对于一个假设，最重要的是它是否符合实际情况，而不是为了解决问题的方便.

如何对问题提出合理的假设是一个比较困难的问题，这是因为假设做得过于简单，则使模型远离现实，无法用来解决现实问题；假设做得过于详细，试图把复杂对象的各方面因素都考虑进去，模型就会十分复杂甚至难以建立. 通常做出合理假设的依据一是出于对问题内在规律的认识，二是来自对数据或现象的分析，也可以是两者的综合. 做假设时既要运用与问题相关的物理、化学、

生物、经济等方面的知识，又要充分发挥想象力、洞察力和判断力，善于辨别问题的主次，抓住主要因素，舍弃次要因素，尽量使问题简化(比如线性化、均匀化等)，经验在这里也常起重要作用. 最后要指出，有些假设在建模过程中才能确定，因此在建模中要注意调整假设，使模型尽可能地接近实际.

3. 建立模型

在已有假设的基础上，利用合适的数学工具，描述问题中变量之间的关系，确定其数学结构，就得到了实际问题的数学模型.

这里有两点要注意：一是构造一个具体问题的模型时，首先应构成尽可能简单的数学模型，然后把构造的简单模型与实际问题进行比较，再考虑将次要因素归纳进去，逐渐逼近现实来修改模型，使之趋于完善. 也就是说，数学建模是一个不断精确化的过程，切忌建模之初就把问题复杂化. 二是要善于借鉴已有问题的数学模型，许多实际问题，尽管现象和背景不同，但却具有相同的模型，例如力学中描述力、质量和加速度之间关系的牛顿第二定律 $F=ma$，经济学中描述单价、销售金额和销售量之间关系的公式 $C=pq$ 等，数学模型都是 $y=kx$. 一个数学模型应用于多个实际问题是屡见不鲜的. 要学会观察和分析，透过现象，抓住问题的本质特征，利用已有模型或在已有模型上进行修正，以此提高我们的建模水平.

4. 模型求解

不同的模型要用到不同的数学工具来求解. 可以采用解方程、画图形、证明定理、逻辑运算、数值计算等各种传统的和近代的数学方法，但多数场合模型必须依靠计算机的数值求解、模拟. 熟练利用数学软件包将会为我们求解模型带来方便.

5. 模型的检验与修正

建立数学模型的目的在于解决实际问题，因此必须把模型所得的结果返回到实际问题，如果模型结果与实际状况相符合，表明模型经检验是符合实际问题的. 如果模型结果很难与实际相符合，表明这个模型与所研究的实际问题不符合，不能直接将它应用于实际问题. 这时数学模型的建立过程如果没有问题，就需要考察建模时关于问题所做的假设是否合理，检查是否忽略了某些重要因素. 再对假设给出修正，重复前面的建模过程，直到使模型能反映所给的实际问题. 数学建模就是这样一个不断循环上升，不断优化模型的过程.

建立数学模型的步骤可以用下面的框图(图 1-1)表示.

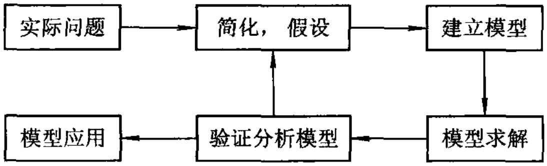


图　1-1

1.3　数学建模示例

本节我们通过一些简单例子来说明如何应用上面所给出的过程来建立数学模型，重点是如何做出合理的、简化的假设，用数学语言确切地表述实际问题，以及如何用模型的结果解释实际现象.

1.3.1　椅子的放稳问题

在日常生活中我们知道：椅子在一块不平的地上放不稳，但只需挪动几次，就可使四条腿同时着地，放稳了. 试用数学方法证明能否找到一个适当的位置而将一把椅子的四条腿同时着地.

对于这个与数学似乎毫不相干的问题，我们将建立一个简单的数学模型给予解答.

假设：

(1) 椅子的四条腿着地点构成平面上的严格正方形；

(2) 地面高度是连续变化的，不会出现间断，亦即不会出现台阶式地面或裂缝；

(3) 椅子在任何位置至少有三条腿着地.

该问题的核心是用数学语言将椅子四条腿同时着地的条件和结论表示出来.

如图 1-2 所示，设正方形的中心为坐标原点，每条腿的着地点分别为 A、B、C、D.

AC 和 BD 的连线为坐标系中的 x 轴与 y 轴. 对角线 AC 转动后与 x 轴夹角为 θ. A、C 两腿与地面距离之和为 $g(\theta)$，B、D 两腿与地面距离之和为 $f(\theta)$.

由假设条件(2)知，$g(\theta)$、$f(\theta)$ 是 θ 的连续函数. 显然椅子的三条腿总能同时着地，即对任何 θ，$g(\theta)$ 与 $f(\theta)$ 中至少有一点为零，因而有 $g(\theta)\cdot f(\theta)=0$. 现不妨设初始位置 $\theta=0$.

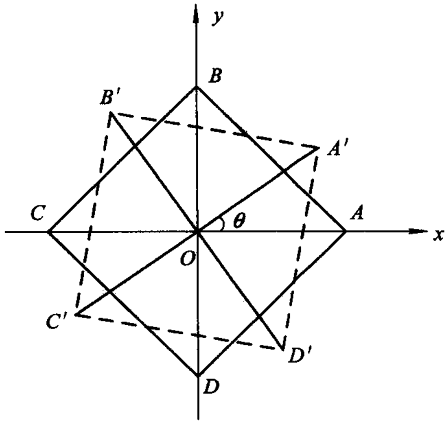


图 1-2

于是，此问题就归结为下面的数学问题：

设连续函数 $g(\theta)$、$f(\theta)$，满足 $g(0)=0$，$f(0)>0$，且对任意 θ，有 $g(\theta)\cdot f(\theta)=0$，证明存在 θ_0，使 $g(\theta_0)=f(\theta_0)=0$.

问题的证明如下：

(1) 若 $f(0)=0$，则取 $\theta=0$ 即可证明结论.

(2) 若 $f(0)>0$，则将椅子转动 $\frac{\pi}{2}$，这时椅子的对角线 AC 与 BD 的位置互换，故有

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\quad g\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$$

构造函数 $h(\theta)=f(\theta)-g(\theta)$，显然有

$$h(0)>0,\quad h\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$$

由于 $h(\theta)$ 是连续函数，由连续函数的介值定理，存在 $\theta_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得 $h(\theta_0)=0$. 又由于 $f(\theta)\cdot g(\theta)=0$，所以有 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$.

就是说，存在 θ_0 方向，使得四条腿能同时着地. 因此问题的答案是：如果地面是光滑的曲面，则四条腿一定可以同时着地.

这个模型巧妙之处在于用一元变量 θ 表示椅子的位置，用 θ 的两个函数表示椅子四条腿与地面的距离，进而将问题转化为连续函数的零点存在性的数学问题.

思考题 如果将椅子换成长方形桌子，是否还有相同的结论？

1.3.2 夫妻过河问题

这是一道智力游戏问题，问题是：有三对夫妻要过河，只有一只船，船最多能载两个人，由于封建思想，要求任一女子不能在丈夫不在场的情况下同另外的男子在一起，试给出三对夫妻的过河方案.

该问题有多种解法，下面介绍两种.

1）*应用状态转移法求解*

夫妻过河问题是带有约束条件的过河问题，可视为一个多步决策过程，每一步，即船由南岸到北岸或由北岸到南岸，都要对船上人员（男子、女子各几人）作出决策，在允许的前提下，在有限次内使三对夫妻全部过河.

记第 k 次过河前南岸的男子数为 x_k，女子数为 y_k，其中，$k=1, 2, \cdots$；x_k、$y_k=0, 1, 2, 3$，则状态向量可表为(x_k, y_k)，所有可能状态共 16 个，其可取状态或允许状态有 10 个：

$$(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (3, 0),$$
$$(3, 1), (3, 2), (3, 3), (1, 1), (2, 2)$$

记第 k 次过河时船上有男子数为 u，女子数为 v，则决策向量表示为 $((-1)^k u, (-1)^k v)$，其中，u、$v=0, 1, 2$；$u+v=1, 2$；$k=1, 2, \cdots$（k 为奇数时表示由南岸至北岸，k 为偶数时表示由北岸回南岸）.

这样，问题就归结为由状态(3, 3)经奇数次允许决策到达状态(0, 0)的状态转移过程.

第 1 次过河为：

$$(3, 3)+\begin{cases}((-1)^1\cdot 0, (-1)^1\cdot 1)\\((-1)^1\cdot 0, (-1)^1\cdot 2)\\((-1)^1\cdot 1, (-1)^1\cdot 1)\\((-1)^1\cdot 1, (-1)^1\cdot 0)\\((-1)^1\cdot 2, (-1)^1\cdot 0)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}(3, 2)\\(3, 1)\\(2, 2)\end{cases}$$

注意，这里只取了允许状态.

第 2 次过河是将(3, 2)、(3, 1)、(2, 2)分别与决策向量进行运算，只需 $k=2$. 如此下去不难验证，经 11 次可取运算三对夫妻就可全部过河.

为便于计算机求解，记允许状态集合和决策向量集合分别为：

$$S=\{(x, y)\mid x=0, y=0, 1, 2, 3;\ x=3, y=0, 1, 2, 3;\ x=y=1, 2\}$$
$$D=\{(u, v)\mid u+v=1, 2;\ u, v=0, 1, 2\}$$

并以 $S_k=(x_k, y_k)(k=1, 2, \cdots)$表示状态变化过程，$d_k$ 表示过河决策，$d_k\in D$，k 取奇偶数的意义与前面的表示意义相同. 则状态转移满足下列关系：

$$S_{k+1} = S_k + (-1)^k d_k \tag{1.3.1}$$

这样，我们的问题就成为：求决策 $d_k \in D(k=1, 2, \cdots)$ 使状态 $S_k \in S$ 按式(1.3.1)由初始状态 $S_1(3, 3)$ 经 n 步转移到 $S_n(0, 0)$ 的最小的 n 值.

利用上面的模型编制程序，容易在计算机上实现求解.

2) 图解法求解

在 xoy 平面坐标系中，画出图 1－3 那样的方格，方格点表示状态 $S(x, y)$，允许状态用圆点标出. 允许决策 d_k 是沿方格线移动 1 或 2 格，规定：

① k 为奇数时，向左或下方移动；

② k 为偶数时，向右或上方移动；

③ 每次移动必须落在允许状态即点"."上.

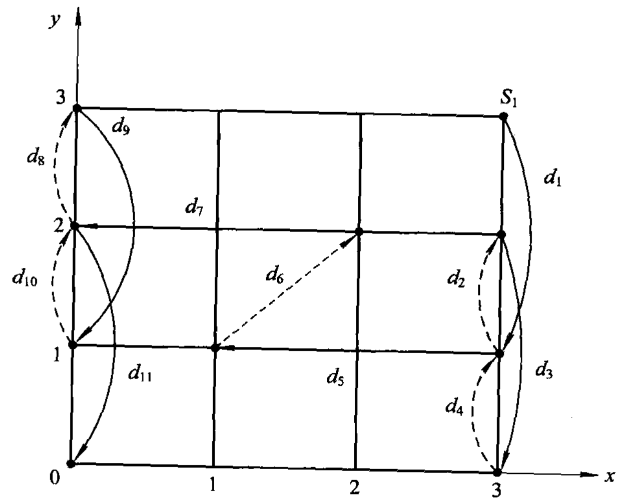


图　1－3

图 1－3 给出了一种状态转移过程，经过决策 d_1，d_2，d_3，…，d_{11} 实现了 $S_{12}(0, 0)$. 这个结果容易制定出过河方案，细心的读者会发现，应有 4 种状态转移过程. 这是一种规格化的方法，具有推广意义.

思考题　将夫妻数增加或船的容量增大时，如何建模求解？

1.3.3　人口预测问题

人口问题是当今世界上人们最关心的问题之一. 作为世界上人口最多的国家，我国的人口问题更是十分突出. 由于人口基数很大，尽管我国已实行了 30

多年的计划生育政策，人口的增长依然很快. 巨大的人口压力给我国社会、经济、医疗、就业等带来了一系列的问题. 因此，如何科学合理地预测人口增长，研究和解决人口问题在我国显得尤为重要.

关于人口问题模型的研究，并不是现在才开始的，早在 18 世纪末，英国人马尔萨斯(Malthus)在研究了百余年的人口统计资料后建立了第一个人口指数增长模型即 Malthus 模型. 其后经过不断改进，现在已有了一些更为精细的数学模型，尤其是人口的预测模型和控制模型为人口政策的制定提供了重要的科学依据. 我们这里介绍两种微分方程模型，即 Malthus 模型和 Logistic 模型.

1) Malthus 模型

设时刻 t 的人口总数为 $N(t)$，人口的净增长率(即出生率减去死亡率)为 r，根据 Malthus 的理论，在人口的自然增长过程中，r 为常数，即单位时间内人口的增加量与人口的总数成正比. 由于人口基数很大，故可将 $N(t)$ 近似看做连续可微函数，于是得 Malthus 人口模型为：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=rN\\ N(t_0)=N_0\end{cases}$$

此方程的解为：

$$N(t)=N_0\mathrm{e}^{r(t-t_0)} \tag{1.3.2}$$

如果 $r>0$，则式(1.3.2)表明人口总数将以指数形式增长，在实际应用时，一般以年为间隔来考察人口的变化情况，即取 $(t-t_0)=1, 2, \cdots, n$，这样我们就可得到以后各年的人口总数为 N_0，$N_0\mathrm{e}^r$，$N_0\mathrm{e}^{2r}$，$N_0\mathrm{e}^{3r}$，…，$N_0\mathrm{e}^{nr}$，….

事实证明，用 Malthus 模型进行短期人口预测还是比较准确的. 在资源丰富、人口比较稀少时结果和实际的人口统计数据也比较吻合. 但该模型用于长期预测是不合适的，因为 $r>0$，当 $t\to+\infty$ 时 $N(t)\to+\infty$，这一结论不符合人口实际情况. 例如 1961 年世界人口总数为 3.06×10^9，人口出生率为 2%，用 Malthus 模型预测以后，得到人口的数据为到 2670 年，世界人口总数达 3.6 万亿人，届时地球上平均每人只有 1 平方米的陆地. 显然这个结论是十分荒谬的.

以上错误结论的根源是 Malthus 假设的局限性. Malthus 的关键假设——人口自然增长率 r 是一常数这一条并不总是成立. 事实上，在人口比较稀少，资源比较丰富的条件下才存在这一规律，但当人口数量达到一定程度时，由于土地、资源的限制，会出现食物短缺、资源紧张、环境恶化并伴随战争与传染病的威胁. 这些因素对人口增长产生了阻滞作用，此时人口增长率随人口增加而减小，因此 Malthus 模型中人口净增长率为常数的假设必须进行修改.

2) Logistic 模型

为了克服 Malthus 模型假设的缺陷，荷兰生物数学家 Verhulst 引入常数