

试验设计 及其优化

任露泉 编著



科学出版社
www.sciencep.com

试验设计及其优化

任露泉 编著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书从技术与应用观点出发,重点阐述了试验设计及其数据处理的最优化方法和各种分析技术,以进一步提升试验设计的水平及其优化的成效。

全书共分 11 章,除介绍试验设计的基本原理、常用方法外,还介绍了试验设计的最新方法、最新研究成果及应用实例。此外,还介绍了试验设计的常用统计软件。

本书可作为理、工、农、医、经济、管理等专业本科生的教学用书,也可供科研人员、工程技术人员、设计人员、实验人员、营销人员和管理人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

试验设计及其优化 / 任露泉编著. —北京: 科学出版社, 2009
ISBN 978-7-03-025437-5

I. 试… II. 任… III. 试验设计(数学)—研究 IV. O212.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009) 第 153885 号

责任编辑: 范庆奎 房 阳 / 责任校对: 陈玉凤
责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 王 浩

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

装 主 印 刷 厂 印 刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009 年 9 月 第 一 版 开本: B5 (720 × 1000)

2009 年 9 月第一次印刷 印张: 16 3/4

印数: 1—6 000 字数: 326 000

定价: 38.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈环伟〉)

前 言

试验设计作为试验优化常用的现代通用优化技术,应用范围日益广泛,应用成效日益显著,已成为 21 世纪最具活力的应用数学分支之一,亦成为当代科研人员、设计人员、工程技术人员、营销人员和管理人员的必备技术。

试验设计是设计试验方案,实施广义试验,充分利用有限试验点信息,通过离散优化、全局寻优,寻求试验空间的近似最优,而最优化思想则始终贯穿于其方案设计、试验实施和数据处理的全过程。

20 世纪 80 年代初,我们为多个专业本科生开设了“试验设计”课程,随之编写了相应的校内教材,并在科研工作中得以实际应用,取得了明显成效。根据教学与科研的实际需要,1987 年出版了《试验优化技术》一书,该书将本科生用书《试验设计》和研究生用书《回归设计》合为一书,含两篇 16 章。随着试验优化理论与技术研究的不深入和应用成果的不断涌现,试验优化的新技术、新方法也不断展现,特别是试验设计与回归设计的全程优化,使其设计水平和优化成效不断提升。为此,2001 年,由国家“211 工程”重点学科建设项目资助,出版了《试验优化设计与分析》一书,除试验设计、回归设计两篇外,新增试验优化分析一篇,共 21 章,不仅介绍了试验优化新方法、新技术,而且还突出强调了试验设计与回归设计的全程优化理念与方法。2002 年,该书被遴选为全国研究生教学用书,迄今一直作为多所高校多个专业本科生和研究生的教学用书。

鉴于本科生与研究生教学上多方面的差异,根据学生的要求、授课教师和督学的建议,并考虑到应将全程优化的理念与方法贯穿于试验设计与回归设计内容的始终,故将《试验优化设计与分析》改编为《试验设计及其优化》和《回归设计及其优化》,分别单独成书,相应地作为本科生和研究生的教学用书,同时,亦方便于其他读者使用。为了从现代优化理论和试验优化的整体上更好地去认识和把握试验设计和回归设计的基本原理、主要方法、应用技术和重要意义,特将原书的“导论”部分稍作改动,分别作为《试验设计及其优化》和《回归设计及其优化》的导论,供读者参阅。

本书共 11 章,第 1~3 章是试验设计的基础;第 4~7 章是正交试验设计的应用拓广和现代发展;第 8, 9 章介绍方案设计和数据处理的最优化技术;第 10 章是不同于传统统计分析的数据处理新方法;第 11 章介绍试验设计的常用软件。读者可在掌握上述试验设计基本知识的基础上,根据专业和实际需要选择地阅读有关章节。

在本书撰写过程中,参考了国内外的有关文献与资料,并引用了其中的一些内容和实例,在此,向所有原作者和译者表示感谢。同时,作者向关心与支持本书出版的有关部门、有关学者、专家和同事表示衷心的感谢。

限于水平,书中疏漏和不妥之处在所难免,诚望读者指正。

作 者

2009 年 2 月

目 录

前言

导论	(1)
0.1 最优化	(1)
0.2 试验优化	(1)
0.3 试验设计	(3)
0.4 试验设计常用优良性	(3)
0.5 试验设计优化分析	(4)
0.6 试验设计的应用	(5)
第1章 正交试验设计	(7)
1.1 基本概念	(7)
1.2 正交表	(9)
1.3 正交试验设计的基本方法	(15)
1.4 有交互作用的正交试验设计	(21)
1.5 混合正交表试验设计	(27)
1.6 正交试验设计常用方法概述	(29)
1.7 改造正交表试验设计	(30)
1.8 调整因素及其水平试验设计	(37)
1.9 拟因素试验设计	(40)
1.10 多指标试验设计	(44)
1.11 正交试验设计的效应分析	(48)
第2章 干扰控制试验设计	(52)
2.1 试验干扰	(52)
2.2 试验设计的基本原则	(53)
2.3 单向干扰控制区组设计	(56)
2.4 两向干扰控制区组设计	(61)
2.5 尤登方区组设计	(68)
第3章 正交试验设计的方差分析	(71)
3.1 极差分析与方差分析	(71)
3.2 正交试验设计方差分析	(72)
3.3 重复试验的方差分析	(78)

3.4	不等水平试验设计方差分析	(82)
3.5	非饱和正交设计方差分析	(90)
3.6	区组设计方差分析	(93)
3.7	误差分析与试验水平	(97)
第4章	稳健试验设计	(100)
4.1	引言	(100)
4.2	基本概念	(100)
4.3	SN 比试验设计	(105)
4.4	稳健设计	(110)
4.5	内外表因素相关联参数设计	(113)
4.6	内外表因素无关联参数设计	(121)
4.7	综合误差因素参数设计	(124)
4.8	质量特性灵敏度分析	(127)
4.9	容差设计	(131)
4.10	动态特性设计	(135)
4.11	稳健性技术开发设计	(141)
第5章	广义试验设计	(149)
5.1	广义试验	(149)
5.2	故障判析设计	(150)
5.3	寿命试验设计	(151)
5.4	市场分析试验设计	(152)
5.5	数学试验设计	(155)
5.6	生产计划试验设计	(159)
第6章	调优运算	(163)
6.1	调优运算的特点	(163)
6.2	二因素调优运算	(164)
6.3	三因素调优运算	(169)
6.4	多因素调优运算	(172)
第7章	均匀设计	(174)
7.1	均匀性	(174)
7.2	均匀设计表	(176)
7.3	均匀试验设计	(178)
7.4	均匀设计结果分析	(181)
7.5	不等水平均匀设计	(184)
7.6	混合因素均匀设计	(186)

第 8 章 试验设计优化分析	(191)
8.1 最优试验设计	(191)
8.2 试验设计优良性分析	(194)
8.3 试验设计适用性分析	(195)
8.4 超饱和试验设计	(199)
第 9 章 数据处理优化分析	(203)
9.1 试验数据处理的最优化	(203)
9.2 极差修正优化分析	(204)
9.3 缺失数据弥补优化分析	(206)
9.4 梯度干扰控制的秩协方差分析	(210)
第 10 章 探索性数据分析	(215)
10.1 引言	(215)
10.2 基本概念	(216)
10.3 茎叶图	(220)
10.4 字母值	(222)
10.5 箱线图	(224)
第 11 章 试验设计常用统计软件	(229)
11.1 统计软件的选用原则	(229)
11.2 SAS 软件系统	(231)
11.3 SPSS for Windows 软件	(232)
11.4 试验设计专用软件	(233)
参考文献	(236)
附录	(238)
附录 1 常用正交表	(238)
附录 2 随机数字表(部分)	(247)
附录 3 $F(f_1, f_2)$ 表	(248)
附录 4 正交多项式表($N=2 \sim 11$)	(251)
附录 5 均匀设计表(部分)	(252)

导 论

0.1 最 优 化

在现代社会中,实现过程和目标的最优化已成为解决科学研究、工程设计、生产管理、市场营销、规划、决策以及其他方面实际问题的一项重要原则。所谓最优化,简单地说,就是高效率地找出问题在一定条件下的最优解。最优化是一个十分广阔的领域,或者说,在许许多多的领域里都有最优化问题。在实际中,最优化问题随处可见,几乎无所不在。例如,在科研、开发和生产中,为了达到提高质量、增加产量、降低成本、保护环境、改善劳动条件等目标;在经济规划、工程建设、产品设计、技术革新、工艺改革等领域,经常遇到要求改进或实现最优化的项目。广泛和明确的客观需要促使最优化成为一门重要的、充满活力的应用数学学科。随着科学技术的迅猛发展,市场竞争的日益激烈,最优化学科将会愈发显示出其巨大的威力。

按数学模型是否可计算或者是否已知,最优化可分为两类:一是可计算最优化,即数学模型是已知的,可以计算;二是试验性最优化,即数学模型是未知的或其函数值是不可计算的,只能通过试验来进行。在大量的实际问题中,试验性最优化问题比可计算最优化问题要多得多。

按最优化的结果,可把最优化方法分为局部最优和全局最优两类。对于实际的最优化问题,人们总是希望求全局最优,但在传统的最优化学科中,求全局最优的方法相对较少,多数还是依赖求局部最优。尽管可以通过多次求局部最优来寻找全局最优,但这样做会大大降低最优化方法的效率。

按优化计算中是否求导数,可把最优化方法分为导数法(包括差分法)和直接法两类。直接法对函数性质的要求比导数法低得多,所以,其应用范围比导数法广得多。原则上,直接法适用于试验性最优化问题。

现代优化技术主要分为三个方面:优化控制、优化设计和优化试验。目前,常用的优化技术主要有直觉优化、进化优化、试验优化、价值分析优化和数值计算优化。各种优化方法基本上都可以由上述分类方法予以归类。例如,试验优化显然是试验性最优化问题,属于直接优化、全局优化。

0.2 试 验 优 化

试验优化就是在最优化思想的指导下,通过广义试验(包括实物试验与非实物

试验)进行最优设计的一种优化方法,也是应用数学的一个新兴分支^[1~6]。它从不同的优良性出发,合理设计试验方案,有效控制试验干扰,科学处理试验数据,全面进行优化分析,直接实现优化目标,已经成了现代优化技术的一个重要方面。

长期以来,在试验领域中,特别是对于多因素试验,传统的试验方法往往只能被动地处理试验数据,而对试验方案及试验过程的优化常常显得无能为力。这不仅会造成盲目地增加试验次数,而且往往不能提供充分可靠的信息,以致达不到预期的目的,造成人力、物力和时间的大量浪费。近代创立和发展起来的试验优化法,将最优化思想和要求贯穿于试验的全过程,从此,试验才真正走上了科学的轨道,这使试验领域发生了深刻的变化,也有力地促进了现代优化技术的发展。

试验优化是一种直接优化法。具体地说,设计试验方案时,不仅使方案具有一定的优良性,也使试验点大大减少,但少量实施的试验点却能获取整个试验区域内丰富的试验信息,得出全面的结论;实施试验方案时,能有效地控制试验干扰,提高试验精度;处理试验结果时,通过简便的计算及分析,可以直接获得整个试验优化范围内较多的优化成果。显然,试验优化既是全过程优化、全局优化,又是多目标优化。对于多快好省地进行多因素试验,构造各种线性与非线性数学模型,在科学研究中发现新规律、在实际生产中探寻新工艺、在产品开发中进行优质设计、在管理科学中寻求最佳决策等,试验优化都是一种非常有效的数学工具。

一切设计、控制与决策都必须首先从信息载体中获取有用的信息。我们现在正处于知识经济时代,当信息成为价值手段,知识、信息和技术成为重要的生产力时,试验优化能够满足时代的需要。因为试验优化实际上是一门关于信息的量的科学,运用试验优化技术,可以既快又省地获取既多又好的信息,并能科学地分析和利用已获取的信息。

通常,试验是指实物试验。但对于试验优化,常常进行的是广义试验。凡是能获取信息的有效科学手段和方法,都可作为广义试验的试验方法。因此,试验优化不仅是提高获取信息效率的一种现代技术,也是适用面很广的一种通用技术。

目前,在科研与生产的实际应用中,试验优化主要是进行离散优化,有时也进行序贯优化,有时则必须综合应用离散优化和序贯优化。

所谓离散优化,就是在试验区域内有目的、有规律地散布一定量的试验点,多方向同时寻找优化目标。如果优化目标是最优点,则离散优化只是一种试验点优选法,优选过程不是遵循一定的寻优路径,而只是对给定条件下一切可能的试验点进行选优。因此,离散优化不能真正实现全局优化,所谓的最优只是近似的,最优点也只是较优点。试验优化在其方案的设计、实施及其结果分析中,主要表现为离散优化。常用的离散优化法有正交试验设计、均匀设计等。但实际应用表明,离散优化完全能够满足一般科研和生产的实际需要。

在实现优化目标的整个过程中,所谓序贯优化,即是遵循一定优化路径逐渐寻

找最优点的方法,它是单向寻优,后一阶段优化是在前一阶段优化的基础上进行的。通常情况下,序贯优化可以进行全域精确寻优。常用的序贯优化法有 0.618 法、Fibonacci 法、单纯形法、梯度法、渐近分式法和连贯设计法等。

试验优化常用的方法主要有试验设计和回归设计。本书主要介绍试验设计。

0.3 试验设计

随着科学研究的深入、工农业生产的发展和计算机技术的广泛应用,试验设计的内容越来越丰富,设计方法也越来越多^[7~16]。例如,仅正交试验设计就有几十种方法^[8,17]。

试验设计是离散优化的基本方法,它是从正交性、均匀性出发,利用拉丁方、正交表、均匀表等作为工具来设计试验方案、实施广义试验,直接寻找最优点。试验设计时,方案的编制与数据的处理常常表格化,这样应用分析非常方便。

试验设计作为相对独立的一门学科,既是应用数学的一个新分支,也是试验优化的一个重要组成部分。20 世纪 20 年代,英国学者 R. A. Fisher 运用均衡排列的拉丁方,解决了长期未能解决的试验条件的不均匀问题,提出了方差分析法,创立了试验设计 (design of experiments)^[2~4]。在试验设计的发展道路上,Fisher 创立的传统试验设计是第一个里程碑。正交表的构造和开发是第二个里程碑,日本田口式正交表试验设计法是突出的代表^[16],而我国研创的正交试验法同日本田口式正交表试验设计法相比,指导理论正确合理、程序更简单、优化效率更高、教育推广和普及更便利^[5~7],从而使多因素优化从欧美式的艰深方法中跳出,演化成简单易行、行之有效的工作。日本学者田口玄一开发的稳健试验设计是第三个里程碑^[18]。它是试验设计的现代发展,为试验设计开拓了更加广阔的应用领域,为优质产品的设计和开发提供了非常有效的工具。20 世纪 90 年代初,田口教授创造并推行了稳健性技术开发设计,这是一种带有重大创新思想的试验优化方法。这种方法能以较短的开发周期开发出相类似的一组或一系列的稳健、高质量、在使用中具有优良可靠性的产品。20 世纪 90 年代中期,田口教授在将 Mahalanobis 距离成功地用于医疗诊断、地震预报等方面的基础上,建立了马哈拉诺比斯-田口方法 (MTS),主要用于产品检测、医疗诊断、灾害预防预测、声音识别等多个领域。田口教授认为,MTS 将是 21 世纪试验优化领域里的最大技术,提醒人们对 MTS 重点进行研究和应用^[19,20]。

0.4 试验设计常用优良性

试验设计时,人们往往根据实际需要,进行不同优良性的设计,并运用合适的优化方法,圆满地实现优化目标。常用的优良性有以下几个。

1. 正交性

在 p 维因素空间内,如果试验方案 $\varepsilon(N)$ 使所有 j 个因素的不同水平 x_{ij} 满足

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N x_{ij} = 0, & j = 1, 2, \dots, p \\ \sum_{i=1}^N x_{ih} x_{ij} = 0, & h \neq j \end{cases}$$

就称该方案具有正交性。正交性主要表现于正交表 $L_n(b^c)$ 与 $L_n(b_1^{c_1} \times b_2^{c_2})$ 中,具体应用于各种正交设计。正交性能减少试验次数,消除各种效应间的相关性,使因素效应、交互作用效应的计算分析大大简化。正交性是试验优化中应用最广泛的一种优良性。

2. 稳健性

如果一个方案设计 $\varepsilon(N)$ 对各种噪声因素不敏感,或者对各种干扰具有较好的抗性,则称方案设计 $\varepsilon(N)$ 具有稳健性,有些场合也称之为鲁棒性。稳健性具体应用于稳健设计。稳健设计的目的是使产品或过程在使用运行时与目标值始终保持一致,并且对种种难以控制的因素不敏感。稳健设计及稳健性技术开发设计是正交试验设计的最新发展。

3. 均匀性

如果试验方案 $\varepsilon(N)$ 使得 N 个试验点按一定的规律充分均匀地分布在试验范围内,每个试验点都有一定的代表性,就称该方案具有均匀性。均匀性是新开发的一种优良性,它主要表现于均匀设计表 $U_n(b^c)$ 或 $U_n(b_1^{c_1} \times b_2^{c_2})$ 中,具体应用于均匀试验设计。均匀性比正交性更能大量地减少试验次数,但仍能得到反映试验体系主要特征的试验结果。

4. 饱和性

若试验方案 $\varepsilon(N)$ 的无重复试验次数 N 比试验因素及其交互作用的自由度之和多 1,则称该方案具有饱和性。饱和性主要应用于各种饱和设计,它能最有效地发挥各个试验点的作用,使每个试验点获取最多的有用信息,大大减少试验次数,缩短设计周期。

0.5 试验设计优化分析

试验设计的基本程式是:一设计、二分析。设计就是设计试验方案,主要体现

于试验方案设计的全过程;而分析主要是试验结果处理或试验数据分析,也包括对方案设计的最优化分析,它们既体现于试验设计全过程多目标的整体优化分析中,如极差分析、方差分析,也体现于数据分析的专门研究与应用中。

试验设计优化分析主要包括以下三个方面。

1. 设计的最优化分析

这是试验方案的最优化设计问题,主要有:

(1) 增强设计适用性。试验设计应用日益广泛,对于特殊的应用场合,需要有特殊、适用的试验设计,如大型动态试验设计、大型非线性整数规划试验设计等。

(2) 强化设计优良性。使设计同时具有多个优良性,是试验设计追求的重要目标,旨在增强设计优良性,如饱和正交设计。这方面的最新研究成果有均匀正交设计等^[7,21,22]。

(3) 减小设计容量。试验点少是试验设计的主要特点,这是人们在试验设计中一直不懈追求的目标。例如,综合噪声因子、外表凸多面体等稳健设计^[20,23]可以大大减少外表的试验点,而超饱和试验设计^[24]已突破了传统的饱和设计是最小试验点设计的界线。

2. 发现和解决常规数据处理中的难题

为了提高试验精度和优化成果的可靠性,人们一直在对常规的数据分析方法进行比较选优和改进完善^[25,26]。例如,对各种缺失数据弥补方法,不同的不等水平因素极差修正方法进行比较择优使用,对梯度干扰控制进行秩协方差分析等,都对试验数据的优化分析大有裨益。

3. 全新的数据处理方法分析

这是与传统数据处理完全不同的全新的数学思维,事先不用对实际数据作任何人为假定、分割或变换处理,不论数据分布是正态还是偏态,也不论其是白色量、灰色量、模糊量还是黑色系统,都可以进行有效的处理与分析。这是近二十多年来发展起来的全新数据处理方法,如探索性数据分析等^[27]。

综上所述,显见,试验设计优化分析是试验设计不可缺少的重要组成部分。再好的设计,如果没有好的优化分析方法,也很难达到试验设计的目标。因此,在试验设计中,对其全过程进行优化分析是必须的,应给予足够的重视。

0.6 试验设计的应用

试验优化具有设计灵活、计算简便、试验次数少、优化成果多、可靠性高、适用

面广等特点,因而发展迅速,应用广泛,已成为现代设计方法中一个先进的设计方法,成为多快好省地获取试验信息的现代通用技术,成为质量管理的一个科学工具,是现代优化和应用数学领域中最活跃、应用成果最显著的分支之一。

试验设计技术的推广应用是一项在经济效益上十分领先的工作。据报道,日本推广应用试验设计的前 10 年,即整个 20 世纪 60 年代,应用正交表已超过 100 万次,对于创造利润和提高生产率起了巨大的作用。今天,试验设计技术已成为日本企业界人士、工程技术人员、研究人员和管理人员的必备技术,已被认为是工程师共同语言的一部分。据说在日本,一个工程师如果没有试验设计这方面的知识,就只能算半个工程师。目前,这门技术还在农业、医学、生物学和物理学等方面得到普及和应用。

现在,日本每年有数百家公司应用田口方法,尤其是稳健设计完成数万个实际项目。丰田汽车公司、日产汽车公司、松下电器公司、新日铁公司、富士胶卷公司、日本软件技术公司等几乎所有大公司都在积极推广应用田口方法。丰田汽车公司对田口方法的评价是:在为公司产品质量改进作出贡献的各种方法中,田口方法的贡献占 50%。

田口方法于 20 世纪 80 年代初被引入美国,首先在福特汽车公司获得成功应用,并在全美引起轰动。到 1986 年,福特公司经济效益已超过世界最大的通用汽车公司,其飞跃的秘密武器就是田口方法。该公司每年都有上百个典型的田口方法应用实例。新车开发时间已由 48 个月降到 36 个月,并且开发成本也大大降低。目前,在美国,田口方法已应用推广到美国三大汽车公司、国际电报电话公司、施乐、柯达、杜邦、IBM、NASA、波音、美国国防部等上千家大公司和政府有关部门。某些学派认为,这是日本 50 年来生产率快速增长的主要、决定性因素,已成为世界强国间较量的重要因素。

我国一些学者自 20 世纪 50 年代就开始研究试验优化,在理论研究、设计方法与应用技巧方面都有新的创见,构造了许多新的正交表,提出了“小表多排因素,分批走着瞧,在有苗头处着重加密,在过稀处适当加密”的正交优化的基本原理和方法,提出了“直接看可靠又冒尖,算一算有效待检验”等行之有效的正交优化数据分析方法,提出了直接性和稳健性择优相结合的方法,提出了参数设计中多种减少外表设计试验点的新方法,还构造了系列的均匀设计表,创建了均匀设计法,这就形成了一套中国特色的试验设计法。我国对试验优化的发展和推广应用也作出了显著的贡献。尤其是自 20 世纪 70 年代以来,试验优化的实际应用越来越广^[1,5,8,17,24~26,28~34],取得了非常可喜的成果。国内正交法的应用已有超过一万个自变量的例子。据粗略估计,仅正交试验设计的应用成果目前已超过 10 万项,经济效益在 50 亿元以上。但是与开展这一工作最发达的国家相比,与我国应该达到的应用规模相比,还有较大的差距。试验设计的现代发展——稳健设计实际应用在我国才刚刚开始。因此,大力推广应用试验设计技术,对于促进我国科研、生产和管理等各项事业迅速而健康的发展,不仅具有普遍的实际意义,也具有一定的迫切性。

第 1 章 正交试验设计

1.1 基 本 概 念

下面通过一个简单实例来说明试验设计的一些基本概念和有关术语。

例 1-1 试验考查用不同方式施用氮肥(N)和磷肥(P)对大豆亩产量(y)的影响。试验安排和试验结果如表 1-1 所示。

表 1-1 施肥对大豆亩产量 y 的影响试验

磷肥 氮肥	$P_1 = 0$	$P_2 = 4$
$N_1 = 0$	200	225
$N_2 = 6$	215	280

1) 试验指标

在一项试验中,用来衡量试验效果的特征量称为试验指标,有时简称指标,也称试验结果,通常用 y 表示。它类似于数学中的因变量或目标函数。

试验指标用数量表示的称为定量指标,如速度、温度、压力、重量、尺寸、寿命、硬度、强度、产量、成本等。例 1-1 中,大豆亩产量 y 就是一种定量指标。不能直接用数量表示的指标称为定性指标。产品的外观质量、色泽、气味,如金属、塑料等镀件的表面色泽、粗糙度,充气轮胎外观质量标准等,都可作为定性指标。定性指标可以转化为定量指标。在质量管理中,一般把目标特性、质量特性作为试验指标。一项试验若仅有一个试验指标,称为单指标试验;若有两个或两个以上试验指标,则称为多指标试验。

2) 试验因素

试验中,凡对试验指标可能产生影响的原因都称为因素,也称因子或元,类似于数学中的自变量。需要在试验中考查研究的因素,称为试验因素,有时也称为因素,通常用大写字母 $A, B, C, \dots$ 表示。例 1-1 中,氮肥和磷肥都是试验因素,它们可以分别用 A, B 表示。在试验中,有些因素能严格控制,称为可控因素;有些因素难以控制,称为不可控因素。试验因素是试验中的已知条件,能严格控制,所以是可控因素。通常把未被选作试验因素的可控因素和不可控因素都称为条件因素,统称为试验条件。例 1-1 中,除氮肥和磷肥外,大豆品种、作业和管理质量、土壤水

分、土壤松软程度以及其他环境条件等,对大豆产量也有影响,它们有的可以控制,有的不易控制,试验中均未被考查,它们就构成了本例的试验条件。还需指出的是,试验设计中,因素与试验指标间的关系虽然类似于数学中自变量与因变量之间的关系,但并非确定的函数关系,而是相关关系。因此,试验指标的处理必须运用数理统计的原理和方法。

3) 因素水平

因素在试验中所处的各种状态或所取的不同值,称为该因素的水平,也简称为水平或位级,通常用下标 1, 2, … 表示。

若一个因素取 K 种状态或 K 个值,就称该因素为 K 水平因素。在例 1-1 中, A , B 都是二水平因素, A_1 表示 A 因素的一水平,即氮肥为 0 kg, B_2 表示 B 因素的二水平,即磷肥为 4 kg。

因素的水平,有的可以取得具体值,如例 1-1 中, $A_2 = 6$ kg; 有的只能取大致范围或某个模糊概念,如软、硬、大、小、好、较好等;但也有无法用数值表征的,如履带的不同形式、轮胎花纹的不同种类、机器的不同操作方式、大豆的不同品种等。

4) 处理组合

所有试验因素的水平组合所形成的试验点称为处理组合,也称组合处理。三因素试验中, $A_1B_2C_3$ 是一个组合处理,它表示由 A 因素一水平、 B 因素二水平和 C 因素三水平组合而形成的一个试验点。本例为两个二水平因素的试验。显然,可组合成 A_1B_1 , A_1B_2 , A_2B_1 和 A_2B_2 4 种组合处理,即 4 个试验点。

5) 全面试验

对全部组合处理都进行试验称为全面试验。本例中, 4 个组合处理都进行了试验,所以是全面试验。显然,全面试验的组合处理数 L 应等于各因素水平的乘积。设因素 A , B , C 对应的水平数分别为 a' , b' , c' , 则全面试验为 $L = a'b'c'$ 。

若有 c 个因素且每个因素的水平数都等于 b , 则全面试验的数学表达式为

$$L = b^c$$

可见,试验次数随因素及其水平数的增加迅速增加。对于多个因素,若实施全面试验,实际上是有困难的,有时甚至是不可能的。

6) 部分实施

从全部组合处理中选择一部分组合处理进行试验称为部分实施,又称部分试验。部分试验与全面试验之比称为几分之几部分实施。例如,三水平四因素的全面试验 $L = 3^4 = 81$, 若部分试验为 9, 则试验的部分实施为 $1/9$, 又称此试验为九分之一部分实施。

试验设计所追求的目标之一就是要用尽量小的部分实施来实现全面试验所要达到的目的。这样,就产生了两个突出的矛盾,一是全面试验的组合处理多与实际希望只进行少数试验的矛盾;二是实施少数试验与要求获取全面试验信息的矛

盾。利用正交试验设计既可以对试验进行合理安排,挑选少数具有代表性的组合处理进行试验——以少代多,解决第一个矛盾,又可以对实施的少数组合处理的试验结果进行科学的处理,作出正确的结论——以少求全,解决第二个矛盾。

7) 因素试验

目前,一般的试验多是因素试验,其目的在于研究各因素及其间的交互作用的重要程度,即对试验指标的影响大小,并直接获得最优组合处理,即最优工艺条件、最佳参数组合,或简捷地求得回归方程。

根据试验的目的,因素试验分为验证性试验和探索性试验。验证性试验是指因素与试验指标间的关系已知,进行试验验证的试验;探索性试验是指因素与试验指标间的关系未知,进行试验探索的试验。

根据试验因素的数量,因素试验分为单因素试验和多因素试验。仅研究一个因素的试验即为单因素试验,而在一项试验中同时研究两个或两个以上因素的试验即为多因素试验。多因素试验通常用全面试验的数学表达式表示,如 2^2 试验就表示本例二水平二因素试验, $4^2 \times 2^3$ 试验就表示 2 个四水平因素和 3 个二水平因素的五因素试验。

根据试验时间的安排,因素试验分为同时试验和序贯试验。同时试验是几个组合处理同时实施的试验,它适于试验周期长的情况;序贯试验是下次试验需在上次试验基础上进行的试验,它适于试验周期短的情况。

对于因素间关系复杂的多因素试验、寻求新规律的探索性试验、力求缩短试验周期的同时试验,正交试验设计是一种行之有效的科学试验方法。

1.2 正交表

1.2.1 均衡分布

正交表即正交阵列(orthogonal array)。正交拉丁方和 Hadamard 矩阵是它的前身。正交表是试验设计的基本工具,它是根据均衡分布的思想,运用组合数学理论构造的一种数学表格。均衡分布思想是正交表的核心,虽然远在古代就有,但只是在近代才与生产科研实际相结合,产生了拉丁方、正交表,显示出它的巨大威力。

18 世纪的欧洲,腓特烈大王,即普鲁士弗里德里希·威廉二世(1712~1786)要举行一次与往常不同的 6 列方队阅兵式。他要求每个方队的行和列都要由 6 种部队的 6 种军官组成,不得有重复和空缺。这样,在每个 6 列方队中,部队、军官在行和列全部排列均衡。群臣们冥思苦想,竟无一人能排出这种方队。后来,向当时著名的数学家欧拉(1707~1783)请教,由此引起了数学家们的极大兴趣,致使各种拉丁方向世(图 2-3)。拉丁方是正交表的基础,今天使用的正交表也正是拉丁