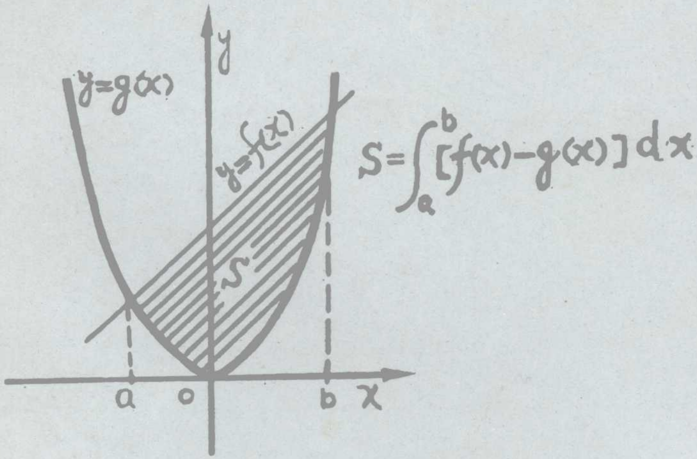
《高等数学习题集》题解

第四册



贵州省中等专业学校数学校际组编

说　明

这套《高等数学习题集》题解，是受省教育局、省广播电视大学的委托，为适应我省电大学员和中学数学教师自修提高的需要编辑的（作内部发行）。《高等数学习题集》是采用同济大学数学教研室编的一九六五年修订本。

《题解》按原书章次，共分五册（一、二册合订）。第一册平面解析几何；第二册空间解析几何；第三册单元函数微分学；第四册单元函数积分学、级数；第五册多元函数微积分学、微分方程。

在编辑过程中，有关主管部门、中等专业学校领导和教学人员给予了热情积极的支持，贵州工学院、贵阳师院和贵州大学等单位给予了大力协助，特别是贵州工学院数学教研组为我们提供了不少资料。在此，一并表示感谢。

一九七九年八月

目　　录

（第四册）

第十五章 不定积分

15.1.一曲线过原点，且在每一点的切线的斜率等于2x，试求这曲线的方程。

解：设曲线的方程为 $y=f(x)$

$\because\ y'=2x \quad \therefore\ y=\int 2x\,dx=x^2+C$

又 ∵ 曲线过原点， ∴ $0=0+C,\quad C=0$

故所求曲线的方程为 $y=x^2$

15.2.在积分曲线族 $y=\int 5x^2dx$ 中，求一通过点$(\sqrt{3},5\sqrt{3})$的曲线。

解：$\because\ y=\int 5x^2dx=\dfrac{5}{3}x^3+C$

将点$(\sqrt{3},\ 5\sqrt{3})$代入曲线族得：

$5\sqrt{3}=\dfrac{5}{3}(\sqrt{3})^3+C \qquad C=0$

故所求曲线为 $y=\dfrac{5}{3}x^3$

15.3.试证函数 $y=\ln(ax)$ 和 $y=\ln x$是同一函数原的函数。

证：设 $y_1=\ln(ax)$，则 $[\ln(ax)]'=\dfrac{a}{ax}=\dfrac{1}{x}$

设 $y_2=\ln x$，则 $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

∴ y_1和y_2都是同一函数$y=\dfrac{1}{x}$的原函数。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

15.4. 试证函数$y=(e^x+e^{-x})^2$ 和 $y=(e^x-e^{-x})^2$是同一函数的原函数。

证：设 $y_1=(e^x+e^{-x})^2$ 则

$$y_1'=2(e^x+e^{-x})(e^x-e^{-x})=2(e^{2x}-e^{-2x})$$

设 $y_2=(e^x-e^{-x})^2$ 则

$$y_2'=2(e^x-e^{-x})(e^x+e^{-x})=2(e^{2x}-e^{-2x})$$

∴ y_1和y_2都是同一函数$y=2(e^{2x}-e^{-2x})$的原函数。

15.5. 验证函数$\frac{1}{2}e^{2x}$，$e^x \operatorname{sh} x$ 和 $e^x \operatorname{ch} x$各差一个常数，并证明所给的每一个函数都是$\dfrac{e^x}{\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x}$ 的原函数。

证：(一)(1)∵ $e^x \operatorname{sh} x=e^x\cdot\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=\dfrac{e^{2x}}{2}-\dfrac{1}{2}$

(2) $e^x \operatorname{ch} x=e^x\cdot\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=\dfrac{e^{2x}}{2}+\dfrac{1}{2}$

∴ $\frac{1}{2}e^{2x}$ 与 $e^x \operatorname{sh} x$，$e^x \operatorname{ch} x$各差一个常数。

(二)(1)∵ $\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'=e^{2x}=e^x\cdot e^x=$

$$=e^x\cdot(\operatorname{sh} x+\operatorname{ch} x)$$

$$=e^x\cdot\frac{\operatorname{sh}^2x-\operatorname{ch}^2x}{\operatorname{sh} x-\operatorname{ch} x}=\frac{e^x}{\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x}$$

(2) $(e^x \operatorname{sh} x)'=e^x \operatorname{sh} x+e^x \operatorname{ch} x=$

$$=e^x\cdot\frac{\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x}{\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x}=\frac{e^x}{\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x}$$

(3) $(e^x \operatorname{ch} x)'=e^x \operatorname{ch} x+e^x \operatorname{sh} x=$

$$=e^x\cdot\frac{\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x}{\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x}=\frac{e^x}{\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x}$$

故函数$\frac{1}{2}e^{2x}$，$e^x shx$和$e^x chx$都是函数$\frac{e^x}{ch\,x-sh\,x}$的原函数。

15.6.一质点作直线运动，已知其速度为$V=\sin\omega t$，而且$S|_{t=0}=S_0$ 求时间为t时物体和原点间的距离S。

解：$\because\ S'_t=V\quad\therefore\quad S=\int\sin\omega t d\,t=$

$$=\frac{1}{\omega}\int\sin\omega t d(\omega t)=\frac{\cos\omega t}{\omega}+C$$

$$\because\ S|_{t=0}=S_0\ \therefore\ S_0=-\frac{\cos o}{\omega}+C\ \therefore\ C=S_0+\frac{1}{\omega}$$

故时间为t时物体和原点间的距离

$$S=s_0+\frac{1}{\omega}(1-\cos\omega t)$$

15.7.一质点作直线运动，已知其加速度为$a=12t^2-3\sin t$，如果$V_0=5$，$S_0=-3$，求：

(a) V和T间的函数关系；(b) S和t间的函数关系。

解：(a) $\because v'_t=a,\quad a=12t^2-3\sin t$

$$\therefore v=\int(12t^2-3\sin t)dt=4t^3+3\cos t+C_1$$

又$t=0$时 $\quad v_0=5\quad\therefore c_1=2$

故$v=4t^3+3\cos t+2$ 是v与t的函数关系式

(b) $\because\ s'_t=v\quad\therefore\ s=\int(4t^3+3\cos t+2)dt=$

$$=t^4+3\sin t+2t+c_2$$

$\because\ t=0$时 $\quad s_0=-3\quad\therefore\ c_2=-3$

故 $S=t^4+2t+3\sin t-3$是S与t间的函数关系。

15.8.在平面上有一运动着的质点，如果它在x轴方向和y轴

方向的分速度分别为$v_x=5\sin t$，$v_y=2\cos t$，又$x|_{t=0}=5$，$y|_{t=0}=0$，求：

(a)时间为 t 时质点所在的位置；(b)运动的轨迹方程。

解：(a)设时间为t时，质点所在的位置为(x,y)

$$\because\ x=\int 5\sin t\,dt=-5\cos t+c_1 \quad 又x|_{t=0}=5$$

$$c_1=10 \qquad \therefore\ x=10-5\cos t$$

同理 $y=\int 2\cos t\,dt=2\sin t+c_2$ 而$y|_{t=0}=0$

$$c_2=0 \qquad \therefore\ y=2\sin t$$

故当时间为t时，质点所在的位置为：

$$(10-5\cos t,\ 2\sin t)$$

(b)由(a)得质点运动的轨迹方程为：$\begin{cases}x=10-5\cos t\\ y=2\sin t\end{cases}$

$$\therefore \begin{cases}\cos t=\dfrac{10-x}{5} & \cdots\cdots①\\ \sin t=\dfrac{y}{2} & \cdots\cdots②\end{cases}$$

①^2+②^{2}得 $\cos^2 t+\sin^2 t=\dfrac{(10-x)^2}{25}+\dfrac{y^2}{4}$

故 质点运动的轨迹方程又可表为：

$$\frac{(10-x)^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$$

简 单 不 定 积 分

在题15.9——15.31中，求出各不定积分：

15.9. $\int \frac{1}{x^3} dx$

解：$\int \frac{1}{x^3} dx = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$

15.10. $\int x\sqrt{x}\, dx$

解：$\int x\sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C$

15.11. $\int \frac{dh}{\sqrt{2gh}}$

解：$\int \frac{dh}{\sqrt{2gh}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int h^{-\frac{1}{2}} dh = \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{2}{1} h^{\frac{1}{2}} + C =$

$= \frac{\sqrt{2gh}}{g} + C = \sqrt{\frac{2h}{g}} + C$

15.12. $\int \sqrt[m]{y^n}\, dy$

解：$\int \sqrt[m]{y^n}\, dy = \int y^{\frac{n}{m}} dy = \frac{m}{m+n} y^{\frac{m+n}{m}} + C$

15.13. $\int (3x^{0.4} - 5x^{-0.7} + 1) dx$

解：$\int (3x^{0.4} - 5x^{-0.7} + 1) dx$

$= \frac{3}{0.4+1} x^{1.4} - \frac{5}{-0.7+1} x^{-0.7+1} + C =$

$= \frac{15}{7} x^{\frac{7}{5}} - \frac{50}{3} x^{\frac{3}{10}} + x + C$

15.14. $\int (a - bx^2)^3 dx$

解：$\int (a - bx^2)^3 dx =$

$$=\int(a^3-3a^2bx^2+3ab^2x^4-b^3x^6)dx=$$

$$=a^3x-a^2bx^3+\frac{3}{5}ab^2x^5-\frac{b^3}{7}x^7+C$$

15.15. $\int\frac{(1-x)^2}{\sqrt[3]{x}}dx$

解：$\int\frac{(1-x)^2}{\sqrt[3]{x}}=\int\frac{1-2x+x^2}{x^{\frac{1}{3}}}dx=$

$$=\int(x^{-\frac{1}{3}}-2x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{5}{3}})dx=$$

$$=\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}-\frac{6}{5}x^{\frac{5}{3}}+\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}+C$$

15.16. $\int(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x^3}-\sqrt{x}+1)\,dx$

解：$\int(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x^3}-\sqrt{x}+1)\,dx=$

$$=\int(x^2+x^{\frac{3}{2}}-x-x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}+1)\,dx=$$

$$=\int(x^2+x^{\frac{3}{2}}-x+1)\,dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{x^2}{2}+x+C$$

15.17. $\int\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}dx$

解：$\int\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}dx=$

$$=\int(x^{\frac{1}{4}}-2x^{\frac{5}{12}}+x^{-\frac{1}{4}})\,dx=$$

$$=\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}-\frac{24}{17}x^{\frac{17}{12}}+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}+C$$

15.18. $\int \frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}dx$

解：$\int \frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}dx=$

$=\int (x^{-\frac{5}{2}}-e^x+x^{-1})dx=$

$=-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}-e^x+\ln|x|+C$

15.19. $\int \frac{x^3-27}{x-3}dx$

解：$\int \frac{x^3-27}{x-3}dx=$

$=\int \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x-3}dx=$

$=\int (x^2+3x+9)dx=$

$=\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+9x+C$

15.20. $\int \frac{x^2-2\sqrt{2}x+2}{x-\sqrt{2}}dx$

解：$\int \frac{x^2-2\sqrt{2}x+2}{x-\sqrt{2}}dx=\int \frac{(x-\sqrt{2})^2}{x-\sqrt{2}}dx=$

$=\int (x-\sqrt{2})dx=\frac{x^2}{2}-\sqrt{2}x+C$

15.21. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$

解：$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx=\int \sqrt{\frac{1+x^2}{(1-x^2)(1+x^2)}}dx=$

$=\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

15.22. $\int \frac{3x^2}{1+x^2}dx$

解：$\int \frac{3x^2}{1+x^2} = \int \frac{3x^2+3-3}{1+x^2}dx =$

$= \int \left(3 - \frac{3}{1+x^2}\right)dx = 3x - 3\,\text{arc tg}\,x + C$

15.23. $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx$

解：$\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx = \int \frac{1+x^2+x^2}{x^2(1+x^2)}dx =$

$= \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x^2}\right)dx = -\frac{1}{x} + \text{arc tg}\,x + C$

15.24. $\int 3^x\,dx$

解：$\int 3^x\,dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C =$

15.25. $\int 3^x e^x\,dx$

解：$\int 3^x e^x dx = \int (3e)^x dx =$

$= \frac{3^x e^x}{\ln 3e} + C = \frac{3^x e^x}{1+\ln 3} + C$

15.26. $\int \frac{2\cdot 3^x - 5\cdot 2^x}{3^x}dx$

解：$\int \frac{2\cdot 3^x - 5\cdot 2^x}{3^x}dx = \int \left[2 - 5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x\right]dx =$

$= 2x - 5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \frac{1}{\ln 2 - \ln 3} + C =$

$= 2x - \frac{5\cdot(\frac{2}{3})^x}{\ln 2 - \ln 3} + C$

15.27. $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx$

解：$\int \operatorname{tg}^2 x\, dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \operatorname{tg} x - x + C$

15.28. $\int 2\sin^2 \frac{x}{2} dx$

解：$\int 2\sin^2 \frac{x}{2} dx = \int (1-\cos x) dx = x - \sin x + C$

15.29. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$

解：$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx =$

$= \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \frac{dx}{\cos^2 x} = -\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + C$

15.30. $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx$

解：$\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x} dx =$

$= \int (\cos x + \sin x) dx = \sin x - \cos x + C$

15.31. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx$

解：$\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx = \int \frac{1+\cos^2 x}{1+2\cos^2 x - 1} dx =$

$= \int \left(\frac{\sec^2 x}{2} + \frac{1}{2}\right) dx = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x + \frac{1}{2} x + C$

换 元 积 分 法

在题15.32——15.89中，求出各不定积分：

15.32. $\int (2x-3)^{100}dx$

解：$\int (2x-3)^{100}dx$ 　令 $t=2x-3$

则 $x=\frac{t+3}{2}$ 　$dx=\frac{1}{2}dt$

$\therefore \int (2x-3)^{100}dx=\int t^{100}\cdot\frac{1}{2}dt=$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{101}}{100+1}+C=\frac{t^{101}}{202}+C$

$\therefore \int (2x-3)^{100}dx=\frac{(2x-3)^{101}}{202}+C$

15.33. $\int \frac{3}{(1-2x)^2}dx$

解：设 $t=1-2x$，则 $x=\frac{1-t}{2}$

$\int \frac{3}{(1-2x)^2}dx=\int \frac{3}{t^2}d\left(\frac{1-t}{2}\right)=$

$=-\int \frac{3}{2t^2}dx=-\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{t}\right)+C=\frac{3}{2}t^{-1}+C$

$\therefore \int \frac{3}{(1-2x)^2}dx=\frac{3}{2(1-2x)}+C$

15.34. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3-2x}}$

解：令 $t=3-2x$，则 $x=\frac{3-t}{2}$

$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3-2x}}=\int t^{-\frac{1}{3}}d\left(\frac{3-t}{2}\right)=$

$=-\int \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{3}}dt=-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}t^{\frac{2}{3}}+C=-\frac{3}{4}t^{\frac{2}{3}}+C$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt[3]{3-2x}} = -\frac{3}{4}(3-2x)^{\frac{2}{3}} + C$$

15.35. $\int \frac{dx}{3x-5}$

解：$\int \frac{dx}{3x-5} = \int \frac{3dx}{3(3x-5)} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x-5)}{3x-5} =$

$= \frac{1}{3}\ln|3x-5| + C$

15.36. $\int (a+bx)^k dx \quad b \neq o$

解：设 $t = a+bx$ 则 $x = \frac{t-a}{b} =$

$\int (a+bx)^k dx = \frac{1}{b}\int (a+bx)^k d(a+bx) =$

$$= \begin{cases} \frac{1}{b(k+1)}(a+bx)^{k+1} + C & (\text{当}k \neq -1) \\ \frac{1}{b}\ln|a+bx| + C & (\text{当}k = -1) \end{cases}$$

15.37. $\int \sin 3x\, dx$

解：$\int \sin 3x\, dx = \frac{1}{3}\int \sin 3x\, d(3x) =$

$= \frac{1}{3}(-\cos 3x) + C = -\frac{\cos 3x}{3} + C$

15.38. $\int \cos(\alpha - \beta x)dx \quad \beta \neq 0$

解：$\int \cos(\alpha - \beta x)dx =$

$$=\int \frac{-1}{\beta}\cos(\alpha-\beta x)d(\alpha-\beta x)=$$

$$=-\frac{1}{\beta}\sin(\alpha-\beta x)+C$$

15.39. $\int \operatorname{tg} 5x\,dx$

解：$\int \operatorname{tg} 5x\,dx=\int \frac{\sin 5x}{5\cos 5x}d(5x)=\int \frac{-d(\cos 5x)}{5\cos 5x}=$

$$=\frac{-1}{5}\ln|\cos 5x|+C=-\frac{1}{5}\ln|\cos 5x|+C$$

15.40. $\int e^{-3x}dx$

解：$\int e^{-3x}dx=\int \frac{e^{-3x}}{-3}d(-3x)=-\frac{1}{3}e^{-3x}+C$

15.41. $\int 10^{2x}dx$

解：$\int 10^{2x}dx=\int \frac{10^{2x}}{2}d(2x)=\frac{10^{2x}}{2\ln 10}+C=$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{10^{2x}}{2\ln 10}+C$$

15.42. $\int a^{mx+n}dx \quad m\neq 0$

解：$\int a^{mx+n}dx=\int \frac{a^{mx+n}}{m}d(mx+n)=\frac{a^{mx+n}}{m\ln a}+C$

15.43. $\int \operatorname{sh} 3x\,dx$

解：$\int \operatorname{sh} 3x\,dx=\int \frac{\operatorname{sh} 3x}{3}d(3x)=\frac{\operatorname{ch} 3x}{3}+C$

15.44. $\int \operatorname{ch}(2x-5)dx$

解：$\int \text{ch}(2x-5)dx = \int \frac{\text{ch}(2x-5)}{2} d(2x-5) =$

$= \frac{\text{sh}(2x-5)}{2} + C$

15.45. $\int \frac{dx}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}$

解：$\int \frac{dx}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)} = \int \csc^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)dx =$

$= \int \frac{\csc^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}{2} d\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) =$

$= -\frac{1}{2}\text{ctg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) + C$

15.46. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}}$

解：$\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}} = \int \frac{5 \cdot \frac{1}{5} dx}{\sqrt{1-25x^2}} =$

$= \int \frac{d(5x)}{5\sqrt{1-(5x^2)}} = \frac{1}{5}\arcsin 5x + C$

15.47. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$

解：$\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} = \int \frac{dx}{2\sqrt{1-\left(\frac{3}{2}x\right)^2}} =$

$= \int \frac{d\left(\frac{3}{2}x\right)}{3\sqrt{1-\left(\frac{3}{2}x\right)^2}} = \frac{1}{3}\arcsin\frac{3}{2}x + C$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com