

高等学校教材

GAODENG XUOXIAO JIAOCAI

电磁场微波技术与天线

DIANCICHANG WEIBO JISHU YU TIANXIAN

童创明 梁建刚 鞠智芹 张旭春 编 著



西北工业大学出版社

高等学校教材

电磁场微波技术与天线

童创明 梁建刚 鞠智芹 张旭春 编著

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书全面系统地讲解电磁场与电磁波、微波技术与天线的基础理论、基本技术和基本分析方法,并特别注重基本概念的阐述。全书共分 11 章:矢量分析、静电场、恒定电流的电场、恒定电流的磁场、时变电磁场、无线电波的基本知识、微波传输线、金属波导、微波网络的基本概念与基本参数、微波元器件、天线基础知识。每章末有本章提要,并附有一定数量的习题。

本书可供高等院校理工科电子类微波技术专业、天线专业、无线电物理专业及相近专业专科生作为教材或教学参考书,也可供电子工程与通信工程技术人员或相关专业技术人员自学参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

电磁场微波技术与天线/童创明等编著. —西安:西北工业大学出版社,2009.9
ISBN 978-7-5612-2699-5

I. 电… II. 童… III. ①电磁场—高等学校—教材 ②微波技术—高等学校—教材
③天线—高等学校—教材 IV. O441.4 TN015 TN82

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009)第 161239 号

出版发行:西北工业大学出版社

通信地址:西安市友谊西路 127 号 邮编:710072

电 话:(029)88493844 88491757

网 址:www.nwpup.com

印 刷 者:陕西天元印务有限公司

开 本:787 mm×1 092 mm 1/16

印 张:21.625

字 数:526 千字

版 次:2009 年 9 月第 1 版 2009 年 9 月第 1 次印刷

定 价:40.00 元

前 言

针对目前全国各高校课程体系改革,电磁场微波技术系列课程的内容调整较大,一方面课时压缩,另一方面某些课程如天线、无线电波传播等已不再单独开设,但按照专业要求,学生对相关知识应有一定的掌握,本书就是针对这一要求编写的。

本书从理论联系实际出发,把电磁场理论、微波技术与天线基本知识合并,构成一门专业技术基础课程,体现了应用型特色。在保持理论体系完整和严谨的同时,精选教学内容,尽量避免繁杂的推导,既可以使专科生掌握学习专业技术必备的基本知识和基本技能,又切合专科生能够理解和运用的程度。在编写过程中,尽可能地联系实际工程技术的应用,注意阐述物理概念,力求使读者易学、易懂。除此之外,对传统教材中的一些内容进行了取舍,如平面波部分从电磁波波动的物理概念出发,分析平面波的传播特性,避开利用麦克斯韦方程进行数学推导的过程,同时略去了对平面波反射和透射的推导过程,仅从物理概念解释,易于学生掌握。在天线基本知识中加入一些常用天线的介绍,拓宽学生的知识面,提高学生的应用能力。

本书可供高等学校工科电类专业专科生选作教材,亦可用作从事雷达、通信、导航等相关专业技术人员的参考书。

本教材计划学时数为92学时,全书共分为11章,包括矢量分析、电磁场电磁波理论、微波技术和天线基本知识4部分。第1章为矢量分析,着重讨论了标量场的梯度、矢量场的散度和旋度,为研究电磁场提供必要数学基础和工具。第2~6章为电磁场与电磁波理论部分。这一部分重点介绍了静态场的性质和基本解法,时变电磁场的基本方程组、边界条件以及平面波的基本概念及传播特性。第7~10章为微波技术部分,主要讨论了均匀传输线理论、规则金属波导、同轴线、微波网络基础和微波元器件,其中在金属波导部分侧重介绍了矩形波导;在微波元器件一章中,从工程应用的角度出发,重点介绍了具有代表性的几组微波无源元器件,主要包括连接匹配元件、功率分配元件、微波谐振元件、天线收发开关和铁氧体器件。第11章为天线基本知识,主要叙述了天线的基本参量、天线辐射单元、天线阵基本知识、线天线、面天线及相控阵天线工作原理,其中线天线部分侧重介绍了工程中常用的引向天线、槽缝天线和螺旋天线的工作原理,面天线部分着重介绍了喇叭天线、抛物面天线,并对微带天线作了简要介绍。上述四部分既相互联系又相对独立,使用本书作为教材时可根据不同的教学要求进行取舍。

本书由空军工程大学导弹学院微波教研室长期从事电磁场与微波技术专业教学和科研的多名教员合作编写完成,编写组成员包括童创明教授、梁建刚副教授、鞠智芹副教授、张旭春副教授以及杨亚飞讲师和丁尔启讲师等,童创明教授对全书进行了统稿。

本教材的出版得到了军队“2110工程”电磁场微波技术学科专业领域建设基金的资助，同时也得到了西北工业大学出版社的大力支持，在此表示感谢。

由于作者水平有限，书中难免还存在一些缺点和错误，敬请广大读者批评指正。

编者

2009年6月

目 录

绪 论	1
第 1 章 矢量分析	5
1.1 矢量代数	5
1.2 三种常用的正交坐标系	7
1.3 标量场的梯度	11
1.4 矢量场的通量与散度	14
1.5 矢量场的环流与旋度	19
1.6 无旋场与无散场 拉普拉斯运算	22
1.7 亥姆霍兹定理	25
小结	26
习题	27
第 2 章 静电场	30
2.1 库仑定律 电场强度	30
2.2 静电场的基本方程	33
2.3 泊松方程 拉普拉斯方程	37
2.4 静电场中的导体	37
2.5 介质中的高斯定理	37
2.6 介质分界面上的边界条件	39
2.7 电场能量	45
2.8 格林定理 唯一性定理	47
2.9 静电场的解	48
小结	55
习题	57
第 3 章 恒定电流的电场	59
3.1 电流密度	59
3.2 恒定电流电场的基本方程	61
3.3 恒定电场的边界条件	65
小结	66
习题	67

第 4 章 恒定电流的磁场	68
4.1 安培定律 磁感应强度	68
4.2 矢量磁位	72
4.3 磁场的通量和磁通量连续性原理	75
4.4 恒定磁场的旋度——安培环路定律	76
4.5 标量磁位	80
4.6 恒定磁场的边界条件	80
4.7 磁场能量和能量密度	82
小结	83
习题	85
第 5 章 时变电磁场	87
5.1 电磁感应定律和全电流定律	87
5.2 麦克斯韦方程组	91
5.3 电磁场的边界条件	95
5.4 电磁场的能量和能量传播 坡印亭矢量	97
5.5 标量位和矢量位	101
小结	102
习题	104
第 6 章 无线电波的基本知识	106
6.1 无线电波传播的基本特性	106
6.2 无线电波的极化	115
6.3 无线电波传播的基本规律	118
6.4 多波段无线电波传播的特点	119
小结	122
习题	122
第 7 章 微波传输线	124
7.1 概述	124
7.2 传输线方程及其解的意义	125
7.3 传播系数和特性阻抗	129
7.4 传输线的阻抗	131
7.5 反射系数与驻波系数	133
7.6 传输线的三种工作状态	135
7.7 圆图及其应用	138
小结	148
习题	149

第 8 章 金属波导	151
8.1 概述	151
8.2 矩形波导	152
8.3 矩形波导中的其他型波	164
8.4 矩形波导的功率传输	170
8.5 波导的激励与耦合	172
8.6 圆波导	176
8.7 同轴线	181
小结.....	183
习题.....	185
第 9 章 微波网络的基本概念与基本参数	187
9.1 引言	187
9.2 微波网络参数	190
9.3 双口微波网络的各种矩阵形式	191
9.4 微波网络的工作特性参数	205
小结.....	208
习题.....	210
第 10 章 微波元器件	212
10.1 概述.....	212
10.2 金属短路活塞.....	212
10.3 波导的分支接头和连接元件.....	214
10.4 阻抗匹配元件.....	219
10.5 功率分配器.....	223
10.6 定向耦合器.....	226
10.7 衰减器和移相器.....	231
10.8 微波谐振器与谐振窗.....	236
10.9 天线收发开关.....	243
10.10 微波滤波器	247
10.11 微波铁氧体器件	253
小结.....	261
习题.....	262

第 11 章 天线基础知识	264
11.1 概述.....	264
11.2 电基本振子的辐射场.....	268
11.3 对称振子.....	275
11.4 天线阵的基本知识.....	280
11.5 引向天线介绍.....	288
11.6 槽缝天线介绍.....	294
11.7 螺旋天线介绍.....	296
11.8 面天线的基本知识.....	301
11.9 喇叭天线介绍.....	309
11.10 抛物面天线介绍	319
11.11 腰形天线介绍	328
11.12 微带天线介绍	329
11.13 相控阵天线简介	331
小结.....	333
习题.....	335
参考文献	337

绪 论

一、电磁频谱

雷达系统中的发射机和接收机之间的联系(传递信息的媒介)是借助于电磁波来建立和实现的。在空间传播的交变电磁场称为电磁波。电磁波在空气中传播的速度是光速,记为 $c(c=3 \times 10^8 \text{ m/s}$,每秒钟可绕地球转七圈半)。如果以 f 来表示电磁波的频率,以 λ 表示电磁波的波长,则有如下关系式:

$$f\lambda = c$$

其中,频率 f 是电磁波每秒钟变化的周数,单位为赫(Hz)。

波长 λ 是电磁波在一周期内所走过的距离,单位是米(m)。

电磁波包括从电波到宇宙射线的各种波、光和射线的集合,不同频段分别命名为无线电波、红外线、可见光、紫外线、X射线、 γ 射线和宇宙射线。把电磁波的频率如家谱一样,按照由低到高的顺序排列起来,便得到了一张电磁频谱表,如图 0.1 所示。可不要小看这张表,它不仅是学习无线电理论和技术的一把钥匙,而且由于电磁频谱的分配和使用,涉及世界各国人们的重大利益,毫不夸张地说,它是人类进入现代文明的一项巨大的财富资源。

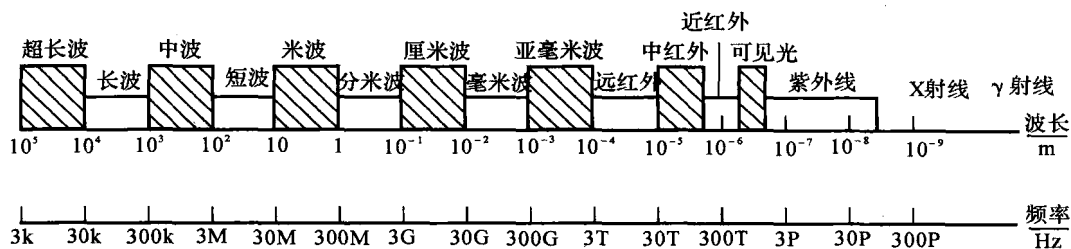


图 0.1 电磁波谱

19 世纪末,意大利人马可尼和俄国人波波夫同在 1895 年进行了无线电通信实验,在此后的 100 年间,从 3 kHz 直到 3 000 GHz 频谱被人们逐步认识、开发和利用。一般,将频率在 3 000 GHz 以下、3 kHz 以上的电磁波称为无线电波,有时简称为电波。从图 0.1 可以看出,无线电波只是电磁波中频率较低的一部分,比它频率高的还有红外线、可见光、紫外线、X 射线和 γ 射线等。根据不同的传播特性,不同的使用业务,对整个无线电频谱进行划分,共分为 9 段,如表 0.1 所示。

如果说电磁频谱是无线电领域的宝藏,那么,微波领域就是其中的一带“金矿区”了。

什么是微波?它有什么特点和应用,凭什么就身价百倍呢?下面着重来说明这些问题。

二、微波及其特点

就现代微波理论和技术的研究和发展而论,微波(Microwave)是指频率从 300 MHz~3 000 GHz 范围内的电磁波,其相应的波长从 1 m~0.1 mm。由图 0.1 可见,微波是电磁波谱中介于超短波(米波)与红外线之间的波段,它属于无线电波中波长最短(即频率最高)的波段,因此在微波理论研究的早期,称其为超高频技术。

在实际应用中,为方便起见,常把微波波段简单地划分为:分米波段(300 ~3 000 MHz)、厘米波段(3 ~30 GHz)、毫米波段(30 ~300 GHz)及亚毫米波段(300 ~3 000 GHz)。如表 0.1 所示。

表 0.1 国际无线电波谱的波段划分

波 段		频率范围	波长范围	备 注
普通无线电波	甚低频(VLF)	3~30 kHz	$10^5 \sim 10^4$ m	超长波
	低频(LF)	30~300 kHz	$10^4 \sim 10^3$ m	长波
	中频(MF)	300~3 000 kHz	$10^3 \sim 10^2$ m	中波
	高频(HF)	3~30 MHz	100~10 m	短波
	甚高频(VHF)	30~300 MHz	10~1 m	超短波
微波	超高频(UHF)	300~3 000 MHz	1~0.1 m	分米波
	特高频(SHF)	3~30 GHz	10~1 cm	厘米波
	极高频(EHF)	30~300 GHz	10~1 mm	毫米波
	超极高频	300~3 000 GHz	1~0.1 mm	亚毫米波

在雷达、通信及常规微波技术中,常用拉丁字母代号表示更为详细的微波的分波段,如表 0.2 所示。表 0.3 给出了家用电器的频段。

表 0.2 常用微波分波段代号

波段代号	标称波长/cm	频率范围/GHz	波长范围/cm
L	22.	1~2	30~15
S	10	2~4	15~7.5
C	5	4~8	7.5~3.75
X	3	8~12	3.75~2.5
Ku	2	12~18	2.5~1.67
K	1.25	18~27	1.67~1.11
Ka	0.8	27~40	1.11~0.75
U	0.6	40~60	0.75~0.5
V	0.4	60~80	0.5~0.375
W	0.3	80~100	0.375~0.3

表 0.3 家用电器的频段

名 称	频率范围
调幅无线电	535~1 605 kHz
短波无线电	3~30 MHz
调频无线电	88~108 MHz
商用电视	
1~3 频道	48.5~72.5 MHz
4~5 频道	76~92 MHz
6~12 频道	167~223 MHz
12~24 频道	470~566 MHz
25~68 频道	606~968 MHz

由于微波波段在电磁频谱中所占有的特定位置,使它具有如下特点:

1. 似光性和似声性

微波具有类似光一样的特性,主要表现在反射性、直线传播性及集束性等方面。由于微波的波长与地球上的一般物体(如飞机、轮船、汽车等)的尺寸相比要小得多,或在同一量级,因此当微波照射到这些物体时会产生强烈的反射。基于微波的上述特性人们发明了雷达系统。微波如同光一样在空间的直线传播,如同光可聚焦成光束一样,微波也可通过天线装置形成定向辐射,从而可以定向传输或接收由空间传来的微弱信号,实现微波通信或探测。

由于微波的波长与物体(如实验室中的无线电设备)的尺寸具有相同的量级,使得微波的特点又与声波的特点相近,即所谓似声性。例如,微波波导类似于声学中的传声筒;喇叭天线和缝隙天线类似于声学喇叭、箫和笛;微波谐振腔类似于声学共鸣箱等。

2. 穿透性

微波照射到介质时具有穿透性,主要表现在云、雾、雪等对微波传播的影响较小,这为全天候微波通信和遥感打下了基础。此外,微波具有穿越电离层的透射特性。实验证明:微波波段的几个分波段(如 1~10 GHz, 20~30 GHz 及 91 GHz 附近)受电离层的影响较小,可以较为容易地由地面向外层空间传播,从而成为人类探索外层空间的“无线电窗口”,为空间通信、卫星通信、卫星遥感和射电天文学的研究提供了难得的无线电通道。

3. 宽频带特性

任何通信系统为了传递一定信息必须占有一定的频带。传递某种信息所必须的频带宽度叫带宽。例如,电话(语言)信道的带宽为 4 kHz,广播的带宽为 16 kHz,而一路电视频道的带宽为 8 kHz。显然,要传输的信息越多,所用的频带就越宽。一般一个传输信道的相对带宽(即频带宽度与中心频率之比)不能超过百分之几,所以为了使多路电视、电话能同时在一条线路上传送,就必须使信道中心频率比所要传递的信息总带宽高几十至几百倍。而微波具有较宽的频带特性,其携带信息的能力远远超过中短波及超短波,因此现代多路无线通信几乎都工作在微波波段。随着数字技术的发展,单位频带所能携带的信息更多,这为微波通信提供了更广阔的前景。

4. 非电离性

微波的量子能量还不够大,不足以改变物质分子的内部结构或破坏分子间的键。而由物理学知道,分子、原子和原子核再外加电磁场的周期力作用下所呈现的许多共振现象都发生在微波范围,因而微波为探索物质的内部结构和基本特性提供了有效的研究手段。另外,利用这一特性和原理,可研制许多适用于微波波段的器件。

三、微波的应用

由于微波波段具有上述重要特点,有着鲜明的“个性”,使得微波的实际应用相当广泛,尤其是近年来发展更快,新的应用层出不穷。微波的应用包括作为信息载体的应用和作为微波能的应用两个方面,这里简单介绍微波的几种主要的用途。

(1) 雷达是微波技术的最早应用。在第二次世界大战期间,由于迫切需要对敌机及敌舰进行探测定位的高分辨雷达,而微波正好可以满足这一要求,因而微波技术得的迅速发展。在那时,雷达工程就是微波工程的同义语。现代雷达大多数是微波雷达,利用微波工作的雷达可以使用尺寸较小的天线,来获得很窄的波束宽度,以获取关于被测目标性质的更多的信息,准确

测定目标的方向、距离和速度,甚至可以成像。雷达不仅用于军事,也用于民用,如导航、气象探测、大地测量、工业检测和交通管制等。

(2)微波通信是微波技术的重要应用。由于微波具有频率高、频带宽、信息量大的特点,所以被广泛应用于包括微波多路通信、微波中继通信、散射通信、移动通信和卫星通信在内的各种通信业务。

(3)微波能是微波技术的新应用。微波作为能源的应用始于20世纪50年代后期,至60年代末,微波能的应用随着微波炉的商品化进入家庭而得到大力发展。微波能的应用包括微波的强功率应用和弱功率应用两个方面:①强功率应用是微波加热。微波加热可以深入物体内部,其热量产生于物体内部,不依靠热传导,里外同时加热该应用具有效率高、节省能源、加热速度快、加热均匀等特点,广泛应用于工农业生产及人们的日常生活中。②弱功率应用是用于各种电量和非电量(包括长度、速度、湿度、温度等)的测量。其显著特点是不需要和被测量对象接触,因而是非接触式的无损测量,特别适用于生产线测量或进行生产的自动控制。

(4)在生物医学方面,微波技术具有更广泛的应用。微波的医学应用包括微波诊断、微波治疗、微波解冻、微波解毒和微波杀菌等。

(5)科学研究方面的应用。根据各种物质对微波吸收的情况不同,可以用来研究物质内部的结构,这种技术称为微波波谱技术,有关这方面的知识称为微波波谱学。利用微波能穿透电离层并受天体反射的特点,可借助雷达来观察天体情况,为研究宇宙天体提供了新的途径。应用微波技术来研究天文的科学称为射电天文学和雷达天文学。利用大气对微波的吸收和反射特性,借助雷达来观察雨、雪、冰雹、雾、云等的存在和变化情况,可以预报附近地区的天气情况,把微波技术应用于气象研究而形成一门新的科学,称为无线电气象学。

四、本书的体系结构

电磁场与电磁波理论是微波技术与天线的基础,微波技术、天线是电磁场与电磁波理论的具体应用,本书将三者结合起来,对电磁场、微波和天线的基本理论进行了讨论,力图保持理论体系完整严谨。

全书共分11章,包括矢量分析、静电场、恒定电流的电场、恒定电流的磁场、时变电磁场、无线电波的基本知识、微波传输线、金属波导、微波网络的基本要领与基本参数、微波元器件、天线基础知识。

第 1 章 矢量分析

在电磁理论中,要研究某些物理量(如电位、电场强度、磁场强度等)在空间的分布和变化规律,为此,引入了场的概念。如果每一时刻,一个物理量在空间中的每一点都有一个确定的值,则称在此空间中确定了该物理量的场。

电磁场是分布在三维空间的矢量场,矢量分析是研究电磁场在空间的分布和变化规律的基本数学工具之一。标量场在空间的变化规律由其梯度来描述,而矢量场在空间的变化规律则通过场的散度和旋度来描述。本章首先介绍标量场和矢量场的概念,然后着重讨论标量场的梯度、矢量场的散度和旋度的概念及其运算规律,在此基础上介绍亥姆霍兹定理。

1.1 矢量代数

一、标量和矢量

数学上,任一代数数量 a 都可称为标量。在物理学中,任一代数数量一旦被赋予“物理单位”,则称为一个具有物理意义的标量,即所谓的物理量,如电压 u 、电荷量 Q 、质量 m 、能量 W 等都是标量。

一般的三维空间内某一点 P 处存在的一个既有大小又有方向特性的量称为矢量。本书中用黑体字母表示矢量,例如 \mathbf{A} , 而用 A 来表示矢量 \mathbf{A} 的大小(或 \mathbf{A} 的模)。矢量一旦被赋予“物理单位”,则称为一个具有物理意义的矢量,如电场强度矢量 \mathbf{E} 、磁场强度矢量 \mathbf{H} 、作用力矢量 \mathbf{F} 、速度矢量 \mathbf{v} 等。

一个矢量 \mathbf{A} 可用一条有方向的线段来表示,线段的长度表示矢量 \mathbf{A} 的模 A , 箭头指向表示矢量 \mathbf{A} 的方向,如图 1.1 所示。

一个模为 1 的矢量称为单位矢量。本书中用 \mathbf{a}_A 表示与矢量 \mathbf{A} 同方向的单位矢量,显然

$$\mathbf{a}_A = \frac{\mathbf{A}}{A} \quad (1.1)$$

而矢量 \mathbf{A} 则可表示为

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_A A \quad (1.2)$$

二、矢量的加法和减法

两个矢量 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 相加,其和是另一个矢量 \mathbf{D} 。矢量 $\mathbf{D} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ 可按平行四边形法则得到:从同一点画出矢量 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} , 构成一个平行四边形,其对角线矢量即为矢量 \mathbf{D} , 如图 1.2 所示。

矢量的加法服从交换律和结合律

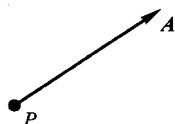


图 1.1 P 点处的矢量

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \quad (\text{交换律}) \quad (1.3)$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) \quad (\text{结合律}) \quad (1.4)$$

矢量的减法定义为

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) \quad (1.5)$$

式中, $-\mathbf{B}$ 的大小与 \mathbf{B} 的大小相等, 但方向与 \mathbf{B} 相反, 如图 1.3 所示。

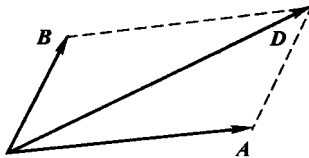


图 1.2 矢量的加法

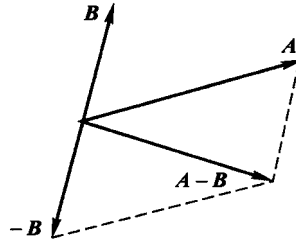


图 1.3 矢量的减法

三、矢量的乘法

一个标量 k 与一个矢量 \mathbf{A} 的乘积 $k\mathbf{A}$ 仍为一个矢量, 其大小为 $|k|A$ 。若 $k > 0$, 则 $k\mathbf{A}$ 与 \mathbf{A} 同方向; 若 $k < 0$, 则 $k\mathbf{A}$ 与 \mathbf{A} 反方向。

两个矢量 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的乘法有两种: 点积(或标积) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ 和叉积(或矢积) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 。

两个矢量 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的点积 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ 是一个标量, 定义为矢量 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的大小与它们之间较小的夹角 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) 的余弦之积, 如图 1.4 所示, 即

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta \quad (1.6)$$

矢量的点积服从交换律和分配律

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (\text{交换律}) \quad (1.7)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \quad (\text{分配律}) \quad (1.8)$$

两个矢量 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的叉积 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 是一个矢量, 它垂直于包含矢量 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的平面, 其大小定义为 $AB \sin \theta$, 方向为当右手四个手指从矢量 \mathbf{A} 到 \mathbf{B} 旋转 θ 时大拇指的方向, 如图 1.5 所示, 即

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = a_n AB \sin \theta \quad (1.9)$$

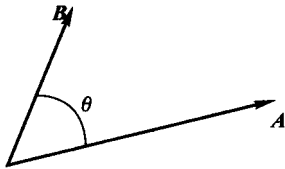


图 1.4 矢量 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的夹角

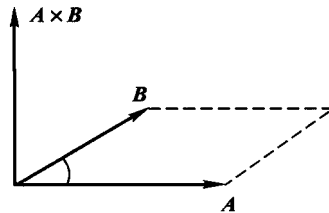


图 1.5 矢量 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的叉积

根据叉积的定义, 显然有

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (1.10)$$

因此, 叉积不服从交换律, 但叉积服从分配律

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \quad (\text{分配律}) \quad (1.11)$$

矢量 \mathbf{A} 与矢量 $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ 的点积 $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ 称为标量三重积,它具有如下运算性质:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (1.12)$$

矢量 \mathbf{A} 与矢量 $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ 的叉积 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ 称为矢量三重积,它具有如下运算性质:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (1.13)$$

1.2 三种常用的正交坐标系

为了考察物理量在空间的分布和变化规律,必须引入坐标系。在电磁场理论中,最常用的坐标系为直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系。

一、直角坐标系

如图 1.6 所示,直角坐标系中的三个坐标变量是 x, y 和 z ,它们的变化范围分别是

$$-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, -\infty < z < \infty$$

空间任一点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 是三个坐标平面 $x = x_0, y = y_0$ 和 $z = z_0$ 的交点。

在直角坐标系中,过空间任一点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 的三个相互正交的坐标单位矢量 $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y$ 和 \mathbf{a}_z 分别是 x, y 和 z 增加的方向,且遵循右手螺旋法则

$$\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z, \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_x, \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y \quad (1.14)$$

任一矢量 \mathbf{A} 在直角坐标系中可表示为

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_x A_x + \mathbf{a}_y A_y + \mathbf{a}_z A_z \quad (1.15)$$

式中, A_x, A_y 和 A_z 分别是矢量 \mathbf{A} 在 $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y$ 和 \mathbf{a}_z 方向上的投影。

两个矢量 $\mathbf{A} = \mathbf{a}_x A_x + \mathbf{a}_y A_y + \mathbf{a}_z A_z$ 与 $\mathbf{B} = \mathbf{a}_x B_x + \mathbf{a}_y B_y + \mathbf{a}_z B_z$ 的和等于对应分量之和,即

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{a}_x (A_x + B_x) + \mathbf{a}_y (A_y + B_y) + \mathbf{a}_z (A_z + B_z) \quad (1.16)$$

\mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的点积为

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (\mathbf{a}_x A_x + \mathbf{a}_y A_y + \mathbf{a}_z A_z) \cdot (\mathbf{a}_x B_x + \mathbf{a}_y B_y + \mathbf{a}_z B_z) = \\ &A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \end{aligned} \quad (1.17)$$

\mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的叉积为

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (\mathbf{a}_x A_x + \mathbf{a}_y A_y + \mathbf{a}_z A_z) \times (\mathbf{a}_x B_x + \mathbf{a}_y B_y + \mathbf{a}_z B_z) = \\ &\mathbf{a}_x (A_y B_z - A_z B_y) + \mathbf{a}_y (A_z B_x - A_x B_z) + \mathbf{a}_z (A_x B_y - A_y B_x) = \\ &\begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (1.18)$$

在直角坐标系中,位置矢量

$$\mathbf{R} = \mathbf{a}_x x + \mathbf{a}_y y + \mathbf{a}_z z \quad (1.19)$$

其微分为

$$d\mathbf{R} = \mathbf{a}_x dx + \mathbf{a}_y dy + \mathbf{a}_z dz \quad (1.20)$$

而与三个坐标单位矢量相垂直的三个面积元分别为

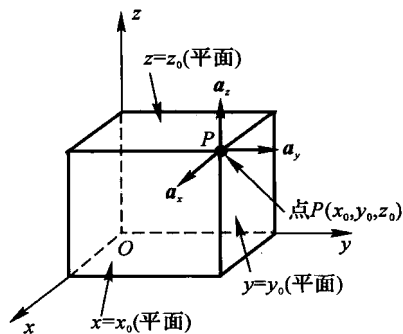


图 1.6 直角坐标系

$$dS_x = dydz, dS_y = dx dz, dS_z = dx dy \quad (1.21)$$

体积元为

$$dV = dx dy dz \quad (1.22)$$

二、圆柱坐标系

如图 1.7 所示,圆柱坐标系中的三个坐标变量是 r, φ 和 z ,它们的变化范围分别是

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\infty < z < \infty$$

空间任一点 $P(r_0, \varphi_0, z_0)$ 是如下三个坐标曲面的交点: $r=r_0$ 的圆柱面,包含 z 轴并与 xOz 平面构成夹角为 $\varphi=\varphi_0$ 的半平面, $z=z_0$ 的平面。

圆柱坐标系与直角坐标系之间的变换关系为

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad z = z \quad (1.23)$$

或

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z \quad (1.24)$$

在圆柱坐标系中,过空间任一点 $P(r, \varphi, z)$ 的三个相互正交的坐标单位矢量 $\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_\varphi$ 和 \mathbf{a}_z 分别是 r, φ 和 z 增加的方向,且遵循右手螺旋法则,即

$$\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\varphi = \mathbf{a}_z, \quad \mathbf{a}_\varphi \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_r, \quad \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_r = \mathbf{a}_\varphi \quad (1.25)$$

必须强调指出,圆柱坐标系中的坐标单位矢 $\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_\varphi$ 都不是常矢量,因为它们的方向是随空间坐标变化的。由图 1.8 可得到 $\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_\varphi$ 与 $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y$ 之间的变换关系为

$$\mathbf{a}_r = \mathbf{a}_x \cos \varphi + \mathbf{a}_y \sin \varphi, \quad \mathbf{a}_\varphi = -\mathbf{a}_x \sin \varphi + \mathbf{a}_y \cos \varphi \quad (1.26)$$

或

$$\mathbf{a}_x = \mathbf{a}_r \cos \varphi - \mathbf{a}_\varphi \sin \varphi, \quad \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_r \sin \varphi + \mathbf{a}_\varphi \cos \varphi \quad (1.27)$$

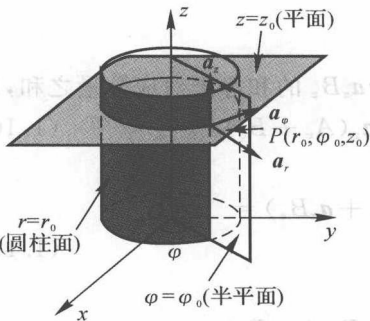


图 1.7 圆柱坐标系

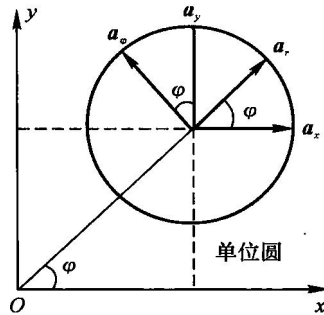


图 1.8 直角坐标系与圆柱坐标系的坐标单位矢量的关系

由式(1.26)可以看出 \mathbf{a}_r 和 \mathbf{a}_φ 是随 φ 变化的,且

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{a}_r}{\partial \varphi} = -\mathbf{a}_x \sin \varphi + \mathbf{a}_y \cos \varphi = \mathbf{a}_\varphi \\ \frac{\partial \mathbf{a}_\varphi}{\partial \varphi} = -\mathbf{a}_x \cos \varphi - \mathbf{a}_y \sin \varphi = -\mathbf{a}_r \end{cases} \quad (1.28)$$

任一矢量 \mathbf{A} 在圆柱坐标系中可以表示为

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_r A_r + \mathbf{a}_\varphi A_\varphi + \mathbf{a}_z A_z \quad (1.29)$$

式中 A_r, A_φ 和 A_z 分别是矢量 \mathbf{A} 在 $\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_\varphi$ 和 \mathbf{a}_z 方向上的投影。