新世纪高等院校数学专业系列教材

实变函数简明教程

SHIBIAN HANSHU JIANMING JIAOCHENG

李登峰　杨晓慧　杨利军　编著

河南大学出版社
开　封

河南大学教材建设出版基金资助

实变函数简明教程

SHIBIAN HANSHU JIANMING JIAOCHENG

李登峰　杨晓慧　杨利军　编著

河南大学出版社

·开封·

图书在版编目(CIP)数据

实变函数简明教程/李登峰,杨晓慧,杨利军编著. —开封:河南大学出版社,2009.9
ISBN 978-7-5649-0059-5

Ⅰ.实…　Ⅱ.①李…②杨…③杨…　Ⅲ.①实变函数—高等学校—教材　Ⅳ.0174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 166430 号

责任编辑　梁宏伟
责任校对　梁宏伟
封面设计　王四朋

出版发行　河南大学出版社
地址:河南省开封市明伦街 85 号　　邮编:475001
电话:0378-2825001(营销部)　　网址:www.hupress.com
排　版　郑州市今日文教印制有限公司
印　刷　河南郑印印务有限公司
版　次　2009 年 9 月第 1 版　　**印　次**　2009 年 9 月第 1 次印刷
开　本　787mm×1092mm　1/16　　**印　张**　7.5
字　数　173 千字　　**印　数**　1—2000 册
定　价　19.00 元

前　言

实变函数是数学学科下一门成熟的专业课程，其核心内容是测度和积分理论，这是近现代分析数学领域的必备知识。在编写本书过程中，我们根据数学专业本科教学的实际需要和信息与计算科学专业的实际情况，对内容进行了一定取舍。我们在组织内容上力求做到由浅入深、由点到面、循序渐进的原则；在叙述表达上力求清晰易懂，便于教学和阅读。同时，为了加深对重要结果（例如，Levi 引理、Fatou 引理和 Lebesgue 控制收敛定理等）的理解和运用，本书在每个重要结果证明之后给出一些说明和例题。我们有意识地没有介绍直线上点集内容，完全是为了整个内容体系的安排。因此本书尽量避免使用直线上一些特殊集合（如开集、闭集）的名字，个别地方避免不了，就给予适当解释。当然，这不影响介绍实变函数的基本内容。对于直线上点集内容，我们将放在泛函分析课程的度量空间中作为一节来介绍。应该说，虽然教材题目定为“实变函数简明教程”，但包括了实变函数的最基本内容。这些内容足以达到对学生基本素质、基本技能的训练和培养，也足以满足学生后继学习其它课程，如泛函分析、数学物理方程、概率论等的需要。

多年来，我们一直从事实变函数和泛函分析两门课程的教学，本教材就是在作者讲授《实变函数》课程的讲稿上整理而成。具体讲，第 1 作者负责制定编著大纲，提出编著要求并撰写第 1 章的前两节内容；第 2 作者撰写第 1 章的第 3 节至第 4 章的第 2 节全部内容；第 3 作者撰写第 4 章的第 3 节至第 5 章的所有内容；最后由第 1 作者审核定稿。在编写和教学实践过程中，我们参阅了国内外有关书籍和文献，并从中吸收了我们认为合适的材料，也认真听取了一些教师的建议。特别是，编辑梁宏伟先生对本书的形成提出了许多建设性的意见，该书受到河南大学教材建设基金的资助。在此一并表示衷心的感谢！

因水平有限，我们虽勉力为之，但难免有不妥之处，敬请同行批评和指正。

编　者

2009 年 7 月于河南大学

目 录

第1章　集合

德国数学家康托尔(Cantor)于19世纪70年代创立了集合论,如今它已发展成为一个独立的数学分支. 它是整个现代数学的逻辑基础,其基本概念和方法已渗入到现代数学各个领域. 实变函数论将大量运用集合论知识,因此本章将介绍集合论的基本知识.

§1.1　集合概念

集合概念是数学中原始概念之一,即它不能用别的概念加以定义. 它像几何学中"点"、"直线"那样,只能用一组公理去刻画. 关于集合概念,我们给出以下刻画:

"在一定范围内的每个事物的全体,当将它们看作一个整体时,称这个全体为一个集合,其中每个事物叫做这个集合的元素."

一个集合的各个元素必须是互不相同的,哪些事物是给定集合的元素必须是明确的. 现在举出几个集合的例子.

例 1.1　全体自然数.

例 1.2　a,b,c,d 4个字母构成的集合.

例 1.3　区间$[1,2]$上的实数全体.

例 1.4　定义域为$[4,6]$上的实函数全体.

我们用大写字母$A,B,\cdots$表示集合,而它们的元素用小写字母$a,b,\cdots$表示. 一个具体集合A可以通过列举其元素$a,b,\cdots$来加以定义,并记为

$$A=\{a,b,\cdots\}.$$

也可以通过该集合中的各个元素必须且需满足的条件p来说明,并记为

$$A=\{x \mid x\text{ 满足条件 }p\}.$$

如例1.2可表示为$\{a,b,c,d\}$,例1.3可表示为$\{x \mid 1\leqslant x\leqslant 2\}$.

设A是一个集合,如果a是A的元素,则称a属于A,记为$a\in A$;如果a不是A的元素,则称a不属于A,记为$a\overline{\in} A$.

集合由且只由其全部元素所确定. 因此,两个集合A和B当且仅当它们有完全一样的元素时才称为相等,记为$A=B$. 例如,如果$A=\{0,2,4,6,8\}$,$B=\{6,8,0,4,2\}$,

$C=\{x\mid x$为小于 10 的非负偶数$\}$，则

$$A=B=C.$$

为了方便，我们引进不含任何元素的集合，称之为空集，记为 $\varnothing$.

例如，

$$\{x\mid x\neq x\}=\varnothing.$$

给定两个集合 A 和 B，如果 A 的每一个元素都是 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，记为 $A\subset B$，读作 A 包含于 B；或称 B 包含 A，记为 $B\supset A$. 空集可以看成任何集合的子集. 如果 A 是 B 的子集且不等于 B，则称 A 是 B 的真子集.

例如，全体自然数是全体整数的真子集.

显然，集合的包含关系具有下列性质：

定理 1.1 对任何集合 A,B,C 有

(1) $A\subset A$；

(2) 如果 $A\subset B,B\subset C$，则 $A\subset C$；

(3) 如果 $A\subset B,B\subset A$，则 $A=B$.

通常证明两个集合相等时，总是利用(3).

§1.2 集合的运算

我们从给定的一些集合出发可以通过所谓“集合的运算”来作出某些新的集合，这里集合的运算最常用的有“交”、“并”、“差” 3 种.

定义 1.1 假设 A 和 B 是任意两个集合，由既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合 C 称为 A 和 B 的交集，记作

$$C=A\cap B.$$

它可表示为

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

属于每一 A_k 的元素全体所组成的集合称为任意(有限或无限)个集合 A_k 的交，记作

$$\bigcap_k A_k,$$

且可表示为

$$\bigcap_k A_k=\{x\mid \text{对每个 } k \text{ 有 } x\in A_k\}.$$

集合交的示意图如图 1-1(中间深色相交部分)所示.

例 1.5 所有偶数组成的集合与一切被 3 整除的整数组成的集合的交是由一切被 6 整除的整数组成的集合.

例 1.6 假设

$$A_k=\{x\mid -\frac{1}{k}<x<\frac{1}{k}\},k=1,2,\cdots,$$

则

$$\bigcap_{k=1}^{n}A_k=\{x\mid -\frac{1}{n}<x<\frac{1}{n}\},$$

$$\bigcap_{k=1}^{+\infty}A_k=\{0\}.$$

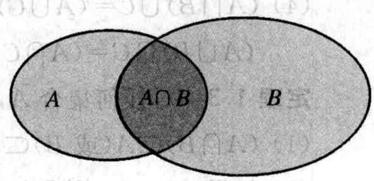

图 1-1 集合的交

定义 1.2 假设 A 和 B 是任意两个集合，由一切或属于 A 或属于 B 的元素组成的集合 C 称为 A 和 B 的并集，记作

$$C=A\cup B.$$

它可表示为

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}.$$

由一切 A_k 的所有元素组成的集合称为任意(有限或无限)个集合 A_k 的并，记作

$$\bigcup_k A_k,$$

且可表示为

$$\bigcup_k A_k=\{x\mid \text{存在某个 }k\text{ 使 }x\in A_k\}.$$

集合并的示意图如图 1-2(右边整个灰色图形)所示.

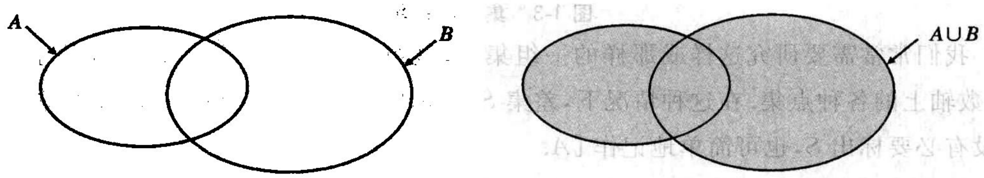

图 1-2 集合的并

例 1.7 所有偶数组成的集合与所有奇数组成的集合的并是所有整数组成的集合.

例 1.8 假设

$$A_k=\{x\mid -1+\frac{1}{k}<x<1-\frac{1}{k}\},k=1,2,\cdots,$$

则

$$\bigcup_{k=1}^{n}A_k=\{x\mid -1+\frac{1}{n}<x<1-\frac{1}{n}\},$$

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty}A_k=(-1,1).$$

显然，关于集合的交和并具有下列结论.

定理 1.2 对任何集合 A,B,C 有

(1) $A\cap A=A,A\cup A=A$;

(2) $A\cap B=B\cap A,A\cup B=B\cup A$;

(3) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$,

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

(4) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$,

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

定理 1.3 对任何集合 A, B 有

(1) $(A \cap B) \subset A$(或 B)$\subset (A \cup B)$;

(2) 如果 $A_k \subset B_k$,则 $\bigcap_k A_k \subset \bigcap_k B_k$,$\bigcup_k A_k \subset \bigcup_k B_k$.

定理 1.2 和定理 1.3 可由定义直接证明.

定义 1.3 假设 A 和 B 是任意两个集合,由属于 A 而不属于 B 的元素全体组成的集合称为 A 与 B 的差集,记作 $A-B$ 或 $A \backslash B$.它可表示为

$$A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \overline{\in} B\}.$$

差集的示意图如图 1-3(左侧灰色图形部分)所示.

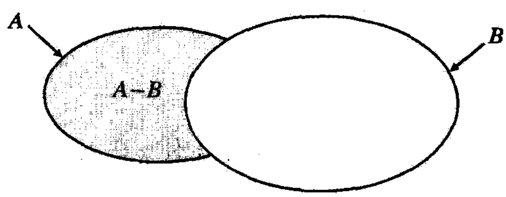

图 1-3 集合的差集

我们常常需要研究这样或那样的一组集合,这组集合是某一基本集合 S 的子集.例如,数轴上的各种点集.在这种情况下,差集 $S \backslash A$ 称作集合 A 的余集,记作 $\complement_S A$ 或 A'.如果没有必要标出 S,也可简单地记作 $\complement A$.

定理 1.4 对任何集合 A, B 有

(1) $\complement_S S = \varnothing$, $\complement_S \varnothing = S$;

(2) $A \cup \complement_S A = S$, $A \cap \complement_S A = \varnothing$;

(3) $\complement_S(\complement_S A) = A$;

(4) $A \subset B \Rightarrow \complement_S B \subset \complement_S A$;

(5) $A \backslash B = A \cap \complement_S B$;

(6) $\complement_S(A \cap B) = \complement_S A \cup \complement_S B$,

$\complement_S(A \cup B) = \complement_S A \cap \complement_S B$.

更一般地有

$$\complement_S(\bigcap_k A_k) = \bigcup_k \complement_S A_k,$$

$$\complement_S(\bigcup_k A_k) = \bigcap_k \complement_S A_k.$$

定理 1.4 中的(6)及其推广称为 De Morgan 公式.这是一个很有用的公式,它使我们能通过余集运算把交集变为并集,把并集变为交集.

该定理的证明留作练习(习题3).

在集合理论中,还有集合列的极限概念.

定义 1.4 假设$\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$为一集合列,令

$$\overline{\lim_{k\to+\infty}} A_k=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n,$$

$$\underline{\lim_{k\to+\infty}} A_k=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}A_n,$$

分别称$\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}} A_k$和$\underline{\lim\limits_{k\to+\infty}} A_k$为集合列$\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$的上极限与下极限.

如果$\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}} A_k=\underline{\lim\limits_{k\to+\infty}} A_k$,则称集合列$\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$的极限存在或收敛,其极限记作

$$\lim_{k\to+\infty} A_k.$$

定理 1.5 对任何集合列$\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$有

(1) $a\in\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}} A_k$ 当且仅当有无穷多个 A_k 含有 a;

(2) $a\in\underline{\lim\limits_{k\to+\infty}} A_k$ 当且仅当存在 $K_a\in\{1,2,\cdots\}$,当 $k\geqslant K_a$ 时恒有 $a\in A_k$.

该定理的证明留作练习(习题7).

定义 1.5 假设$\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$为一集合列.如果$A_k\subset A_{k+1}(k=1,2,\cdots)$,则称该集合列为递增的,记为$A_k\uparrow$.如果$A_{k+1}\subset A_k(k=1,2,\cdots)$,则称该集合列为递减的,记为$A_k\downarrow$.递增与递减集合列统称为单调集合列.

定理 1.6 对任何集合列$\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$有

(1) 如果$A_k\uparrow$,则$\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$收敛,且$\lim\limits_{k\to+\infty} A_k=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$;

(2) 如果$A_k\downarrow$,则$\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$收敛,且$\lim\limits_{k\to+\infty} A_k=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$.

该定理的证明留作练习(习题8).

最后给出集合的对称差和集族的乘积概念.

定义 1.6 对任何集合A,B,称$(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$为集合$A$与$B$的对称差,记作$A\triangle B$.对称差的示意图如图1-4(除去中间深灰色的两侧浅灰色图形部分)所示.

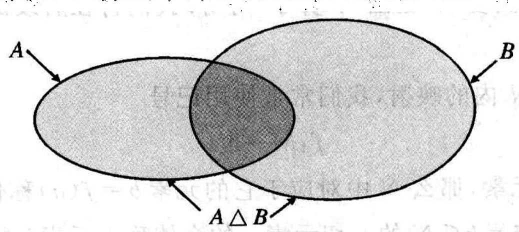

图 1-4 集合的对称差

容易证明

$$A\triangle B=(A\cup B)\backslash(A\cap B).$$

定义 1.7 对任何集合 A,B，称 $\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}$ 为 A 和 B 的直积(Cartesian 积集)，记作 $A\times B$，其中规定

$$(a_1,b_1)=(a_2,b_2)\Leftrightarrow a_1=a_2,b_1=b_2.$$

类似地，

$$\prod_{k=1}^{n}A_k=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_k\in A_k,k=1,2,\cdots,n\},$$

$$\prod_{k=1}^{+\infty}A_k=\{(a_1,a_2,\cdots)\mid a_k\in A_k,k=1,2,\cdots\}.$$

§1.3 集合的势(基数)

1.3.1 映射的概念

在高等数学中，函数的概念可用以下方式引入.

设 X 是数轴上的一个集合，如果对于每一个 $x\in X$，有一个确定的数 $y=f(x)$ 与之对应，则说在集合 X 上定义了一个函数 f. 这时，X 称作给定函数的定义域，而 Y 是该函数取得一切值的全体，称作函数的值域.

如果考虑以任何一个不管具有什么属性的集合来代替数集，那么我们就得到最一般的函数概念.

假设 M 和 N 是两个任意集合，如果对于每一个元素 $x\in M$，有 N 中一个且仅有一个元素 y 与之对应，则说在 M 上定义了 N 中取值的函数 $f(x)$. 对于具有任意属性的集合(正如数集的情形一样)，我们常常用术语“映射”来代替术语“函数”，并且说，一个集合到另一个集合内的映射. 对于具有特殊属性的集合 M 与 N 就产生特殊类型的映射，这些映射都有特殊的名字，如“测度”、“泛函”、“算子”等等. 我们将在后续课程学习中遇到这些映射.

为了表示从 M 到 N 内的映射，我们常常使用记号

$$f:M\to N.$$

如果 a 是 M 中的元素，那么 N 中对应于它的元素 $b=f(a)$ 称作在映射 f 下 a 的像. 我们把 M 中其像为给定元 $b\in N$ 的一切元素 a 的全体称作元素 b 的原像，并记作 $f^{-1}(b)$.

假设

$$f:M\to N,A\subset M,B\subset N,$$

令

$$f(A)=\{f(a)\mid a\in A\},$$
$$f^{-1}(B)=\{a\mid f(a)\in B\}.$$

并规定 $f(\varnothing)=\varnothing$,则称 $f(A)$ 为 A 在映射 f 下的像,$f^{-1}(B)$ 为 B 在映射 f 下的原像. $f^{-1}(B)$ 可能是空集合. 在一般情况下,

$$f(M)\subset N.$$

定义 1.8 如果 $f(M)=N$,则称 f 是从 M 到 N 上的映射;如果对 $a_1,a_2\in M$,且 $a_1\neq a_2$ 有 $f(a_1)\neq f(a_2)$,则称 f 是从 M 到 N 的单射;如果 f 既是单射又是满射,则称 f 是双射或一一对应;如果存在 $b_0\in N$,使得对每一个 $a\in M$ 有 $f(a)=b_0$,即 $f(M)=\{b_0\}$,则称 f 是常值映射;如果 $M=N$,且对每一个 $a\in M$ 有 $f(a)=a$,则称 f 是恒等映射,M 上恒等映射常记为 I_M;如果 $N=\mathbf{R}$(或 $\mathbf{C}$),则称 f 为 M 上的实(或复)函数,这里 $\mathbf{R}$(或 $\mathbf{C}$)为实数(或复数)集.

定义 1.9 假设 $f:M\to N$ 是双射,则对每一个 $b\in N$,有且仅有一个 $a\in M$ 使得

$$f(a)=b.$$

因此定义

$$\begin{aligned}f^{-1}:N&\to M\\ b&\to a=f^{-1}(b),\end{aligned}$$

则 f^{-1} 是 N 到 M 上的双射,称之为 f 的逆映射.

显然,如果 $f:M\to N$ 是双射,则对于 $B\subset N$,$f^{-1}(B)$ 既可看作 B 在映射 f 下的原像,也可视作 B 在映射 f^{-1} 下的像.

定理 1.7 假设 $f:M\to N$ 为映射,$\{A_k\}_k$ 和 $\{B_k\}_k$ 分别是 M 和 N 上的子集族(有限或无限). 那么

$$f(\bigcap_k A_k)\subset\bigcap_k f(A_k),$$
$$f(\bigcup_k A_k)=\bigcup_k f(A_k),$$
$$f^{-1}(\bigcap_k B_k)=\bigcap_k f^{-1}(B_k),$$
$$f^{-1}(\bigcup_k B_k)=\bigcup_k f^{-1}(B_k).$$

该定理的证明留作练习(习题 10).

1.3.2 集合的对等、势

定义 1.10 如果从集合 M 到集合 N 存在双射,则称 M 和 N 对等,记作

$$M\sim N.$$

与之相反的情形,则称 M 和 N 不对等.

此外,约定 $\varnothing\sim\varnothing$.

显然，集合的对等具有以下性质.

定理 1.8 设 A,B,C 为任意集合，则

(1) $A\sim A$（自反性）；

(2) $A\sim B\Rightarrow B\sim A$（对称性）；

(3) $A\sim B,B\sim C\Rightarrow A\sim C$（传递性）.

定理 1.9 假设 $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty}$ 和 $\{B_k\}_{k=1}^{+\infty}$ 为两个集合列，$\{A_k\}_k$ 中任意两个集合不相交，$\{B_k\}_k$ 中的集合也两两不相交，即

$$A_{k_1}\cap A_{k_2}=\varnothing,$$

$$B_{k_1}\cap B_{k_2}=\varnothing(k_1\neq k_2).$$

如果 $A_k\sim B_k(k=1,2,\cdots)$，则

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty}A_k\sim\bigcup_{k=1}^{+\infty}B_k.$$

两个定理的证明直接由定义得到（习题 11）.

根据定理 1.8，我们可以把彼此对等的集合归作一类. 这样，任何一个集合一定属于某一类.

定义 1.11 如果两个集合对等，则称这两个集合具有相同的势（基数），常常使用符号$\overline{\overline{A}}$ 表示集合 A 的势.

1.3.3 可数集与不可数集

习惯上，符号$\aleph_0$（读作“阿列夫零”）来表示自然数集的势，符号$\aleph$（或 C）表示集合$[0,1]$的势（如果某集合具有$\aleph$，则称该集合具有连续统的势）. 对于集合 A，如果 $A=\varnothing$，则规定$\overline{\overline{A}}=0$；如果存在正整数 n 使得 $A\sim\{1,2,\cdots,n\}$，则定义$\overline{\overline{A}}=n$.

定义 1.12 假设 A 为一集合. 如果$\overline{\overline{A}}=n(n\geqslant 0)$，则称 A 为有限集；如果$\overline{\overline{A}}=\aleph_0$，则称 A 为可数集. 不是有限集的集合称为无限集；不是可数集的无限集称为不可数集；有限集与可数集统称为至多可数集.

为了表明可数集的一些性质，我们需要对势进行比较.

如果集合 A 与集合 B 的某一子集对等，则记为

$$\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}};$$

如果 A 与 B 不对等，但 A 与 B 的某一子集对等，则记为

$$\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}.$$

定理 1.10 假设 A 为非空集合，$\mathscr{F}(A)$为 A 的所有子集组成的集合，则$\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{\mathscr{F}(A)}}$.

证明 显然，A 的每个元素所构成的集合组成 $\mathscr{F}(A)$的一个子集并且与 A 对等，因而

$$\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{\mathscr{F}(A)}}.$$

这样只需证明$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{\mathscr{F}(A)}}$不成立即可.

假设$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{\mathscr{F}(A)}}$，则由定义知，存在$f:A\to\mathscr{F}(A)$为双射. 于是$\forall a\in A, f(a)\in\mathscr{F}(A)$，即$f(a)$为$A$的一个子集.

令

$$\widetilde{A}=\{a\mid a\in A, a\overline{\in} f(a)\},$$

则$\widetilde{A}\in\mathscr{F}(A)$. 因为$f$为双射，所以存在唯一的$\tilde{a}\in A$使$f(\tilde{a})=\widetilde{A}$. 如果$\tilde{a}\in\widetilde{A}$，则由$\widetilde{A}$的定义知，$\tilde{a}\overline{\in} f(\tilde{a})=\widetilde{A}$，矛盾；如果$\tilde{a}\overline{\in}\widetilde{A}$，则同样由$\widetilde{A}$的定义知，$\tilde{a}\in f(\tilde{a})=\widetilde{A}$，也矛盾. 因而$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{\mathscr{F}(A)}}$的假设不成立.

定理 1.10 证毕.

定理 1.10 说明，一定存在势比给定集合的势较大的集合. 自然，有这样的问题：对于给定集合A,B,C，在

$$\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}},\ \overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}},\ \overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$$

中是否必有一个成立且只有一个成立呢？当然，答案是肯定的. 但第 1 个问题的讨论较为复杂，本教材不予讨论. 我们研究第 2 个问题，这就是著名 Bernstein 定理.

定理 1.11 假设A,B为两个非空集合，如果存在$P\subset A, Q\subset B$使得

$$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{Q}},\ \overline{\overline{B}}=\overline{\overline{P}},$$

则

$$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}.$$

证明 由题设条件知，存在$f:A\to Q$和$g:B\to P$均为双射. 我们的想法是找到$\widetilde{A}\subset A$及$\widetilde{B}\subset B$，使得f映$\widetilde{A}$为$B-\widetilde{B}$，同时g将$\widetilde{B}$映为$A-\widetilde{A}$，即解方程组

$$\begin{cases} f(\widetilde{A})=B-\widetilde{B}, \\ g(\widetilde{B})=A-\widetilde{A} \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} \widetilde{A}=A-g(\widetilde{B}), \\ \widetilde{B}=B-f(\widetilde{A}). \end{cases} \tag{1.1}$$

为了解式(1.1)，我们使用迭代法，依次作

$$\begin{array}{ll} A_1=A-g(B), & B_1=B-f(A_1), \\ A_2=A-g(B_1), & B_2=B-f(A_2), \\ \vdots & \vdots \\ A_n=A-g(B_{n-1}), & B_n=B-f(A_n), \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

显然，$A_j(j=1,2,\cdots)$都是A的子集，$B_k(k=1,2,\cdots)$都是B的子集，并令$B_0=B$. 因为g为双射，所以

$$g\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty}B_k\right)=\bigcap_{k=1}^{+\infty}g(B_k). \tag{1.2}$$

由定理 1.4 中的 De Morgan 公式和式(1.2)知，

$$
\begin{aligned}
\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j &= \bigcup_{j=1}^{+\infty}(A-g(B_{j-1})) \\
&= A-\bigcap_{j=1}^{+\infty} g(B_{j-1}) \\
&= A-g(\bigcap_{j=1}^{+\infty} B_{j-1}) \\
&= A-g(\bigcap_{j=1}^{+\infty} B_j).
\end{aligned} \tag{1.3}
$$

类似可证：

$$
\bigcap_{k=1}^{+\infty} B_k = B-f(\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j). \tag{1.4}
$$

显然，如果令

$$
\widetilde{A}=\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j,
$$

$$
\widetilde{B}=\bigcap_{k=1}^{+\infty} B_k,
$$

则由式(1.3)和式(1.4)知，$\widetilde{A}$，$\widetilde{B}$ 是方程(1.1)的一对解.

现定义新的映射：

$$
h(a)=\begin{cases} f(a), a\in\widetilde{A}, \\ g^{-1}(a), a\in A-\widetilde{A}, \end{cases}
$$

则 $h: A\to B$ 为双射，即$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$.

定理 1.11 证毕.

推论 1.1 假设集合 A,B,C 满足 $A\subset B\subset C$. 如果$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{C}}$，则

$$
\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}=\overline{\overline{C}}.
$$

该推论的证明留作练习(习题 12).

有了前面的准备工作，我们现在再转到可数集合的讨论. 显然，A 为可数集合的充要条件是 A 中的所有元素可排列成

$$
a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots,
$$

其中，当 $n\neq m$ 时，$a_n\neq a_m$.

定理 1.12 假设 A 为给定集合，

(1) 如果 A 为无限集，则 A 必含有可数子集；

(2) 如果 A 为可数集合，则 A 的任意子集一定至多为可数集合.

证明 (1) 设 A 为无限集，取 $a_1\in A$，由于 $A-\{a_1\}\neq\varnothing$，所以可取 $a_2\in A-\{a_1\}$，又 $A-\{a_1,a_2\}\neq\varnothing$，所以又可取 $a_3\in A-\{a_1,a_2\}$，$\cdots$. 这个过程无限进行下去，因此就得到 A 的一个可数子集$\{a_k\}_{k=1}^{+\infty}$.

(2) 设 A 为可数集合，B 为 A 的无限子集. 则由 $B\subset A$ 知，$\overline{\overline{B}}\leqslant\overline{\overline{A}}$. 由(1)知，

$$
\overline{\overline{B}}\geqslant\aleph_0=\overline{\overline{A}}.
$$

因此由 Bernstein 定理(定理 1.11)知，

$$\overline{\overline{B}}=\overline{\overline{A}}=\aleph_0.$$

定理 1.12 证毕.

定理 1.12 说明可数集合的一个特征：它在所有无限集合中具有最小的势. 下面我们来研究由可数集合出发，通过“并”运算可产生什么样的集合.

定理 1.13 假设 A 为可数集合，B 为有限或可数集合，则 $A\cup B$ 为可数集合.

证明 首先由定理 1.12 的(2)可知，$B-A(\subset B)$为至多可数集合，所以由

$$A\cup B=A\cup(B-A)$$

知，可设 $A\cap B=\varnothing$. 由于可数集合总可以排成无穷序列，不妨设

$$A=\{a_1,a_2,\cdots\},B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}(\text{当 } B \text{ 为有限集合时})$$

或

$$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots\}(\text{当 } B \text{ 为可数集合时}).$$

当 B 为有限集合时(B 中元素排前，A 中元素排后)，

$$A\cup B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n,a_1,a_2,\cdots\};$$

当 B 为可数集合时(交错排列)，

$$A\cup B=\{a_1,b_1,a_2,b_2,\cdots,a_n,b_n,\cdots\}.$$

可见 $A\cup B$ 总可以排成无穷序列，从而为可数集合.

定理 1.13 证毕.

推论 1.2 假设 $A_k(k=1,2,\cdots,n)$是至多可数集合，则 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 也是至多可数集. 但是，如果至少有一个 A_k 为可数集，则 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 必为可数集合.

该推论的证明留作练习(习题 14).

当 A_k 均为可数集合时，推论 1.2 可简记为

$$n\cdot\aleph_0=\overbrace{\aleph_0+\aleph_0+\cdots+\aleph_0}^{n\text{个}}=\aleph_0.$$

定理 1.14 假设 $A_k(k=1,2,\cdots)$均是可数集合，则 $\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty}A_k$ 也是可数集合.

证明 特殊情形：

$$A_j\cap A_k=\varnothing,j\neq k.$$

因为 A_k 都是可数集合，所以可令

$$A_1=\{a_{11},a_{12},a_{13},\cdots\},$$
$$A_2=\{a_{21},a_{22},a_{23},\cdots\},$$
$$A_3=\{a_{31},a_{32},a_{32},\cdots\},$$
$$\vdots$$

从而可将 $\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty}A_k$ 排列成

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k=\{a_{11},a_{21},a_{12},a_{31},a_{22},a_{13},\cdots\}.$$

因此$\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} A_k$ 是可数集合.

请注意：当 A_k 是至多可数集合时，上面的证明仍然适用.

一般情形：

令

$$B_1=A_1,$$

$$B_k=A_k-\bigcup_{j=1}^{k-1} A_j\,(k\geqslant 2),$$

则

$$B_k\cap B_j=\varnothing,j\neq k,$$

且

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k=\bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k.$$

由定理 1.12 知，B_k 是至多可数集.如果只有有限个 B_k 不为空集，则由推论 1.2 知，$\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} B_k$ 为可数集(因为至少 $B_1=A_1$ 为可数集合)；如果有无限多个(必为可数个)B_k 不为空集，则由前面的注意知，$\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} B_k$ 也是可数集合.

故$\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} A_k$ 为可数集合.

定理 1.14 证毕.

定理 1.14 的结果可简记为

$$\aleph_0\cdot\aleph_0=\overbrace{\aleph_0+\aleph_0+\cdots+\aleph_0}^{\text{可数个}}=\aleph_0.$$

例 1.9 有理数全体组成一可数集合.

证明 令

$$A_k=\{\frac{1}{k},\frac{2}{k},\cdots\}(k=1,2,\cdots),$$

则显然 A_k 为可数集合.于是由定理 1.14 知，全体正有理数所组成的集合 $\mathbf{Q}^+=\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} A_k$ 为可数集合.注意到正负有理数可通过对应$f(r)=-r$成为双射，所以全体负有理数所组成的集合 $\mathbf{Q}^-$ 是可数集合.但全体有理数所组成的集合为 $\mathbf{Q}^+\cup\mathbf{Q}^-\cup\{0\}$，故由推论 1.2 知，有理数全体组成一可数集合.

对于集族的乘积集合，我们有

定理 1.15 假设集合$\{A_k\}_{k=1}^n$满足：

$$1\leqslant\overline{\overline{A}}_k\leqslant\aleph_0\,(k=1,2,\cdots,n),$$

且存在 $j\in\{1,2,\cdots,n\}$ 使得$\overline{\overline{A}}_j=\aleph_0$，则$\prod\limits_{k=1}^n A_k$ 为可数集合.