新农村书屋丛书

怎样学丛书

圆和四边形

李红凝　主编

河北人民出版社

怎样学丛书

圆和四边形

李红凝　主编

河北人民出版社

图书在版编目（C I P）数据

圆和四边形/李红凝主编．—石家庄：河北人民出版社，2009．2
（怎样学丛书）
ISBN 978-7-202-05103-0

Ⅰ．圆… Ⅱ．李… Ⅲ．几何课—初中—课外读物 Ⅳ．G634．633

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 201919 号

丛 书 名　怎样学丛书
书　　名　圆和四边形
主　　编　李红凝

出版发行　河北人民出版社（石家庄市友谊北大街 330 号）
印　　刷　河北新华印刷一厂
开　　本　787×1092 毫米　1/32
印　　张　4.5
字　　数　94 000
版　　次　2009 年 2 月第 1 版　　2009 年 2 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-202-05103-0/G·1697
定　　价　7.60 元

目　　录

圆

四　边　形

圆

第一节　奇妙的圆形

圆形，是一个看似简单、实际上却很奇妙的图形.

古代人最早是从太阳，从阴历十五的月亮得到圆的概念的. 一万八千年前的山顶洞人曾经在兽牙、砾石和石珠上钻孔，那些孔有的就很圆.

以后到了陶器时代，许多陶器都是圆的. 圆的陶器是将泥土放在一个转盘上制成的.

当人们开始纺线，又制出了圆形的石纺缍或陶纺缍.

古代人还发现圆的木头滚着走比较省劲，后来他们在搬运重物的时候，就把几段圆木垫在大树、大石头下面滚着走，这样当然比扛着走省劲得多.

大约在 6000 年前，美索不达米亚人，做出了世界上第一个轮子——圆的木盘. 大约在 4000 多年前，人们将圆的木盘固定在木架下，这就成了最初的车子.

会作圆，但不一定就懂得圆的性质. 古代埃及人就认为：圆，是神赐给人的神圣图形. 一直到两千多年前我国的墨子才给圆下了一个定义："一中同长也". 意思是说：圆有一个圆心，圆心到圆周的长都相等. 这个定义比希腊数学家

欧几里得给圆下定义要早 100 年.

圆周率，也就是圆周与直径的比值，是一个非常奇特的数.《周髀算经》上说“径一周三”，把圆周率看成 3，这只是一个近似值. 美索不达米亚人在做第一个轮子的时候，也只知道圆周率是 3.

魏晋时期的刘徽于公元 263 年给《九章算术》作注. 他发现“径一周三”只是圆内接正六边形周长和直径的比值. 他创立了割圆术，认为圆内接正多边形边数无限增加时，周长就越逼近圆周长. 他算到圆内接正 3072 边形的圆周率 $\pi=3927/1250$. 刘徽已经把极限的概念运用于解决实际的数学问题之中，这在世界数学史上也是一项重大的成就.

祖冲之在前人的计算基础上继续推算，求出圆周率在 3.1415926 与 3.1415927 之间，是世界上最早的七位小数精确值，他还用两个分数值来表示圆周率：22/7 称为约率，355/113 称为密率.

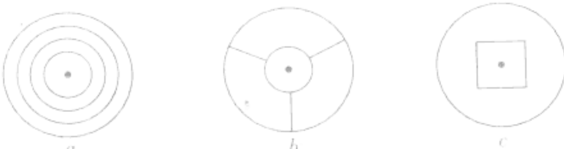
在欧洲，直到 1000 年后的十六世纪，德国人鄂图和安托尼兹才得到这个数值.

现在有了电子计算机，圆周率已经算到了小数点后一千万位以上了.

下面这几个图案中都有圆，它们都是银行的标志，你知道它们各是什么银行的标志吗？

图 1－1

不仅银行的标志，很多来自现实生活的图形中都有圆，例如：



a 一石激起千层浪　b 汽车方向盘　c 铜钱

图 1—2

它们看上去多么美丽与和谐呀！这正是因为圆具有轴对称和中心对称性.

古希腊的数学家认为："一切立体图形中最美的是球形，一切平面图形中最美的是圆形."它的完美来自于中心对称，无论处于哪个位置，都具有同一形状．它最谐调、最匀称.

图 1—3

与圆的对称性有关联的还有哪些性质呢？你想知道吗？那就让我们一起走进圆的世界，去了解圆的性质吧！

知识链接：

圆周率 π

你还记得圆周率 π 吗？

小时候，你可能滚过圆铁环，当你将圆铁环在地上滚动一周后，铁环滚动在地上的痕迹有多长呢？现在你知道，这就是圆铁环的周长 $C=2\pi R$. 你还知道圆的面积是 $S=\pi R^2$.

这里的常数 π 就是我们要认识的圆周率. 它告诉我们，无论什么样的圆，圆周长与直径的比值总是一个常数 π，它是一个无理数.

对于圆周率 π，我国古代数学家早就做出了巨大的贡献. 东汉初年的数学书《周髀算经》里，已经载有“周三径一”，称之为“古率”. 也就是说，直径为 1 的圆，它的周长约等于 3. 西汉末年，刘歆将圆周率 π 定为 3.154 7. 东汉时的张衡求得 π 的两个值，一个是 $\frac{92}{29}=3.172\ 41\cdots$，另一个是 $\sqrt{10}\approx 3.162\ 2$. 一直到了三国时代，刘徽创立了割圆术，得到 $3.141\ 024<\pi<3.142\ 704$. 在刘徽之后重新推算圆周率 π 而做出卓越贡献的是南朝的祖冲之，他推算出 $3.141\ 592\ 6<\pi<3.141\ 592\ 7$，是世界上第一个将圆周率 π 准确到 7 位小数的人. 祖冲之还用了两个近似于 π 的分数值. 一个是 $\frac{22}{7}=3.142\ 857$，这个数比 π 大 $0.001\ 2\cdots$，称为约率；另一个是 $\frac{355}{113}=3.141\ 592\ 9$，这个数就相当接近于 π 了，比 π 只大 $0.000\ 000\ 2\cdots$，称为密率.


图 1—4

古希腊伟大的数学家阿基米德用圆的内接和外切多边形逼近圆周，得到了 $3.140\ 845\cdots=\frac{223}{71}<\pi<\frac{22}{7}=3.142\ 857\cdots$.

随着时代的发展，信息技术的进步，计算圆周率 π 的准确值的工作突飞猛进．50 年代得到千位以上，60 年代则达到 50 万位，70 年代的最高记录是 100 万位，80 年代得到 1 亿位，到了 20 世纪末，运用计算机获得圆周率 π 的 6 442 450 938 位有效数字．

随着科学技术的发展与进步，圆周率 π 的有效数字会越算越多，但你可以发现，它的小数部分永远不会结束，也永远不会循环，它的确是一个无限不循环小数，也就是无理数．

第二节　有关圆的认识

一、圆的基本元素

1．我们可以用圆规画出一个圆：圆是到定点的距离等于定长的点的集合．如图所示，这个定点是圆的圆心，连结圆心与圆上任意一点所得的线段是圆的半径．圆的位置由圆心确定，圆的大小由半径长度确定，半径相等的两个圆为等圆．图中这个以 O 点为圆心

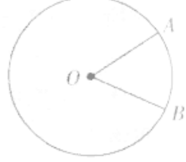


图 1—5

的圆叫作“圆 O”，记为“$\odot O$”.

2.（1）如右图，线段 OA、OB、OC 都是$\odot O$的半径，线段 AC 为直径.

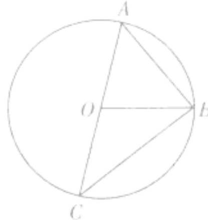


图 1—6

（2）连结圆上任意两点所得到的线段称为弦，图中线段 AB、BC、AC 都是$\odot O$ 中的弦.（直径是特殊的弦）

（3）圆上任意两点间的部分叫做弧. 例如图中曲线 BC、BAC 都是圆 O 中的弧. 分别记作 $\overset{\frown}{BC}$、$\overset{\frown}{BAC}$，其中像 $\overset{\frown}{BC}$ 这样小于半圆周的圆弧叫做劣弧，像 $\overset{\frown}{BAC}$ 这样大于半圆周的圆弧叫做优弧.

（4）像图中$\angle AOB$、$\angle BOC$ 这样的角就是圆心角.

二、圆的对称性

1. 圆是一个旋转对称图形，无论绕圆心旋转多少度，它都能与自身重合，对称中心即为其圆心.

如图 1—7，扇形 AOB 旋转到扇形 $A'OB'$ 的位置. 我们可以发现，在旋转过程中，$\angle AOB=\angle A'OB'$，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$，$AB=A'B'$.

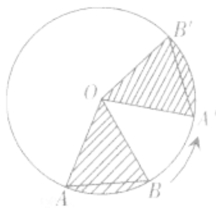


图 1—7

由于圆心角$\angle AOB$（或弧 AB，或弦 AB）确定了扇形 AOB 的大小，所以，**在一个圆中，如果圆心角相等，那么它所对的弧相等，所对的弦相等.**

同样，也可以得到：

在一个圆中，如果弧相等，那么所对的圆心角相等，所对的弦相等.

在一个圆中，如果弦相等，那么所对的圆心角相等，圆

心角所对的弧相等.

可以把这三个结论概括成一句话：在同圆（或等圆）中，两个圆心角、两条弧、两条弦中有一组量相等，它们所对的其余各组量也相等.

2. 由圆的轴对称性得到的性质→垂径定理及其推论.

我们知道圆是轴对称图形，经过圆心的每一条直线都是它的对称轴，就是说圆有无数条对称轴，圆的这一性质为我们提供了许多结论.

如图1－8，如果在圆形纸片上任意画一条垂直于直径CD的弦AB，垂足为E，再将纸片沿着直径CD对折，可以得到$AE=BE$，$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$.

由此我们可以得到性质：垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分这条弦所对的两条弧.

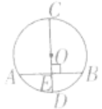


图1－8

就是说，这个性质的条件有两个，一个是垂直，一个是直径，如图1－8，其题设与结论可以用符号语言表达为：

$$\left.\begin{array}{l}CD\text{过圆心},\\ CD\perp AB\text{于}E\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}AE=BE,\\ \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}\\ \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}\end{array}\right.$$

由这一性质我们还可以推得：

（1）平分弦（不是直径）的直径垂直于弦并且平分弦所对的两条弧；

（2）弦的垂直平分线经过圆心，并且平分弦所对的两条弧；

（3）平分弦所对的一条弧的直径，垂直平分弦，并且平分弦所对的另一条弧.

这里（1）的表示形式中，由于一个圆的任意两条直径

总是互相平分的，但它们不一定互相垂直，所以（1）中必须加上"弦不是直径"这一限制条件.

给出条件：①过圆心；②垂直于弦；③平分这条弦；④平分这条弦所对的劣弧；⑤平分这条弦所对的优弧．如果一条直线满足以上五个条件中的任意两个，便可推出另外三个也成立．如由①、②可推出③、④、⑤，这就是垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分这条弦所对的两条弧；由①、③（这条弦非直径）可推出②、④、⑤，这就是平分弦（不是直径）的直径垂直于弦并且平分弦所对的两条弧；由②、③可推出①、④、⑤，这就是弦的垂直平分线经过圆心，并且平分弦所对的两条弧；由①、④（或⑤）可推出②、③、⑤（或④），这就是平分弦所对的一条弧的直径，垂直平分弦，并且平分弦所对的另一条弧.

事实上，除了上面的几种情况以外，还有如下几种情形：

②④→①③⑤；②⑤→①③④；③④→①②⑤；③⑤→①②④；④⑤→①②③.

值得注意的是，在性质中所说的"径"可以是直径，可以是半径，也可以是过圆心的直线或线段.

利用上面的性质可以解决许多与圆有关的问题．主要有以下几个用途：

（1）因为"垂直于弦的直径平分弦所对的弧"，所以可以利用这一性质来解决日常生活中平分弧的问题.

（2）利用"弦的垂直平分线过圆心"这一性质可以定出圆形工件的圆心.

（3）这些性质还常常与勾股定理、等腰三角形等知识综

合运用．如证明与圆有关的线段相等或垂直的问题，常作的辅助线是过圆心作弦的垂线．

例 1 如图 1—9 所示，水平放着的圆柱形排水管的截面半径为 0.5m，其中水面宽 AB 为 0.6m，则水的最大深度为______ m.

解：连结 OA，则 $OA=0.5$m，过点 O 作 $OC\perp AB$ 于 C，则 $AC=\frac{1}{2}AB=0.3$m.

图 1—9

在 Rt $\triangle ACO$ 中，$CO=\sqrt{OA^2-AC^2}=\sqrt{0.5^2-0.3^2}=\sqrt{0.16}=0.4$（m）.

因此水的最大深度为 $0.4+0.5=0.9$（m）.

三、圆周角

如图 1—10 在足球比赛场上，甲、乙两名队员互相配合向对方球门 MN 进攻，当甲带球冲到 A 点时，乙已跟随冲到 B 点．从数学角度看，此时甲是自己射门好，还是将球传给乙，让乙射门好？

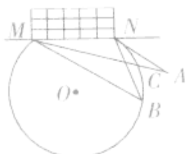


图 1—10

要解决足球场上的这个问题，就要用到我们要学习的圆周角，什么是圆周角呢？

1．顶点在圆上，两边与圆都相交的角叫做圆周角，如图 1—11 中，$\angle ACB$ 都是圆周角．

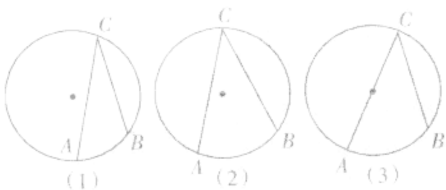


图 1—11

特别注意：（1）圆周角具备两大特征：①顶点在圆周上，②角的两边都与圆相交，二者缺一不可.

（2）圆周角与圆心角有区别，也有联系. 圆心角的顶点在圆心，圆周角的顶点在圆上，它们都强调两边与圆相交.

如图 1—12，只有③是圆周角，而①②④⑤都不是圆周角.

①　②　③　④　⑤

图 1—12

2. 圆周角的性质.

（1）①分别量一量图 1—13 中弧 AB 所对的两个圆周角的度数，比较一下. 再变动点 C 在圆周上的位置，看看圆周角的度数有没有变化. 你发现其中有什么规律吗？

②分别量出图 1—13 中弧 AB 所对的圆周角和圆心角的度数，比较一下，你发现什么？

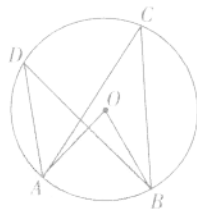


图 1—13

我们可以发现，圆周角的度数没有变化. 并且圆周角的度数恰好为同弧所对的圆心角的度数的一半.

由上述操作可以猜想：在一个圆中，一条弧所对的任意一个圆周角的大小都等于该弧所对的圆心角的一半.

接下来验证这个猜想：

分三种情况讨论：圆心在角的一边上；圆心在角的内部；圆心在角的外部，如图 1—14 所示，后两种情况可转化成第一种情况来说明.

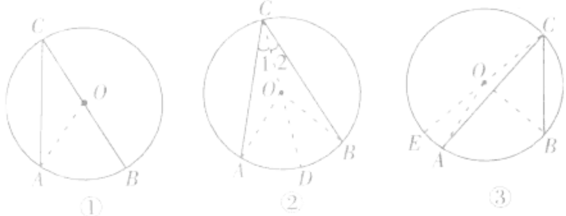


图 1—14

下面我们分三种情况来证明这个结论.

第一种情况：圆心 O 在$\angle ACB$ 的<u>一边上</u>，如图 1—14 ①.

$\because OA=OC$，$\therefore \angle ACB=\angle A$. 又$\because \angle AOB$ 是$\triangle OAC$ 的一个外角，

$\therefore \angle AOB=\angle ACB+\angle A$，即$\angle AOB=2\angle ACB$.

第二种情况：圆心 O 在$\angle ACB$ 的<u>内部</u>，如图 1—14②.

连结 CO 并延长交$\odot O$ 于点 D，

由①的结论知$\angle 1=\frac{1}{2}\angle AOD$，$\angle 2=\frac{1}{2}\angle BOD$，

$\therefore \angle 1+\angle 2=\frac{1}{2}$（$\angle AOD+BOD$），即$\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB$.

第三种情况：圆心在$\angle ACB$ 的<u>外部</u>，如图 1—14③.

连结 CO 并延长交$\odot O$ 于点 E，

由①的结论知$\angle BCE=\frac{1}{2}\angle BOE$，$\angle ACE=\frac{1}{2}\angle AOE$.

$\therefore \angle BCE-\angle ACE=\frac{1}{2}(\angle BOE-\angle AOE)$，即$\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB$，至此，我们证明了圆周角的第一条性质：

同弧所对的圆周角等于圆心角的一半.

（2）由（1）可推得：

同圆（或等圆）中，同弧或等弧所对的圆周角相等；相等的圆周角所对的弧也相等.

（3）由（1）可推得：

半圆或直径所对的圆周角是直角，90°的圆周角所对的弦是直径.

第三节　点与圆的位置关系（过三点的圆）

一、点与圆的位置关系

足球运动员踢出的地滚球在球场上滚动，在其穿越中间圆形区域的过程中，足球与这个圆有怎样的位置关系呢？

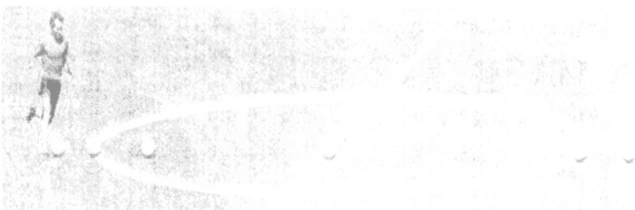


图 1—15