全国硕士研究生入学考试辅导丛书

2010

樊博头考研系列

全国硕士研究生入学考试

标准模拟考场

数学分册（数学一、二）

全国硕士研究生入学考试命题研究组 编

- 原命题组成员、阅卷组组长亲自编写，融合北京大学、清华大学权威讯息
- 深度梳理命题轨迹，解析详尽、规避误区，培养最佳解题思路
- 以题型训练为核心，全面展现题型变换
- 凸显历年试题精华，明示命题原则与规律，把握命题脉搏
- 注重实战，讲求技巧，切实提升综合应试能力

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

全国硕士研究生入学考试辅导丛书

全国硕士研究生入学考试标准模拟考场

数学分册(数学一、二)

全国硕士研究生入学考试命题研究组 编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

全国硕士研究生入学考试标准模拟考场. 数学分册(数学一、二)/全国硕士研究生入学考试命题研究组编. —杭州：浙江大学出版社，2009.4
(全国硕士研究生入学考试辅导丛书)
ISBN 978-7-308-06682-2

Ⅰ. 全… Ⅱ. 全… Ⅲ. 高等数学—研究生—入学考试—习题 Ⅳ. G643-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 045200 号

全国硕士研究生入学考试标准模拟考场·数学分册(数学一、二)
全国硕士研究生入学考试命题研究组 编

责任编辑 张 明
从书策划 樊晓燕 杨晓鸣
出版发行 浙江大学出版社
(杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028)
(网址：http://www.zjupress.com)
排 版 杭州大漠照排印刷有限公司
印 刷 德清县第二印刷厂
开 本 889mm×1194mm 1/16
印 张 15
字 数 394 千
版 印 次 2009 年 4 月第 1 版 2009 年 4 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-308-06682-2
定 价 30.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话(0571)88925591

前　　言

2009年全国硕士研究生入学考试已经拉下了帷幕，超过124万人参加了这场规模空前的选拔性考试。参加人数的增多，录取率的有限，更显现了竞争的激烈程度。为了指导参加2010年全国硕士研究生入学统一考试的广大考生数学考试的复习，根据最新考试大纲的要求，我们组织部分多年来参加考试大纲制订和修订工作及参加考前辅导的教授、专家编写了这本《全国硕士研究生入学考试标准模拟考场·数学分册(数学一、二)》，以供广大考生复习使用。

本书的特点如下：

一、作者阵容强大，预测具有权威性

本套丛书的主编都是考研培训学校的首席主讲专家，他们都在全国各地考研辅导学校一线亲自辅导广大考生的考前复习，并有多年考研培训和教育工作经历，有相当丰富的辅导和教学工作经验，深谙研究生入学考试的命题规律和出题动态，同时又结合了清华大学、北京大学和中国人民大学的权威信息，浓缩成本书模拟试卷。

二、紧扣最新大纲，高效预测

本套模拟试卷系列严格按照最新考试大纲进行编写，题型和题量与实际考试试题一致，紧紧联系当前的考试动态以及最新形式，注重实际操作训练。每套试卷均由一线著名专家精选材料、题题推敲、优化设计编制完成。

三、启迪备考，极具操作性

许多考生缺乏实际临场经验。本套模拟考场系列考卷将精辟阐明解题思路，全面展现题型变化，将浩渺的习题浓缩于有限的模拟题目中，迅速提高考生快速、准确、灵活的解题能力，为考研学子全程领航和理性分析，引领考生高效通过考研难关。

首先不论是数学理论的建立，还是数学运算和逻辑推理，无一不是以明确而又清晰的概念为基础的。考生应系统掌握大纲规定的基础知识，对大纲规定的内容进行梳理，形成知识网络。其次，在接触一定量的题型之后，头脑中留下的不应是纷繁的题目，而应是清晰、鲜明、深刻的基础知识和基本技能，以及基本的数学思想和方法。

解题时既要考虑解题的通性解法，又要分析它的特殊性，寻求最佳解决方法，以提高解题

能力和对新题型的适应能力。考生复习时演练一定数量的习题是非常必要的，它是提高考试成绩的重要手段，但也不要搞题海战术，重要的是要吃透大纲规定的基本考点，提高分析问题和解决问题的能力。

本书是北京大学、清华大学和中国人民大学等校广大数学教师及原考研命题组的专家、教授智慧和劳动的结晶，是一份宝贵的资料。其中的每一道试题，既反映了考研数学考试大纲对考生数学知识、能力和水平的要求，又蕴涵着命题的指导思想、基本原则和趋势。因此，对照考试大纲分析、研究这些试题，考生不仅可以了解考研以来数学考试的全貌，而且可以方便地了解有关试题和信息，从中发现规律，归纳出各部分内容的重点、难点，以及常考的题型，进一步把握考试的特点及命题的思路和规律，从而从容应考，轻取高分。

由于时间仓促，书中疏漏之处在所难免，诚请专家和读者指正。

编者

于清华园

目　　录

第一部分　数学一标准模拟考场

一、模拟试卷

模拟试卷(一) …… 1
模拟试卷(二) …… 5
模拟试卷(三) …… 9
模拟试卷(四) …… 13
模拟试卷(五) …… 17
模拟试卷(六) …… 21
模拟试卷(七) …… 25
模拟试卷(八) …… 29
模拟试卷(九) …… 33
模拟试卷(十) …… 37

二、参考答案与解析

模拟试卷(一)参考答案与解析 …… 41
模拟试卷(二)参考答案与解析 …… 48
模拟试卷(三)参考答案与解析 …… 54
模拟试卷(四)参考答案与解析 …… 59
模拟试卷(五)参考答案与解析 …… 66
模拟试卷(六)参考答案与解析 …… 74
模拟试卷(七)参考答案与解析 …… 80
模拟试卷(八)参考答案与解析 …… 87
模拟试卷(九)参考答案与解析 …… 94
模拟试卷(十)参考答案与解析 …… 101

第二部分　数学二标准模拟考场

一、模拟试卷

模拟试卷(一) …… 109

模拟试卷(二) …… 113

模拟试卷(三) …… 117

模拟试卷(四) …… 121

模拟试卷(五) …… 125

模拟试卷(六) …… 129

模拟试卷(七) …… 133

模拟试卷(八) …… 137

模拟试卷(九) …… 141

模拟试卷(十) …… 145

二、参考答案与解析

模拟试卷(一)参考答案与解析 …… 149

模拟试卷(二)参考答案与解析 …… 158

模拟试卷(三)参考答案与解析 …… 166

模拟试卷(四)参考答案与解析 …… 173

模拟试卷(五)参考答案与解析 …… 182

模拟试卷(六)参考答案与解析 …… 190

模拟试卷(七)参考答案与解析 …… 200

模拟试卷(八)参考答案与解析 …… 210

模拟试卷(九)参考答案与解析 …… 218

模拟试卷(十)参考答案与解析 …… 226

第一部分　数学一标准模拟考场

一、模拟试卷

模拟试卷(一)

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的横线上.

1. 当 $x \to 1$ 时，函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限________.

A. 等于2　　B. 等于0　　C. 为 ∞　　D. 不存在但不为 ∞

2. 已知曲面 $z = 4 - x^2 - y^2$ 上点 P 处的切平面平行于平面 $2x + 2y + z - 1 = 0$，则点 P 的坐标是________.

A. $(1,-1,2)$　　B. $(-1,1,2)$　　C. $(1,1,2)$　　D. $(-1,-1,2)$

3. $\displaystyle\int\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)dx =$ ________.

A. $2(\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2})+C$　　B. $2(\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2})+C$

C. $\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}+C$　　D. $\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}+C$

4. 若 $3a^2 - 5b < 0$，则方程 $x^5 + 2ax^3 + 3bx + 4c = 0$ ________.

A. 无实根　　B. 有唯一实根

C. 有三个不同的实根　　D. 有五个不同的实根

5. 已知 $\boldsymbol{\beta}_1$、$\boldsymbol{\beta}_2$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同的解，$\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$ 是对应齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，k_1,k_2 为任意常数，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解（一般解）必是________.

A. $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$　　B. $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$

C. $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$　　D. $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$，则 $\boldsymbol{A}$ ________.

A. 必有一列元素全为0

B. 必有两列元素对应成比例

C. 必有一列向量是其余列向量的线性组合

D. 任一列向量是其余列向量的线性组合

7. 设随机变量 $X \sim t(n)(n>1)$，$Y=\dfrac{1}{X^2}$，则________.

A. $Y \sim \chi^2(n)$　　B. $Y \sim \chi^2(n-1)$　　C. $Y \sim F(n,1)$　　D. $Y \sim F(1,n)$

8. 设随机变量X具有密度函数$f(x)=\begin{cases}6x(1-x), & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$则$P\left\{|X-E(X)|<2\right\}=$

________.

A. 1　　B. 0.5　　C. 0.4　　D. 0.2

二、填空题：9～14小题，每小题4分，共24分，请将答案写在答题纸指定位置上.

9. 设$\begin{cases}x=f(t)-\pi,\\ y=f(e^{3t}-1),\end{cases}$其中$f$可导，且________.

10. 更换二次积分$I=\int_0^2 dx\int_0^{\frac{x^2}{2}} f(x,y)dy+\int_0^{\sqrt{8}} dx\int_2^{\sqrt{8-x^2}} f(x,y)dy$的积分顺序，变为________.

11. 设函数$z=z(x,y)$由方程$F(x-az,y-bz)=0$所给出，其中$F(u,v)$任意可微，则$a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ________.

12. 星形线$\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t,\end{cases}$$(a>0)$绕$Ox$轴旋转所得旋转曲面的面积为________.

13. 从$\mathbf{R}^2$的基$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$到基$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$的过渡矩阵为________.

14. 设随机变量X服从于参数为$(2,p)$的二项分布，随机变量Y服从于参数为$(3,p)$的二项分布，若$P\{X\geqslant 1\}=\dfrac{5}{9}$，则$P\{Y\geqslant 1\}=$ ________.

三、解答题：15～23小题，共94分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本题满分9分）

设$z=f(e^x\sin y,x^2+y^2)$，其中f具有二阶连续偏导数，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

16.（本题满分9分）

已知$\int_0^{\pi}\dfrac{\cos x}{(x+2)^2}dx=A$，　求$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x\cos x}{x+1}dx$.

17.（本题满分 11 分）

计算二重积分$\iint\limits_{D} e^{\max\{x^2,y^2\}}\,dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$.

18.（本题满分 11 分）

计算 $I=\iiint\limits_{\Omega} z\,dxdydz$，$\Omega$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 与抛物面 $x^2+y^2=3z$ 所围形成.

19.（本题满分 10 分）

将函数 $f(x)=2+|x|(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 展开成以 2 为周期的傅里叶级数，并由此求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 的和.

20.（本题满分 11 分）

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}$，已知线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有解但不唯一，试求：(1) a 的值；(2) 正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}$ 为对矩阵.

21.（本题满分 11 分）

求一个正交变换，化二次型 $f = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_2x_3$ 为标准形.

22.（本题满分 11 分）

设总体 $X \sim N(\mu,8)$，μ 未知，$X_1,X_2,\cdots,X_{36}$ 是取自 X 的一个简单随机样本，如果以区间 $(\overline{X}-1,\overline{X}+1)$ 作为 μ 的置信区间，求置信度 $\left(\overline{X} - \dfrac{1}{36}\sum_{i=1}^{36} X_i\right)$.

23.（本题满分 11 分）

设随机变量 X 和 Y 相互独立且都服从正态分布 $N(0,1)$，而 $X_1,X_2,\cdots,X_9$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_9$ 分别是来自总体 X 和 Y 的简单随机样本，求统计量

$$Z = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_9}{\sqrt{Y_1^2 + Y_2^2 + \cdots Y_9^2}}$$

所服从的分布，并指明参数.

模拟试卷(二)

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的横线上.

1. 当 $x>0$ 时，曲线 $y=x\sin\frac{1}{x}$ ________.

A. 有且仅有水平渐近线　　B. 有且仅有铅直渐近线

C. 既有水平渐近线，也有铅直渐近线　　D. 既无水平渐近线，也无铅直渐近线

2. 设 $I=\iiint\limits_{\Omega}\left|\sqrt{x^2+y^2+z^2}-1\right|\mathrm{d}V$，其中 Ω 是由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=1$ 所围立体，则 $I=$ ________.

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{6}(\sqrt{2}-1)$　　C. $\frac{\pi}{6}(\sqrt{2}+1)$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{6}\pi$

3. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处满足 $f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=0,f^{(n+1)}(0)>0$，则________.

A. 当 n 为偶数时，$x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点

B. 当 n 为偶数时，$x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点

C. 当 n 为奇数时，$x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点

D. 当 n 为奇数时，$x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点

4. 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续，且 $f(0)=0,\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则在点 $x=0$ 处 $f(x)$ ________.

A. 不可导　　B. 可导，且 $f'(0)\neq0$

C. 取得极大值　　D. 取得极小值

5. 设 X、Y 是相互独立的随机变量，其分布函数分别为 $F_X(x)$、$F_Y(y)$，则 $Z=\min(X,Y)$ 的分布函数是________.

A. $F_Z(z)=\max[F_X(x),F_Y(y)]$　　B. $F_Z(z)=\min[F_X(x),F_Y(y)]$

C. $F_Z(z)=1-[1-F_X(x)][1-F_Y(y)]$　　D. $F_Z(z)=F_Y(y)$

6. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geqslant2)$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，则________.

A. $n\overline{X}\sim N(0,1)$　　B. $nS^2\sim\chi^2(n)$

C. $\frac{(n-1)\overline{X}}{S}\sim t(n-1)$　　D. $\frac{(n-1)X_1^2}{\sum\limits_{i=2}^{n}X_i^2}\sim F(1,n-1)$

7. 设随机变量 X 和 Y 相互独立，X 在区间(0,2)上服从均匀分布，Y 服从参数为1的指数分布，则概率 $P\{X+Y>1\}=$ ________.

A. $1-\frac{1}{2}\mathrm{e}$　　B. $1-\mathrm{e}$　　C. e　　D. $2\mathrm{e}$

8. 设二维随机变量(X,Y)服从二维正态分布，则下列说法法不正确的是________.

A. X、Y一定相互独立

B. X、Y的任意线性相合l_1X+l_2Y服从于一维正态分布

C. X、Y分别服从于一维正态分布

D. 当参数$\rho=0$时，X、Y相互独立

二、填空题：9～14小题，每小题4分，共24分，请将答案写在答题纸指定位置上.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin t\mathrm{d}t-\ln\sqrt{1+x^2}}{x^4}=$________.

10. 球面$x^2+y^2+z^2=9$与平面$x+z=1$的交线在yOz平面上的投影方程为________.

11. 已知两条直线的方程是L_1：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-3}{-1}$；$L_2$：$\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{1}{z}$. 则过$L_1$而平行于$L_2$的平面方程是________.

12. 微分方程$y'+y\tan x=\cos x$的通解为$y=$________.

13. 已知三维线性空间的一组基底为$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,1)$，则$\boldsymbol{\mu}=(2,0,0)$在上述基底下的坐标是________.

14. 二维随机变量(X,Y)在区域D：$\{(x,y)\mid a<x<b,c<y<d\}$上服从均匀分布，则$X$的边缘密度函数为$f_X(x)=$________.

三、解答题：15～23小题，共94分. 请将解答写在答题纸指定的位置上解答. 应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本题满分9分）

将函数$f(x)=\arctan\dfrac{1-2x}{1+2x}$展开成$x$的幂级数，并求级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$的和.

16.（本题满分9分）

求微分方程$y''+4y'+4y=\mathrm{e}^{-2x}$的通解(一般解).

17.（本题满分 11 分）

计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega}(x+z)\mathrm{d}V$，其中$\Omega$是由曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$所围成的区域.

18.（本题满分 11 分）

设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，$(0,1)$内可导，且$3\int_{\frac{2}{3}}^{1}f(x)\mathrm{d}x=f(0)$. 证明在$(0,1)$内存在一点，使$f'(c)=0$.

19.（本题满分 10 分）

设函数$f(x)$在$[a,b]$上满足$a\leqslant f(x)\leqslant b$，$|f'(x)|\leqslant q<1$，令$u_n=f(u_{n-1})$，$n=1,2,3,\cdots$；$u_0\in[a,b]$. 证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}-u_n)$绝对收敛.

20.（本题满分 11 分）

设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，向量组$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$、$\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，问：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1$能否由$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表出?证明你的结论.

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$能否由$\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表出?证明你的结论.

21.（本题满分 11 分）

设线性方程组$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$，三阶矩阵 $\boldsymbol{B} \neq 0$，且 $\boldsymbol{AB} = 0$，试求λ 值.

22.（本题满分 11 分）

设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X \sim N(0,\sigma^2)$，$Y \sim N(0,\sigma^2)$.

求：$E(\sqrt{X^2+Y^2})$，$D(\sqrt{X^2+Y^2})$.

23.（本题满分 11 分）

设随机变量 X 与 Y 独立，且 X 服从均值为 1、标准差(均方差)为$\sqrt{2}$ 的正态分布，而 Y 服从标准正态分布. 试求随机变量 $Z = 2X - Y + 3$ 的概率密度函数.

模拟试卷(三)

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的横线上.

1. 已知$f(x)$在$x=0$某邻域内连续，且$f(0)=0,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则在点$x=0$处$f(x)$________.

A. 不可导　　B. 可导且$f'(x)\neq 0$

C. 取得极大值　　D. 取得极小值

2. 曲线$y=e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$的渐近线有________.

A. 1条　　B. 2条　　C. 3条　　D. 4条

3. 设α为常数，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sin n\alpha}{n^2}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$为________.

A. 绝对收敛　　B. 条件收敛

C. 发散　　D. 收敛性与α的取值有关

4. 球面$x^2+y^2+z^2=a^2$含在$x^2+y^2=ax$内部的面积$S=$________.

A. $4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\dfrac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}rdr$　　B. $8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\dfrac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}rdr$

C. $16\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\dfrac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}rdr$　　D. $4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\dfrac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}rdr$

5. 设$\boldsymbol{A}$是n阶方阵，线性方程组$\boldsymbol{AX}=0$有非零解，则线性非齐次方程组$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$对任何$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$________.

A. 不可能有唯一解　　B. 必有无穷多解

C. 无解　　D. 或有唯一解，或有无穷多解

6. 已知$\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,1,a,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(-2,1,5,a)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(a,2,10,1)^{\mathrm{T}}$是四阶方阵$\boldsymbol{A}$的属于三个不同特征值的特征向量，则$a$的取值为________.

A. $a\neq 5$　　B. $a\neq -4$　　C. $a\neq -3$　　D. $a\neq -3$且$a\neq -4$

7. 设X、Y是两个随机变量，且$P\{X\leqslant 1,Y\leqslant 1\}=\dfrac{4}{9},P\{X\leqslant 1\}=P\{Y\leqslant 1\}=\dfrac{5}{9}$，则$P\{\min(X,Y)\leqslant 1\}=$________.

A. $\dfrac{4}{9}$　　B. $\dfrac{20}{81}$　　C. $\dfrac{2}{3}$　　D. $\dfrac{1}{3}$

8. 设随机变量X的数学期望$E(X)=\mu$，方差$D(X)=\sigma^2$，则由切比雪夫不等式，有$P\{|X-\mu|\geqslant 3\sigma\}\leqslant$________.

A. $\dfrac{1}{9}$　　B. 1　　C. 0.5　　D. 0.2

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

9. 若 $g(x)=\begin{cases}x^2\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 又 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\{f[g(x)]\}\big|_{x=0}$ $=$ ________.

10. 函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $M(1,2,-2)$ 处的梯度 $\mathrm{grad}u\,|_M=$ ________.

11. 已知 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某个邻域内可展成泰勒级数，且 $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{n^2}(n=1,2,\cdots)$，则 $f''(0)$ ________.

12. 向量场 $\boldsymbol{u}(x,y,z)=xy^2\boldsymbol{i}+ye^z\boldsymbol{j}+x\ln(1+z^2)\boldsymbol{k}$ 在点 $\boldsymbol{P}(1,1,0)$ 处的散度 $\mathrm{div}\boldsymbol{u}=$ ________.

13. 曲线 $r=3\cos\theta, r=1+\cos\theta$ 所围图形的公共部分面积 $A=$ ________.

14. 已知 $\boldsymbol{A}_1=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}A_1 & \\ & A_2^{-1}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}^*$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵，则 $|\boldsymbol{B}^*|=$ ________.

三、解答题：15 ~ 23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上解答，应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本题满分 9 分）

设 $f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x\leqslant 0,\\ e^{-x}, & x>0.\end{cases}$ 求 $\displaystyle\int_1^3 f(x-2)\,\mathrm{d}x$.

16.（本题满分 9 分）

已知两曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\displaystyle\int_0^{\arctan x}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ 在点 $(0,0)$ 处的切线相同，写出此切线方程，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}nf\left(\dfrac{2}{n}\right)$.