

亚南专转本丛书

“专转本”

高等数学

Advanced
Calculus

宝典

主编 浦志勤

河海大学出版社

亚南专转本丛书

“专转本”

高等数学

主 编 浦志勤

河海大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/浦志勤主编. —南京:河海大学出版社,
2008.9

(亚南专转本丛书)

ISBN 978-7-5630-2520-6

I. 高… II. 浦… III. 高等数学—成人教育:高
等教育—升学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 141021 号

- 书 名 高等数学
丛 书 名 亚南专转本丛书
书 号 ISBN 978-7-5630-2520-6/O · 145
责任编辑 代江滨
责任校对 蒋振云
封面设计 张世立
出版发行 河海大学出版社
地 址 南京市西康路 1 号(邮编:210098)
电 话 (025)83737852(总编室) (025)83722833(发行部)
经 销 江苏省新华书店
印 刷 如皋市印刷有限公司
开 本 787 毫米×1092 毫米 1/16 13.5 印张 350 千字
版 次 2008 年 9 月第 1 版 2008 年 9 月第 1 次印刷
定 价 26.00 元

本书如有印装问题,请与 025-85481107 联系调换。

前 言

本书是按照江苏省教育厅文件苏教学[2008]3号的精神,根据2001年至2008年江苏省普通高校高等数学“专转本”入学考试真题以及我们多年来的辅导经验和实践成果精心编写而成的。

为了使广大江苏专转本同学更好地掌握高等数学的基本概念、基本理论与方法,提高解题能力以及分析问题、解决问题的能力,我们给同学们提供了这本行之有效的学习辅导书。全书分为十二章,每章包括:基本要求、考试范围、解题方法归纳、最新真题精析、同步自测题和同步自测题解答。在解题方法归纳和同步自测题中配置了一定量的题目;对典型解题方法,给出了解题步骤。本书参考答案力求简明、易懂。

为了帮助江苏专转本同学全面了解专转本高等数学考试题型、内容、难易度,便于检验自己的高等数学水平,特将最有参考价值的考试试卷(2006年、2007年、2008年)、模拟试卷(两套)及模拟试卷答案(两套)作为附录收入书中,供考生参考。

本书由浦志勤、李强编写。

由于编者水平有限,不妥之处,请各位同行、读者提出批评、建议。(电子信箱 puzhiqin@hotmail.com)

编 者

2008年8月于南师紫金

目 录

第一章 函数	1
一、基本要求	1
二、考试范围	1
三、解题方法归纳	2
四、最新真题精析	6
五、同步自测题(一)	6
第二章 极限与连续	9
一、基本要求	9
二、考试范围	9
三、解题方法归纳	13
四、最新真题精析	18
五、同步自测题(二)	20
第三章 导数与微分	24
一、基本要求	24
二、考试范围	24
三、解题方法归纳	27
四、最新真题精析	33
五、同步自测题(三)	35
第四章 中值定理与导数的应用	39
一、基本要求	39
二、考试范围	39
三、解题方法归纳	43
四、最新真题精析	51
五、同步自测题(四)	54
第五章 不定积分	58

一、基本要求	58
二、考试范围	58
三、解题方法归纳	61
四、最新真题精析	66
五、同步自测题(五)	67
第六章 定积分	70
一、基本要求	70
二、考试范围	70
三、解题方法归纳	73
四、最新真题精析	79
五、同步自测题(六)	81
第七章 定积分的应用	84
一、基本要求	84
二、考试范围	84
三、解题方法归纳	86
四、专转本真题精析	89
五、同步自测题(七)	91
第八章 常微分方程	93
一、基本要求	93
二、考试范围	93
三、解题方法归纳	97
四、历年真题精析	101
五、同步自测题(八)	103
第九章 空间解析几何与向量代数	105
一、基本要求	105
二、考试范围	105
三、解题方法归纳	111
四、最新真题精析	114
五、同步自测题(九)	115
第十章 多元函数微分学	118

一、基本要求	118
二、考试范围	118
三、解题方法归纳	122
四、最新真题精析	125
五、同步自测题(十)	127
第十一章 二重积分	129
一、基本要求	129
二、考试范围	129
三、解题方法归纳	132
四、最新真题精析	135
五、同步自测题(十一)	138
第十二章 级数	140
一、基本要求	140
二、考试范围	140
三、解题方法归纳	144
四、历年真题精析	148
五、同步自测题(十二)	150
江苏省 2006 年普通高校“专转本”统一考试试卷高等数学(A 卷)	152
江苏省 2007 年普通高校“专转本”统一考试试卷高等数学(A 卷)	156
江苏省 2008 年普通高校“专转本”统一考试试卷高等数学(A 卷)	159
江苏省普通高校“专转本”模拟试卷高等数学(一)	162
江苏省普通高校“专转本”模拟试卷高等数学(二)	166
江苏专转本历年分值分布情况表	170
参考答案	171

第一章 函 数

一、基本要求

- (1) 理解函数的概念,了解分段函数.能熟练地求函数的定义域和函数值.
- (2) 了解函数的主要性质(单调性、奇偶性、周期性和有界性).
- (3) 掌握六类基本初等函数的解析表达式、定义域、主要性质和图形.
- (4) 了解复合函数、反函数、初等函数的概念.能熟练地将复合函数分解成简单函数.
- (5) 会建立简单应用问题中的函数关系.

二、考试范围

1. 函数

1) 函数的定义

设有两个变量 x 和 y ,若当变量 x 在实数的某一范围 D 内任意取定一个数值时,变量 y 按照一定的规律 f ,有唯一确定的值与之对应,则称 y 是 x 的函数,记作 $y = f(x), x \in D$,其中 x 称为自变量,变量 y 称为函数(或因变量).自变量 x 的取值范围 $D(f)$ 称为函数的定义域.因变量 y 的取值范围 $Z(f) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$,称为函数的值域.

在本书中,常用的数集有:自然数集 \mathbf{N} ,整数集 \mathbf{Z} ,有理数集 \mathbf{Q} ,实数集 \mathbf{R} .

2) 函数的两个要素

函数的对应规律和定义域是函数的两个要素;而函数的值域是函数的派生要素.

3) 函数的特性

设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义,

(1) 有界性:若存在正数 M ,使得在区间 I 上 $|f(x)| \leq M$,则称 $f(x)$ 在 I 上有界.

(2) 单调性:若对于区间 I 内的任意两点 x_1, x_2 ,当 $x_1 < x_2$ 时有 $f(x_1) < f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 I 上单调增加,区间 I 称为单调增区间;若 $f(x_1) > f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 I 上单调减少,区间 I 称为单调减区间.

(3) 奇偶性:设 I 为关于原点对称的区间,若对于任意 $x \in I$,都有 $f(-x) = f(x)$,则 $f(x)$ 称为偶函数;若 $f(-x) = -f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数.

(4) 周期性:若存在不为 0 的常数 T ,使得对于任意 $x \in I$,有 $x+T \in I$,且 $f(x+T) = f(x)$,则称 $f(x)$ 为周期函数.通常所说周期函数的周期是指它的最小正周期.

2. 反函数

设给定 y 是 x 的函数 $y = f(x)$,若把 y 当作自变量, x 当作函数,则由关系式 $y = f(x)$

所确定的函数 $x = \phi(y)$ 称为 $y = f(x)$ 的反函数, 而 $y = f(x)$ 称为直接函数. 习惯上把 $y = f(x)$ 的反函数记作 $y = f^{-1}(x)$.

3. 分段函数

在不同的定义区间上有不同解析式的函数.

$$\text{例 1: } y = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0; \\ -x & x < 0. \end{cases}$$

$$\text{例 2: } f(x) = \text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0; \\ 0 & x = 0; \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$

4. 基本初等函数

(1) 常数函数 $y = c$ (c 为常数).

(2) 幂函数 $y = x^\mu$ (μ 为常数).

(3) 指数函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$).

(4) 对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$).

(5) 三角函数 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$.

(6) 反三角函数 $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, y = \text{arccot } x$.

这六种函数统称为基本初等函数.

5. 复合函数

设函数 $y = f(u)$, 其中 $u = \varphi(x)$, 且 $\varphi(x)$ 的值全部或部分落在 $f(u)$ 的定义域内, 则称 $y = f[\varphi(x)]$ 为 x 的复合函数, 而 u 称为中间变量.

6. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合步骤所构成, 且可用一个解析式表示的函数叫初等函数, 否则就是非初等函数.

简单函数是指由基本初等函数或基本初等函数的和、差、积、商所构成的函数.

三、解题方法归纳

1. 求函数定义域的方法

1) 确定函数定义域的要素, 求定义域

对于由解析式表示的函数, 它的定义域可由函数表达式本身来确定. 要使解析式有意义, 通常考虑的要素有:

- (1) 在分式中, 分母不能为 0.
- (2) 在根式中, 负数不能开偶次方.
- (3) 在对数中, 真数不能为 0 和负数.

(4) 在反三角函数中,要符合反三角函数的定义域.

(5) 若函数解析式中含有分式、根式、对数式或反三角函数,应取各部分定义域的交集.

例 1: 求函数 $y = \frac{1}{\lg(x-1)}$ 的定义域.

解: 要使函数有意义, x 必须满足:

$\lg(x-1) \neq 0$ ……………“分式中分母不等于 0”;

且 $x-1 > 0$ ……………“负数和 0 没有对数”.

解得 $\begin{cases} x \neq 2, \\ x > 1. \end{cases}$ 原函数的定义域为 $(1, 2) \cup (2, +\infty)$.

例 2: 求函数 $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6} + \arcsin \frac{2x-1}{7}$ 的定义域.

解: 要使函数有意义, x 必须满足:

$x^2 - x - 6 \geq 0$ ……………“负数不能开平方”;

且 $-1 \leq \frac{2x-1}{7} \leq 1$ ……………“符合反三角函数定义域”.

解得 $\begin{cases} x \geq 3, \\ -3 \leq x \leq 4. \end{cases}$ 或者 $\begin{cases} x \leq -2, \\ -3 \leq x \leq 4. \end{cases}$ 故原函数的定义域为 $[-3, -2] \cup [3, 4]$.

2) 由已知函数的定义域求其他函数的定义域

例 3: 已知 $f(x)$ 的定义域是 $[1, 2]$, 则 $f\left(\frac{1}{x+1}\right)$ 的定义域为_____.

解: $\because f(x)$ 的定义域是 $[1, 2]$,

$\therefore f\left(\frac{1}{x+1}\right)$ 的定义域为: $1 \leq \frac{1}{x+1} \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x+1 \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq 0$.

即 $f\left(\frac{1}{x+1}\right)$ 的定义域为 $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$.

例 4: 已知 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$, 求 $g(x) = f\left(x - \frac{1}{4}\right) + f\left(x + \frac{1}{4}\right)$ 的定义域.

解: $\because f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$,

$$\therefore f\left(x - \frac{1}{4}\right) + f\left(x + \frac{1}{4}\right) \text{ 的定义域为 } \begin{cases} 0 \leq x - \frac{1}{4} \leq 1 \\ 0 \leq x + \frac{1}{4} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4} \end{cases}$$

$\Rightarrow x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$.

2. 求函数值和函数解析式的方法

1) 已知函数的解析式, 求函数在某点的函数值

例 5: 设 $f(x) = \begin{cases} \cos x & x \leq 0; \\ \sqrt{x} & x > 0, \end{cases}$ 求 $f(0)$.

分析: 求分段函数的函数值, 首先要确定所求点在哪个分段区间, 然后选择解析式.

解: $f(0) = \cos 0 = 1$ ……………“ $x = 0$ 点在 $x \leq 0$ 内”.

例 6: 设 $f(x) = \begin{cases} 0 & x < -\pi; \\ x & |x| \leq \pi; \\ \sin x & x > \pi, \end{cases}$ 则 $f(-4) = \underline{\hspace{2cm}}$, $f(0) = \underline{\hspace{2cm}}$,

$f(2\pi) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解: 由分段函数的定义, 有 $f(-4) = 0$, $f(0) = 0$, $f(2\pi) = \sin 2\pi = 0$.

2) 已知 $f(x)$ 的解析式, 求与 $f(x)$ 相关的函数的解析式

例 7: 已知 $f(x) = \frac{x}{1-x}$, 求 $f[f(x)]$, $f\{f[f(x)]\}$.

分析: 计算 $f[f(x)]$ 时, 应将函数 $f(x)$ 中的变量 x , 全用 $f(x)$ 代替; 计算 $f\{f[f(x)]\}$ 时, 应将函数 $f(x)$ 中的变量 x , 全用 $f[f(x)]$ 代替.

$$\text{解: } f[f(x)] = \frac{f(x)}{1-f(x)} = \frac{\frac{x}{1-x}}{1-\frac{x}{1-x}} = \frac{x}{1-2x};$$

$$f\{f[f(x)]\} = \frac{f[f(x)]}{1-f[f(x)]} = \frac{\frac{x}{1-2x}}{1-\frac{x}{1-2x}} = \frac{x}{1-3x}.$$

例 8: 已知 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & x \geq 0; \\ x^3 & x < 0, \end{cases}$ 求 $f(-x)$.

分析: 计算 $f(-x)$ 时, 应将函数 $f(x)$ 中的变量 x , 全用 $-x$ 代替.

$$\text{解: } f(-x) = \begin{cases} (-x)^2 + 4 & -x \geq 0; \\ (-x)^3 & -x < 0, \end{cases} \text{ 即 } f(-x) = \begin{cases} x^2 + 4 & x \leq 0; \\ -x^3 & x > 0. \end{cases}$$

例 9: $f(x) = \begin{cases} 1+x & x < 0; \\ 1 & x \geq 0, \end{cases}$ 求 $f[f(x)]$.

$$\text{解: } f[f(x)] = \begin{cases} 1+f(x) & f(x) < 0; \\ 1 & f(x) \geq 0. \end{cases}$$

而 $x+1 < 0$ 即 $x < -1$ 时, $f(x) < 0$;

$x+1 \geq 0$ 即 $x \geq -1$ 时, $f(x) \geq 0$.

$$\Rightarrow f[f(x)] = \begin{cases} 2+x & x < -1; \\ 1 & x \geq -1. \end{cases}$$

3) 已知 $f[g(x)]$ 的解析式, 求 $f(x)$ 的表达式

例 10: 设 $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \frac{1}{x^2}$, 求 $f(x)$.

分析: 求解的一般方法是设 $g(x) = \frac{1}{x} = t$, 解出其反函数 $x = g^{-1}(t) = \frac{1}{t}$ 后, 求出 $f(t)$ 的表达式, 再将变量 t 换成 x 即得 $f(x)$ 的表达式.

$$\text{解: 令 } \frac{1}{x} = t \Rightarrow x = \frac{1}{t}, \therefore f(t) = t^2 + \frac{1}{t} \Rightarrow f(x) = x^2 + \frac{1}{x}.$$

例 11: 设 $f(2x+1) = e^x$, 求 $f^{-1}(e^2)$.

解: (1) 求 $f(x)$;

令 $2x+1=t$, 则 $x=\frac{t-1}{2} \Rightarrow f(t)=e^{\frac{t-1}{2}}$, 即 $f(x)=e^{\frac{x-1}{2}}$;

(2) 求 $f^{-1}(x)$:

$\ln f(x) = \frac{x-1}{2}$ 两边取对数,

$x = 2\ln f(x) + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = 2\ln x + 1$;

(3) $f^{-1}(e^2) = 2\ln(e^2) + 1 = 5$.

例 12: 已知 $f(x) = e^x$, $f[\varphi(x)] = 1 + x^2$, 则 $\varphi(x) =$ _____.

解: $f[\varphi(x)] = e^{\varphi(x)} = 1 + x^2$, $\varphi(x) = \ln(1 + x^2)$ 两边取对数.

3. 杂题

例 13: 判断下列函数是否是相同函数.

(1) $f(x) = (x-1)^0$; $g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$;

(2) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}$; $g(x) = x\sqrt{x-1}$.

分析: 断定两个函数是否相同, 要看它们的定义域和对应关系是否完全相同. (1) 中两个函数定义域不同; (2) 中的两个函数定义域和对应关系都相同.

解: (1) 不是相同函数;

(2) 是相同函数.

例 14: 已知 $f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0; \\ 0 & x = 0; \\ -1 & x < 0, \end{cases}$ $g(x) = \frac{1}{x} (x \neq 0)$, 求 $f[g(x)]$,

$g[f(x)]$.

解: $f[g(x)] = \begin{cases} 1 & g(x) > 0; \\ 0 & g(x) = 0; \\ -1 & g(x) < 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 & x > 0; \\ -1 & x < 0, \end{cases}$ $g[f(x)] = \frac{1}{f(x)} = \begin{cases} 1 & x > 0; \\ -1 & x < 0. \end{cases}$

例 15: 把下列复合函数分解成简单函数.

(1) $y = \ln(\sin\sqrt{1+x^2})$;

(2) $y = \tan^2 e^{2x+1}$.

分析: 将复合函数由外层到里层分解为简单函数.

解: (1) $y = \ln u$, $u = \sin v$, $v = \sqrt{s}$, $s = 1 + x^2$;

(2) $y = u^2$, $u = \tan v$, $v = e^s$, $s = 2x + 1$.

注: 关于复合函数分解成一些简单函数的复合是一项基本技能, 因为在后面几章中关于复合函数求导、积分中换元法、分部积分公式都是基于复合函数的分解.

例 16: 将长为 l 的铁丝剪成两段, 一段弯成圆, 一段折成正方形. 若设正方形的边长为 x , 圆与正方形的面积之和为 y , 试将 y 表示成 x 的函数.

解: 由题设, 正方形的边长为 x , 面积为 x^2 , 因此圆周长为 $l - 4x$,

由 $l - 4x = 2\pi R$, 得 $R = \frac{l - 4x}{2\pi}$.

圆面积为 $\pi R^2 = \frac{1}{4\pi}(l - 4x)^2$,

故 $y = x^2 + \frac{1}{4\pi}(l-4x)^2$, 定义域为 $(0, \frac{l}{4})$.

四、最新真题精析

函数是微积分的基础,是高等数学的一个基本概念. 考题题型有: 填空题和选择题. 2004年已经开始出现专项考题,这是今后考题变化的一种趋势.

表 1-1 历年专转本分值分布情况表

年 份	2008	2007	2006	2005	2004	2003	2002	2001
本章分值	4	0	0	0	3	0	0	0
分值比例	3%	0	0	0	3%	0	0	0
试卷总分	150	150	150	150	100	100+10	100	100

单项选择题

- (2008年专转本考题) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 下列函数中必为奇函数的是 (B)
 - A. $y = -|f(x)|$
 - B. $y = x^3 f(x^4)$
 - C. $y = -f(-x)$
 - D. $y = f(x) + f(-x)$
- (2004年专转本考题) 函数 $f(x) = \begin{cases} x^3 & x \in [-3, 0] \\ -x^3 & x \in [0, 2] \end{cases}$; 是 (A)
 - A. 有界函数
 - B. 奇函数
 - C. 偶函数
 - D. 周期函数
- (2002年专转本考题) 已知 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是可导函数, 则 $(f(x) - f(-x))'$ 一定是 ()
 - A. 奇函数
 - B. 偶函数
 - C. 非奇非偶函数
 - D. 不能确定奇偶性的函数

解: B.

令 $F(x) = f(x) - f(-x)$, 则 $F(-x) = f(-x) - f(x) = -F(x)$,
 即 $F(x)$ 是奇函数, 有 $-F'(-x) = -F'(x)$, 两边对 x 求导,
 即 $F'(x) = [f(x) - f(-x)]' = F'(-x)$ 是偶函数.

注: 本题不是关于函数的专项考题. 在历年专转本考题中, 像这样的题目, 请同学们参阅各章专转本真题精析.

五、同步自测题(一)

1. 选择题.

- 若 $f(x-a) = x(x-a)$, 则 $f(x) =$ ()
 - A. $x(x-a)$
 - B. $x(x+a)$
 - C. $(x+a)(x-a)$
 - D. $(x-a)^2$
- 若 $f(x) = \ln x$, $g(x) = x+2$, 则 $f[g(x)]$ 的定义域是 ()

- A. $(-2, +\infty)$ B. $[-2, +\infty)$
 C. $(-\infty, 2)$ D. $(-\infty, 2]$
- (3) 下列函数哪对不是相同的函数 ()
 A. $f(x) = \cos^2 x + \sin^2 x, g(x) = 1$
 B. $f(x) = 2\ln|x|, g(x) = \ln x^2$
 C. $f(x) = \ln x^3, g(x) = 3\ln x$
 D. $f(x) = \sqrt{x^2}, g(x) = (\sqrt{x})^2$
- (4) 设函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-a, a)$ ($a > 0$), 则下列函数是奇函数的是 ()
 A. $f(x) + f(-x)$ B. $f(x) - f(-x)$
 C. $f(x)f(-x)$ D. $f(-x)$
- (5) 函数 $y = x(1 + \cos x)$ 的图形关于_____对称. ()
 A. x 轴 B. 直线 $y = x$ C. 坐标原点 D. y 轴
- (6) 设 $f(e^x) = x$, 则 $f(10) =$ ()
 A. e^{10} B. 10^e C. $\ln 10$ D. $\ln e$
- (7) 设 $f(x) = \log_a x$, 则_____成立. (其中 $x, y > 0$) ()
 A. $f(x)f(y) = f(x+y)$ B. $f(x) + f(y) = f(x+y)$
 C. $f(xy) = f(x)f(y)$ D. $f(xy) = f(x) + f(y)$
- (8) 若 $f(x) = \frac{x}{x-1}$, 则当 $x \neq 0$ 且 $x \neq 1$ 时, $f\left[\frac{1}{f(x)}\right]$ 等于 ()
 A. $\frac{x-1}{x}$ B. $\frac{x}{x-1}$ C. $1-x$ D. x
2. 求下列函数的定义域.
- (1) $y = \frac{x+2}{1+\sqrt{3x-x^2}}$; (2) $y = \lg \frac{1}{1-x} + \sqrt{x+2}$;
- (3) $y = \arccos(x-1) + \ln \frac{x-1}{x+1}$.
3. 确定下列函数的奇偶性.
- (1) $y = x(x-2)(x+2)$; (2) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$;
- (3) $y = \log_2(x + \sqrt{x^2 + 1})$.
4. 设 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 求下列函数的定义域.
- (1) $f(x^2)$; (2) $f(\cos x)$;
- (3) $f(x+a)$; (4) $f(e^x) + f(\ln x)$.
5. 对下列的 $f(x)$, 求 $f(f(x))$.
- (1) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$; (2) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
6. 把下列复合函数分解成简单函数.
- (1) $y = e^{\cos^2 \frac{1}{x}}$; (2) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.
7. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x < 0; \\ x^2 + 1 & x \geq 0, \end{cases}$ 求 $f(-x)$.

8. 设 $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1; \\ 0 & |x| = 1; \\ -1 & |x| > 1, \end{cases}$ $g(x) = e^x$, 求 $f[g(x)]$, $g[f(x)]$.
9. 设 $f(x) = 2x^2 + 6x - 3$, 求 $\varphi(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$ 及 $\psi(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$, 并指出 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 中哪个是奇函数? 哪个是偶函数?
10. 证明: 定义在对称区间 $(-l, l)$ 上的任意函数可表示为一个奇函数和一个偶函数之和. (提示参阅第 9 题)

第二章 极限与连续

一、基本要求

- (1) 了解极限、左右极限的概念.
- (2) 了解无穷小量的概念,了解无穷小量的运算性质及其与无穷大量的关系,以及无穷小量的比较.
- (3) 掌握极限的四则运算法则.
- (4) 知道极限存在的两个准则,会用两个重要极限求极限.
- (5) 了解函数连续性的定义,会求函数的连续区间.
- (6) 了解函数间断点的概念,会判别函数间断点的类型.
- (7) 知道初等函数的连续性,知道闭区间上的连续函数的几个性质(最大值、最小值定理和介值定理),会用介值定理证明方程根的存在性.

二、考试范围

1. 数列的极限

1) 数列的概念

定义 1 按照一定的顺序排成的一列数,称之为数列,可以记为:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots \quad \text{或} \quad \{x_n\}$$

其中, x_n 称为数列的一般项或通项.

若视数列为定义在自然数域 \mathbf{N} 上的函数 $f(n)$, 则 $x_n = f(n)$, $n \in \mathbf{N}$.

2) 数列的极限

定义 2 对于数列 $\{x_n\}$, 当项数 n 无限增大时, 数列的相应项 x_n 无限逼近常数 a , 则称 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限, 记作: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ (或 $x_n \rightarrow a, (n \rightarrow \infty)$), 并称数列 $\{x_n\}$ 是收敛的.

若数列 $\{x_n\}$ 没有极限, 则称数列 $\{x_n\}$ 是发散的.

2. 函数的极限

1) 函数极限的定义

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域 $N(x_0, \delta)$ 内有定义, 当 x 无限接近于某个值时 ($x \rightarrow x_0$, $x \rightarrow x_0^+$, $x \rightarrow x_0^-$, $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$), 相应的函数值无限接近于常数 A , 则 A 为当 $x \rightarrow \square$ (\square 可以代表 $x_0, x_0^+, x_0^-, \infty, +\infty, -\infty$) 时 $f(x)$ 的极限. 记为 $\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow \square)$.

2) 左右极限

若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 存在, 把 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 称作 $f(x)$ 在 x_0 处的右极限; 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 存在, 把 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 称作 $f(x)$ 在 x_0 处的左极限. 且有:

(1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的充要条件是 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$;

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 的充要条件是 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$.

3) 单调有界原理

单调有界数列必有极限.

4) 极限的性质

性质 1(惟一性) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = B$, 则 $A = B$.

性质 2(有界性) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则存在 x_0 的某一空心邻域 $N(\hat{x}_0, \delta)$, 在 $N(\hat{x}_0, \delta)$ 内函数 $f(x)$ 有界.

性质 3(保号性) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 则存在 x_0 的某一空心邻域 $N(\hat{x}_0, \delta)$, 在 $N(\hat{x}_0, \delta)$ 内 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$).

推论 若在某一空心邻域 $N(\hat{x}_0, \delta)$ 内, $f(x) \geq 0$ (或 $f(x) \leq 0$) 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $A \geq 0$ (或 $A \leq 0$).

性质 4(夹逼准则) 若 $x \in N(\hat{x}_0, \delta)$ (其中 δ 为某个正常数) 时, 有 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

3. 无穷小量

1) 定义 极限为 0 的变量称为无穷小量, 简称无穷小

特点: ① 变量; ② 要多小就有多小; ③ 0 为无穷小量.

2) 极限与无穷小的关系

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的充要条件是 $f(x) = A + \alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 是 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小量.

3) 无穷小量的运算性质

性质 1 有限个无穷小量的代数和是无穷小量.

性质 2 无穷小与有界量的积是无穷小.

推论 1 常数与无穷小的积是无穷小.

推论 2 有限个无穷小的积仍是无穷小.

4) 无穷小的比较

定义 设某一极限过程中, α 与 β 都是无穷小且 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = C$ (C 为常数),

若 C 为 0, 则称 β 是比 α 高阶的无穷小, 记成 $\beta = o(\alpha)$ (此时也称 α 是比 β 低阶的无穷小);

若 C 不等于 0, 则称 α 与 β 是同阶的无穷小, 特别地, 若 $C = 1$ 则称 α 与 β 是等价的无穷小, 记为 $\alpha \sim \beta$.

5) 常见等价无穷小量

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x \sim x$; $\tan x \sim x$; $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$;