

一般拓扑学

J.L.Kelley 著

汪 浩 译

IBAN TUOPUOXUE

一般拓扑学

加利福尼亚大学
数学教授 J.L.Kelley 著
汪 浩 译

原 序

本书系统地阐述一般拓扑学，它在许多数学分支中已被证明是有用的。本书特别有意于成为近代分析的基础，我企图回答“那些是每一个年青的分析学家所必需掌握的”；许多朋友曾经劝阻过我，要做到这一点是很不易的。

本书是在多种讲义的基础上形成的，这些讲义分别用于1946—47 芝加哥大学，1948—1949 加里福尼亚大学，1950—1951 图兰大学，它企图同时作为教科书和参考书。这两个目的是有点矛盾的。特别，作为一本参考书来说，它应当提供学科领域的一个适当完整的全貌，较之正常教程所规定的内容要广泛得多。有许多详情细节主要被安排为参考资料；例如，我尽力收集所有最常用的术语，并列举在索引中。另一方面，由于这是一本教科书，所以开头的几章采用较平缓的步子进行。同样理由，本书专辟了一章预备章，它并非本书系统阐述的组成部分，但它包括了本书主体部分所需要的而对许多学生来说又是陌生的那些课题。该章比较深刻的结果是有关集理论的定理，此理论的系统阐述将在附录中给出。这个附录与本书的其余部分是完全独立的；除此之外，本书的每一部分都以该部分以前的所有结论作为前提。

在全文中有一些新颖的材料。在一节的标题前冠以星号；这标志该节是离开主线的一个旁支。其他许多具有同样或更多兴趣的专题则作为问题来处理。这些问题是讨论的组成部分。其

中有一些是作为练习的，它只是帮助读者理解所运用的概念。另有一些则是列举反例，它们指明定理的可能使用范围。再有一些则是小型定理；它们自身也是饶有兴趣的，有的还可作为各领域中应用一般拓扑学的入门向导。最后还经常列举参考资料，使得有兴趣的读者可以继续继续阅读。参考目录适当地包括了绝大多数已有的论文，其中有一小部分是早期的杰出论文。另一小部分则是“跨领域”的参考资料。

我使用的两个特殊记号。在某些情况下，当数学内容需要用到“if and only if”（当且仅当；是指），我采用Halmos的记号“iff”。每个证明结尾采用记号■标记之，这个记号也是Halmos的。

J. L. Kelley

伯克莱，加利福尼亚

1955年2月1日

目 录

第零章 预备知识

集	1
子集和余; 并和交	2
关系	6
——关系运算, 等价关系	
函数	11
序	14
——序完备集, 链, 保序函数的扩张	
代数概念	18
实数	20
——整数, 归纳法定义, b -进制展式	
可数集	26
——子集, 并, 实数集	
基数	29
——希洛特-伯恩斯坦定理	
序数	31
——第一不可数序数	
卡的逊乘积	32
豪司道夫极大原理	33
——极大原理, 库拉托夫斯基-迟翁引理, 选择公理, 良序原理	

第一章 拓扑空间

拓扑和邻域	39
——拓扑的比较, 一点的邻域系	
闭集	42
聚点	42
闭包	44
——库拉托夫斯基闭包算子	
内核和边界	45
基和子基	48
——具有可数基的拓扑, 林登洛夫定理	
相对化; 隔离性	52
连通集	55
——分支	
问题	57
——A. 最大和最小拓扑; B. 邻域系构成拓扑; C. 内核算子构成拓扑; D. T_1 -空间中聚点; E. 库拉托夫斯基闭包和余的问题; F. 具有可数基空间的习题; G. 稠密集的习题; H. 聚点; I. 序拓扑; J. 实数的性质; K. 半开区间空间; L. 半开矩形空间; M. 关于第一和第二可数性公理的例(序数); N. 可数链条件; O. 欧几里德平面; P. 分支的例; Q. 隔离集的定理; R. 连通集的有限链定理; S. 局部连通空间; T. 勃劳瓦约化定理	

第二章 摩尔—司密斯收敛

引言	65
有向集和网	68

——极限的唯一性, 累次极限	
子网和丛点	73
序列和子序列	75
* 收敛类	76
——收敛确定拓扑	
问题	79
——A. 序列的习题; B. 序列不适应的例; C. 豪司道夫空间的习题: 门空间; D. 子序列的习题; E. 共尾子集不适应的例; F. 单调网; G. 积分理论, 初级部分; H. 积分理论, 应用部分; I. 格的极大理想; J. 万有网; K. 布尔环: 存在足够的同态映射; L. 渗透	

第三章 乘积和商空间

连续函数	90
——连续的特征, 同胚映射	
乘积空间	95
——函数表示乘积, 坐标收敛, 可数性	
商空间	100
——开和闭映射, 上半连续分解	
问题	106
——A. 连通空间; B. 关于连续的定理; C. 连续函数的习题; D. 在一点处连续, 连续扩张; E. 实值连续函数的习题; F. 上半连续函数; G. 拓扑等价的习题; H. 同胚映射和一对一连续映射; I. 两个变量的逐个连续性; J. 欧几里德 n -空间的习题; K. 乘积中闭包, 内核和边界的习题; L. 乘积空间的习题; M. 具有可数基空间的乘积; N. 乘积	

和隔离性的例；O. 连通空间的乘积；P. T_1 -空间的习题；Q. 商空间的习题；R. 商空间和对角线序列的例；S. 拓扑群；T. 拓扑群的子群；U. 商群和同态映射；V. 框空间；W. 实线性空间上的泛函；X. 实线性拓扑空间

第四章 嵌入和度量化

连续函数的存在性	119
— 吉洪诺夫引理, 乌里松引理	
嵌入长方体	122
— 嵌入引理, 吉洪诺夫空间	
度量和伪度量空间	125
— 度量拓扑, 可数乘积	
度量化	131
— 乌里松度量化定理, 局部有限复盖, 加细, 可度量的特征	
问题	137
— A. 正则空间; B. 在度量空间中函数的连续性; C. 度量问题; D. 子集的豪司道夫度量; E. 正规空间乘积的例 (序数); F. 正规空间子空间的例 (吉洪诺夫板); G. 商的乘积和非正则豪司道夫空间的例; H. 可继承性, 可乘性, 和可除性; I. 半开区间空间; J. 实连续函数的零点集; K. 完全正规空间; L. 完全正规空间的特征; M. 正规空间的上半连续分解	

第五章 紧空间

等价命题	143
------	-----

—有限交性质, 丛点, 亚力山大子基定理	
紧性和隔离性	148
—豪司道夫紧性, 正则和完全正则空间	
紧空间的乘积	150
—吉洪诺夫乘积定理	
局部紧空间	153
商空间	155
—以紧成员作上半连续分解	
紧化	156
—亚力山大洛夫一点紧化, 斯冬-西赫紧化	
勒贝格复盖引理	161
—齐复盖	
* 仿紧性	163
问题	168
—A. 紧空间上实函数的习题; B. 紧子集;	
C. 相对于序拓扑的紧性; D. 紧度量空间的等距映射;	
E. 可数紧和列紧空间; F. 紧性; 紧连通集之交;	
G. 局部紧的问题; H. 紧性的套特征; I. 完全聚点;	
J. 单位正方形字典序的例; K. 正规性和乘积的例(序数);	
L. 超限线; M. 赫利空间的例;	
N. 闭映射和局部紧的例; O. 康托空间; P. 斯冬-西赫紧化的特征;	
Q. 紧化的例(序数); R. 华尔曼紧化; S. 布尔环: 斯冬表示定理; T. 紧连通空间(链理论);	
U. 全正规空间; V. 点有限复盖和亚紧空间; W. 单位分解;	
X. 半连续函数的介值定理;	
Y. 仿紧空间	

第六章 一致空间

一致族和一致拓扑	184
——邻域, 基和子基	
一致连续; 乘积一致族	189
——一致同构映射, 相对化, 乘积	
度量化	193
——可度量的特征, 一致族的量规	
完备性	199
——哥西网, 函数的扩张	
完备化	205
——存在性和唯一性	
紧空间	206
——一致族的唯一性, 全有界性	
仅考虑度量空间	209
——贝尔定理, 范畴的局部化, 一致开映射	
问题	213
——A. 闭关系的习题; B. 两个一致空间乘积的习题; C. 散不可度量的一致空间; D. 具有套基的一致空间的习题; E. 极不完备空间(序数)的习题; F. 关于全有界性的子基定理; G. 若干极端的一致族; H. 一致邻域系; I. 离差和度量; J. 一致复盖系; K. 拓扑完备空间: 可度量空间; L. 拓扑完备空间: 可一致化空间; M. 散子空间理论; 可数紧性; N. 不变度量; O. 拓扑群: 一致群和度量化; P. 拓扑群的殆开子集; Q. 拓扑群的完备化; R. 同态映射的连续性和开性: 闭图定理; S. 可和性; T. 一致	

局部紧空间; U. 一致有界定理; V. 布尔 σ -环

第七章 函数空间

逐点收敛	229
——拓扑和一致族, 紧性	
紧开拓扑和联合连续性	233
——联合连续拓扑的唯一性, 紧开拓扑的紧空间	
——一致收敛	237
——集族上一致收敛, 完备性	
紧统上一致收敛	241
——拓扑, 紧性, k -空间	
紧性和等度连续	243
——阿斯高利定理	
* 齐连续	246
——拓扑的阿斯高利定理	
问题	249
——A. 逐点收敛拓扑的习题; B. 函数收敛的习题; C. 稠密子集上的逐点收敛; D. 对角线法和列紧性; E. 地尼定理; F. 诱导映射的连续性; G. 一致等度连续; H. 一致族 $\mathcal{U} A$ 的习题; I. 赋值的连续性; J. k -空间的子空间, 乘积, 和商; K. 拓扑的 k -扩张; L. 齐连续的特征; M. 连续收敛; N. 赋范线性空间的伴随; O. 铁兹扩张定理; P. $C(X)$ 的线性子空间的稠密引理; Q. 巴拿哈代数的平方根引理; R. 斯冬-外尔 斯脱拉斯定理; S. $C(X)$ 的结构; T. 群的紧化; 殆周期函数	

附录 基本集论

分类公理系统	265
— 广延公理和分类公理系统	
分类公理系统 (续)	267
类的基本代数	268
集的存在性	271
— 子集公理, 併公理, 无序对	
有序对; 关系	273
函数	274
— 代入公理, 合併公理	
良序	277
— 保序函数的存在性和唯一性	
序数	281
— 正则公理, 序数的结构, 超限归纳法	
整数	286
— 无限性公理, 整数的庇亚诺假设	
选择公理	287
— 极大原理	
基数	289
— 基本性质, 有限集, 基数的乘积	

第零章 预备知识

学习本书仅需下述预备知识，即实数的若干性质以及理论数学必不可少的若干基本概念。后续各章所要用到的预备知识，包括所有的定义和基本定理，都收集在本章中。本章的叙述，除对实数系的讨论作了删节外，其余的都自成系统。本章最深刻的內容是有关集论的一系列定理，它们的系统阐述在本书附录中给出。本章的意图是用作参考的，所以建议读者可以先阅读前两节，然后便转入阅读第一章；以后凡是感到有需要的时候，再返回来阅读本章的其余部分。许多定义将是重复的，当它们首次出现在正文中的时候。

集

我们将要与集和集的成员打交道。集(set)，类(class)，族(family)，集团(collection)，联合体(aggregate)等都是同义语*，记号 \in 表示隶属。这样， $x \in A$ 是指： x 是 A 的一个成员(member)，或一个元(element)，或一个点(point)。两个集等同(identical)是指：它们具有同样的成员，而等号通常用于表示等同。从而， $A = B$ 是指：对于每个 x ， $x \in A$ 当且仅当 $x \in B$ 。

集可用括号的形式来表达，即 $\{x: \dots (\text{关于 } x \text{ 的命题}) \dots\}$

* 这种说法不是严格准确的。这里有技术上的原因，即为了区别两种不同类型的联合体，详细说明见附录。术语“集”将保留专用作类的成员。在这里，这种区别没有重大的意义，除去一种非显见的情形之外，在讨论中（在附录之先）出现的每个类也是一个集。

表示所有这种点 x 所构成的集，使得关于 x 命题是真的。简言之， $y \in \{x: \dots (\text{关于 } x \text{ 的命题}) \dots\}$ 当且仅当关于 y 命题是真的。例如，若 A 是集，则 $y \in \{x: x \in A\}$ 当且仅当 $y \in A$ 。因为具有同样成员的集是等同的，故 $A = \{x: x \in A\}$ ，这是平凡而显见的事实。必须注意在构成集的这种模式中，“ x ”是哑变元，就是说，它可用其他变元来代替，只要代替的变元在命题中不出现。所以， $\{x: x \in A\} = \{y: y \in A\}$ ，但是， $\{x: x \in A\} \neq \{A: A \in A\}$ 。

按照这种模式构成的集，具有应用起来很方便的法则。假设由两个不同的命题分别构成两个集，如果这两个命题是逻辑等价的话，那么这两个集就是等同的。这个法则可以通过证明这两个集具有同样的元素而加以验证。例如，设 A 和 B 是两个集，则 $\{x: x \in A \text{ 或 } x \in B\} = \{x: x \in B \text{ 或 } x \in A\}$ ，这是因为 y 属于前者，当且仅当 $y \in A$ 或 $y \in B$ ，而这种情况恰好是当且仅当 $y \in B$ 或 $y \in A$ ，这就是说 y 是后者的成员。下一节中的所有定理都是按此思路加以严格证明的。

子集和余； 併和交

设 A 和 B 是集(或族，或集团)，则 A 是 B 的**子集**(subset) (或子族，或子集团) 是指： A 的每个成员都是 B 的成员。在这种情况下，我们也称 A **含于**(contained in) B 和 B **包含**(contains) A ，并记作 $A \subset B$ 和 $B \supset A$ 。这样 $A \subset B$ 就意味着：对于每个 x ，只要 $x \in A$ ，则必有 $x \in B$ 。集 A 是 B 的**真子集**(proper subset) (A 真含于 B ， B 真包含 A) 是指： $A \subset B$ ，且 $A \neq B$ 。若 A 是 B 的子集，且 B 是 C 的子集，则显然 A 是 C 的子集。如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$ ，则 $A = B$ ，这是因为在此情况下， A 的成员必是 B 的成员，且 B 的成员亦必是 A 的成员。

集 A 和 B 的**併**(union)，或**和**(sum)，**逻辑和**(logical

sum), **联合** (join), 记作 $A \cup B$, 是指所有这些点的集, 它或属于 A 或属于 B ; 就是说, $A \cup B = \{x: x \in A \text{ 或 } x \in B\}$. 必须注意这里所用的“或”, 并没有互斥的意思, 因此同属于 A 和 B 的那些点也属于 $A \cup B$. 集 A 和 B 的**交** (intersection), 或**积** (product), **交会** (meet), 记作 $A \cap B$, 是指所有这种点的集, 它同属于 A 和 B ; 就是说, $A \cap B = \{x: x \in A \text{ 且 } x \in B\}$. 空集 (void set, empty set) 记作 O , 定义为 $\{x: x \neq x\}$. (这里命题 $x \neq x$ 可以用任何一个常假的命题来代替.) 空集是任一集 A 的子集, 因为 O 的成员 (实际上不存在) 必属于 A . 对于每一对集 A 和 B , 包含关系 $O \subset A \cap B \subset A \subset A \cup B$ 是常真的. 两个集 A 和 B 称为**不相交的** (disjoint, non-intersecting), 是指 $A \cap B = O$; 也就是说, A 的任一成员不可能是 B 的成员. 集 A 和 B **相交** (intersect) 指: 存在一点同时属于二者, 也就是 $A \cap B \neq O$. 设 \mathcal{A} 是集族 (\mathcal{A} 的成员是集), 称为**不相交族** (disjoint family) 是指: \mathcal{A} 中任何两个集都不相交.

集 A 的**绝对余集** (absolute complement), 记作 $\sim A$, 是指集 $\{x: x \notin A\}$. A 关于集 X 的**相对余集** (relative complement) 是指 $X \cap \sim A$, 或者简记作 $X \sim A$. 这个集也称为 X 与 A 的**差集** (difference). 对于每个集 A 来说, $\sim \sim A = A$ 常真: 关于相对余集的相应陈述显得稍为复杂一些, 将在 0.2 中给出.

必须十分严格地区别“成员”和“子集”. 仅有一个成员 x 的集称为**单元集** (singleton), 记作 $\{x\}$. 注意 $\{O\}$ 是不空的, 因为 $O \in \{O\}$, 因此 $O \neq \{O\}$. 一般地, $x \in A$ 当且仅当 $\{x\} \subset A$.

以下两个定理阐明了有关上述各种定义之间的若干最常用的关系式, 其中一部分给出了证明.

1 定理 设 A 和 B 是集 X 的子集. 则 $A \subset B$ 当且仅当下述条件之一成立:

$$A \cap B = A, \quad A \cup B = B, \quad X \sim B \subset X \sim A,$$

$$A \cap (X \sim B) = 0, \text{ 或 } (X \sim A) \cup B = X.$$

2 定理 设 A, B, C 和 X 是集。则有：

(a) $X \sim (X \sim A) = A \cap X.$

(b) (交换律) $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A.$

(c) (结合律) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

(d) (分配律) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

(e) (摩根公式) $X \sim (A \cup B) = (X \sim A) \cap (X \sim B),$

$$X \sim (A \cap B) = (X \sim A) \cup (X \sim B).$$

证明：(a)的证明：点 x 是 $X \sim (X \sim A)$ 的成员当且仅当 $x \in X$ 且 $x \notin X \sim A$ 。因为 $x \notin X \sim A$ 当且仅当 $x \notin X$ 或 $x \in A$ ，从而 $x \in X \sim (X \sim A)$ 当且仅当 $x \in X$ 且下述二者之一： $x \notin X$ 或 $x \in A$ 。前一种情形是不可能的，因此 $x \in X \sim (X \sim A)$ 当且仅当 $x \in X$ 且 $x \in A$ ；也就是说， $x \in X \cap A$ 。因此 $X \sim (X \sim A) = A \cap X$ 。(d)的第一部分的证明：点 x 是 $A \cap (B \cup C)$ 的成员当且仅当 $x \in A$ 且下述二者之一： $x \in B$ 或 $x \in C$ 。这等价于当且仅当 x 同时属于 A 和 B ，或者 x 同时属于 A 和 C 。因此 $x \in A \cap (B \cup C)$ 当且仅当 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ，等式证毕。■

设 A_1, A_2, \dots, A_n 是集，则 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ 为它们的并， $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ 为它们的交。在计算并和交的过程中，关于各项如何结合是无关紧要的，因为有结合律作保证。有必要考虑无限集族中成员的并，因此对于这种并引进一个记号是极为适宜的。考虑下述情形：对于 A 的每个成员 a ，对应着一个给定的集 X_a ，集 A 称为指标集。那么所有这些 X_a 的并，记作 $\bigcup \{X_a : a \in A\}$ ，定义为所有这样的点 x 所组成的集，使得 $x \in X_a$ 对 A 中某一个 a 成立。类似地，所有 $X_a (a \in A)$ 的交，记作 $\bigcap \{X_a : a \in A\}$ ，定义为 $\{x : x \in X_a \text{ 对于 } A \text{ 中每个 } a \text{ 都成}$

立}。一个很重要的特例是：指标集本身就是集族 A ，而 X_A 恰好就是集 $A(A \in A)$ ，则上述定义便变为 $\bigcup\{A: A \in A\} = \{x: x \in A \text{ 对 } A \text{ 中某一 } A \text{ 成立}\}$ ， $\bigcap\{A: A \in A\} = \{x: x \in A \text{ 对 } A \text{ 中每个 } A \text{ 都成立}\}$ 。

关于集族的成员的并和交的代数性质有许多重要的定理，但是我们仅需用到下述这些，它们的证明从略。

3 定理 设 A 是指标集，对于 A 中每个 a ，都对应着固定集 Y 的一个子集 X_a ，则

(a) 若 B 是 A 的子集，则

$$\bigcup\{X_b: b \in B\} \subset \bigcup\{X_a: a \in A\},$$

$$\bigcap\{X_b: b \in B\} \supset \bigcap\{X_a: a \in A\}.$$

(b) (摩根公式)

$$Y \sim \bigcup\{X_a: a \in A\} = \bigcap\{Y \sim X_a: a \in A\},$$

$$Y \sim \bigcap\{X_a: a \in A\} = \bigcup\{Y \sim X_a: a \in A\}.$$

摩根公式通常可简述如下：并的余等同于余的交，交的余等同于余的并。

必须充分认识：熟练掌握集的理论运算是十分重要的。本书附录列举了一系列定理，它们可以充作初学者的习题。（参看类的基本代数那一节。）

4 注记 在集论的早期工作中，通常将两个集 A 与 B 的并记作 $A+B$ ，它们的交记作 $A \cdot B$ ，采用类似于实数系所采用的运算符。某些相同的代数法则仍保持正确；但是，有充分理由迫使人们放弃沿用这种记号。因为经常会碰到要将集的运算施加在群、域或线性空间上。设 A 和 B 是加法群的子集，则 $\{c: c = a+b, a \in A, b \in B\}$ 自然被命名为“ $A+B$ ”，同样， $\{x: -x \in A\}$ 自然记作“ $-A$ ”。因为刚才定义的集在运算时系统地用到，而在计算的同时又出现并、交与余等运算，因此本书选择的记号看来是最适宜的。