一般拓扑学

J. L. Kelley 著

汪　浩 译

YIBAN TUOPUOXUE

一 般 拓 扑 学

加 里 福 尼 亚 大 学
数学教授 J.L.Kelley 著
汪 浩 译

原 序

本书系统地阐述一般拓扑学，它在许多数学分支中已被证明是有用的。本书特别有意于成为近代分析的基础，我企图回答“那些是每一个年青的分析学家所必需掌握的”；许多朋友曾经劝阻过我，要做到这一点是很不易的。

本书是在多种讲义的基础上形成的，这些讲义分别用于1946—47芝加哥大学，1948—1949加里福尼亚大学，1950—1951图兰大学，它企图同时作为教科书和参考书。这两个目的是有点矛盾的。特别，作为一本参考书来说，它应当提供学科领域的一个适当完整的全貌，较之正常教程所规定的内容要广泛得多。有许多详情细节主要被安排为参考资料；例如，我尽力收集所有最常用的术语，并列举在索引中。另一方面，由于这是一本教科书，所以开头的几章采用较平缓的步子进行。同样理由，本书专辟了一章予备章，它并非本书系统阐述的组成部分，但它包括了本书主体部分所需要的而对许多学生来说又是陌生的那些课题。该章比较深刻的结果是有关集理论的定理，此理论的系统阐述将在附录中给出。这个附录与本书的其余部分是完全独立的；除此之外，本书的每一部分都以该部分以前的所有结论作为前提。

在全文中有一些新颖的材料。在一节的标题前冠以星号；这标志该节是离开主线的一个旁支。其他许多具有同样或更多兴趣的专题则作为问题来处理。这些问题是讨论的组成部分。其

中有一些是作为练习的，它只是帮助读者理解所运用的概念。另有一些则是列举反例，它们指明定理的可能使用范围。再有一些则是小型定理；它们自身也是饶有兴趣的，有的还可作为各领域中应用一般拓扑学的入门向导。最后还经常列举参考资料，使得有兴趣的读者可以继续进行阅读。参考目录适当地包括了绝大多数已有的论文，其中有一小部分是早期的杰出论文，另一小部分则是“跨领域”的参考资料。

我使用的两个特殊记号。在某些情况下，当数学内容需要用到“if and only if” (当且仅当；是指)，我采用Halmos的记号“iff”．每个证明结尾采用记号∎标记之，这个记号也是 Halmos 的。

J. L. Kelley

伯克莱，加里福尼亚

1955 年 2 月 1 日

目　　录

第零章　予备知识

第一章 拓扑空间

第二章 摩尔—司密斯收敛

第三章　乘积和商空间

第四章　嵌入和度量化

第五章　紧空间

第六章　一致空间

第七章　函数空间

附录 基本集论

第零章 予备知识

学习本书仅需下述予备知识，即实数的若干性质以及理论数学必不可少的若干基本概念。后续各章所要用到的予备知识，包括所有的定义和基本定理，都收集在本章中。本章的叙述，除对实数系的讨论作了删节外，其余的都自成系统。本章最深刻的內容是有关集论的一系列定理，它们的系统阐述在本书附彔中给出。本章的意图是用作参考的，所以建议读者可以先阅读前两节，然后便转入阅读第一章；以后凡是感到有需要的时候，再返回来阅读本章的其余部分。许多定义将是重复的，当它们首次出现在正文中的时候。

集

我们将要与集和集的成员打交道。**集**(set)，**类**(class)，**族**(family)，**集团**(collection)，**联合体**(aggregate)等都是同义语*，记号$\in$表示隶属。这样，$x\in A$是指：x是A的一个**成员**(member)，或一个**元**(element)，或一个**点**(point)。两个集**等同**(identical)是指：它们具有同样的成员，而等号通常用于表示等同。从而，$A=B$是指：对于每个x，$x\in A$当且仅当$x\in B$.

集可用括号的形式来表达，即$\{x:\cdots$ (关于x的命题) $\cdots\}$

* 这种说法不是严格准确的。这里有技术上的原因，即为了区别两种不同类型的联合体；详细说明见附彔。术语“集”将保留专用作类的成员。在这里，这种区别没有重大的意义，除去一种非显见的情形之外，在讨论中（在附彔之先）出现的每个类也是一个集。

表示所有这种点x所构成的集，使得关于x命题是眞的。简言之，$y\in\{x:\cdots$（关于 x 的命题）$\cdots\}$当且仅当关于 y 命题是眞的。例如，若 A 是集，则 $y\in\{x:x\in A\}$ 当且仅当 $y\in A$. 因为具有同样成员的集是等同的，故 $A=\{x:x\in A\}$，这是平凡而显见的事实。必须注意在构成集的这种模式中，"x"是哑变元，就是说，它可用其他变元来代替，只要代替的变元在命题中不出现。所以，$\{x:x\in A\}=\{y:y\in A\}$，但是，$\{x:x\in A\}\neq\{A:A\in A\}$.

按照这种模式构成的集，具有应用起来很方便的法则。假设由两个不同的命题分别构成两个集，如果这两个命题是逻辑等价的话，那么这两个集就是等同的。这个法则可以通过证明这两个集具有同样的元素而加以验证。例如，设A和B是两个集，则$\{x: x\in A$或$x\in B\}=\{x:x\in B$ 或 $x\in A\}$，这是因为 y 属于前者，当且仅当 $y\in A$ 或$y\in B$，而这种情况恰好是当且仅当 $y\in B$ 或 $y\in A$，这就是说 y 是后者的成员。下一节中的所有定理都是按此思路加以严格证明的。

子集和余；併和交

设A和B是集(或族，或集团)，则A是B 的**子集**(subset)（或子族，或子集团）是指：A的每个成员都是B的成员。在这情况下，我们也称A**含于**(contained in) B和B**包含**(contains) A，并记作 $A\subset B$ 和$B\supset A$. 这样 $A\subset B$ 就意味着：对于每个 x，只要 $x\in A$，则必有 $x\in B$. 集A是B的**眞子集** (proper subset)（A眞含于B，B眞包含A）是指：$A\subset B$，且 $A\neq B$. 若A是B的子集，且B是C的子集，则显然A是C的子集。如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则 $A=B$，这是因为在此情况下，A 的成员必是B的成员，且B的成员亦必是A的成员。

集A和B的**併** (union)，或**和** (sum)，**逻辑和** (logical sum)，**联合**(join)，记作 $A\cup B$，是指所有这些点的集，它或属于A或属于B；就是说，$A\cup B=\{x:x\in A$ 或 $x\in B\}$. 必须注意这里所用的“或”，并没有互斥的意思，因此同属于A和B的那些点也属于 $A\cup B$. 集A和 B 的**交**(intersection)，或**积**(product)，**交会**(meet)，记作 $A\cap B$，是指所有这种点的集，它同属于A和B；就是说，$A\cap B=\{x:x\in A$ 且 $x\in B\}$. 空集(void set, empty set)记作O，定义为$\{x:x\neq x\}$. (这里命题 $x\neq x$ 可以用任何一个常假的命题来代替。)空集是任一集A的子集，因为O的成员（实际上不存在）必属于A. 对于每一对集A和B，包含关系 $O\subset A\cap B\subset A\subset A\cup B$ 是常眞的。两个集 A 和 B 称为**不相交的**(disjoint, non-intersecting)，是指 $A\cap B=0$；也就是说，A的任一成员不可能是B的成员。集A和B**相交**(intersect)指：存在一点同时属于二者，也就是 $A\cap B\neq 0$. 设$\boldsymbol{A}$是集族($\boldsymbol{A}$的成员是集)，称为**不相交族**(disjoint family)是指：$\boldsymbol{A}$中任何两个集都不相交。

集A的**绝对余集**(absolute complement)，记作$\sim A$，是指集$\{x:x\notin A\}$. A关于集X的**相对余集** (relative complement)是指$X\cap\sim A$，或者简记作$X\sim A$. 这个集也称为X与A的**差集**(difference)。对于每个集A来说，$\sim\sim A=A$ 常眞：关于相对余集的相应陈述显得稍为复杂一些，将在 0.2 中给出。

必须十分严格地区别“成员”和“子集”。仅有一个成员 x 的集称为**单元集**(singleton)，记作$\{x\}$. 注意$\{O\}$是不空的，因为$O\in\{O\}$，因此$O\neq\{O\}$. 一般地，$x\in A$ 当且仅当$\{x\}\subset A$.

以下两个定理阐明了有关上述各种定义之间的若干最常用的关系式，其中一部分给出了证明。

1 定理 设A和B是集X的子集。则 $A\subset B$ 当且仅当下述条件之一成立：

$$A\cap B=A,\ A\cup B=B,\ X\sim B\subset X\sim A,$$

$$A \cap (X \sim B) = 0，或 (X \sim A) \cup B = X.$$

2 定理 设A，B，C和X是集。则有：

(a) $X \sim (X \sim A) = A \cap X$.

(b) (交换律) $A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$.

(c) (结合律) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$，

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

(d) (分配律)$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$，

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

(e) (摩根公式)$X \sim (A \cup B) = (X \sim A) \cap (X \sim B)$，

$$X \sim (A \cap B) = (X \sim A) \cup (X \sim B).$$

证明：(a)的证明：点x是$X \sim (X \sim A)$的成员当且仅当$x \in X$且$x \notin X \sim A$. 因为$x \notin X \sim A$当且仅当$x \notin X$或$x \in A$，从而$x \in X \sim (X \sim A)$当且仅当$x \in X$且下述二者之一：$x \notin X$或$x \in A$. 前一种情形是不可能的，因此$x \in X \sim (X \sim A)$当且仅当$x \in X$且$x \in A$；也就是说，$x \in X \cap A$. 因此$X \sim (X \sim A) = A \cap X$. (d)的第一部分的证明：点$x$是$A \cap (B \cup C)$的成员当且仅当$x \in A$且下述二者之一：$x \in B$或$x \in C$. 这等价于当且仅当$x$同时属于$A$和$B$，或者$x$同时属于$A$和$C$. 因此$x \in A \cap (B \cup C)$当且仅当$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$，等式证毕。∎

设A_1，A_2，…，A_n是集，则$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$为它们的併，$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$为它们的交。在计算併和交的过程中，关于各项如何结合是无关紧要的，因为有结合律作保证。有必要考虑无限集族中成员的併，因此对于这种併引进一个记号是极为适宜的。考虑下述情形：对于A的每个成员a，对应着一个给定的集X_a，集A称为指标集。那么所有这些X_a的併，记作$\bigcup\{X_a : a \in A\}$，定义为所有这样的点x所组成的集，使得$x \in X_a$对A中某一个a成立。类似地，所有$X_a (a \in A)$的交，记作$\bigcap\{X_a : a \in A\}$，定义为$\{x : x \in X_a$对于A中每个a都成

立}。一个很重要的特例是：指标集本身就是集族$\boldsymbol{A}$，而X_A恰好就是集$A(A\in\boldsymbol{A})$，则上述定义便变为$\bigcup\{A:A\in\boldsymbol{A}\}=\{x:x\in A$对$\boldsymbol{A}$中某一$A$成立$\}$，$\bigcap\{A:A\in\boldsymbol{A}\}=\{x:x\in A$对$\boldsymbol{A}$中每个$A$都成立$\}$。

关于集族的成员的併和交的代数性质有许多重要的定理，但是我们仅需用到下述这些，它们的证明从略。

3 定理 设A是指标集，对于A中每个a，都对应着固定集Y的一个子集X_a，则

(a) 若B是A的子集，则

$$\bigcup\{X_b:b\in B\}\subset\bigcup\{X_a:a\in A\},$$
$$\bigcap\{X_b:b\in B\}\supset\bigcap\{X_a:a\in A\}.$$

(b) (摩根公式)

$$Y\sim\bigcup\{X_a:a\in A\}=\bigcap\{Y\sim X_a:a\in A\},$$
$$Y\sim\bigcap\{X_a:a\in A\}=\bigcup\{Y\sim X_a:a\in A\}.$$

摩根公式通常可简述如下：併的余等同于余的交，交的余等同于余的併。

必须充分认识：熟练掌握集的理论运算是十分重要的。本书附录列举了一系列定理，它们可以充作初学者的习题。（参看类的基本代数那一节。）

4 注记 在集论的早期工作中，通常将两个集A与B的併记作$A+B$，它们的交记作$A\ B$，采用类似于实数系所采用的运算符。某些相同的代数法则仍保持正确；但是，有充分理由迫使人们放弃沿用这种记号。因为经常会碰到要将集的运算施加在群、域或线性空间上。设A和B是加法群的子集，则$\{c:c=a+b,\ a\in A,\ b\in B\}$自然被命名为“$A+B$”，同样，$\{x:-x\in A\}$自然记作“$-A$”。因为刚才定义的集在运算时系统地用到，而在计算的同时又出现併、交与余等运算，因此本书选择的记号看来是最适宜的。