高等学校教学用書

高等数学教程

第二卷 第二分册

A. K. 伏拉索夫著

高等教育出版社

高等学校教学用書

高等数学教程

第二卷 第二分册

A. K. 伏拉索夫著
东北工学院数学教研組譯

高等教育出版社

本書系根据苏联國立技術理論書籍出版社(Государственное издательство технико-теоретической литературы)出版的伏拉索夫(А. К. Власов)著"高等数学教程"(Курс высшей математики)第二卷1952年第五版修訂版譯出的。原書經苏联高等教育部審定为高等工業学校教学参考書。

本書共二卷,第二卷分上下兩册出版。第二卷系由第一編高等代数初步与第二編微積分兩个部份所組成。高等代数初步的內容是高等代数的一些基本概念、基本定理和原理、方程的根的近似計算以及平面矢量和复数等。微積分是本書第一卷微積分第一編中各基本原理和方法的發展,其內容为有理分式和超越函数的積分法、多变量函数的微分法、多变量函数的極大極小、多重積分、曲面積分与曲線積分、函数級数、微分方程初步以及分析学在几何方面的应用等。

参加本書第二卷翻譯工作与校訂工作的为童勤謨、柳孟輝、王澤漢等十九位同志。

本書原由商务印書館出版,自1956年10月起改由本社出版。

高 等 数 学 教 程

第二卷 第二分册

A. K. 伏拉索夫著

东北工学院数学教研組譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇號

(北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號)

上海集成印刷廠印刷 新華書店總經售

統一書號 13010·221 開本 850×1168 1/32 印張 7 5/16 字數 193,000

一九五四年四月商務初版(共印12,000)

一九五六年十月上海新一版

一九五六年十月上海第一次印刷

印數 1—2,000 定價(8)¥0.85

第二分册　目錄

第八章　展佈於一域上的積分和展佈在此域邊界上的積分間之關係

§1. 平面中的奧斯特洛格拉德斯基公式

對於展佈在一個域上的積分和展佈在這個域的邊界上的積分之間的關係，就數學分析和數理物理學來講都是特別重要的。這些關係即奧斯特洛格拉德斯基公式及斯鐸克斯公式。從比較簡單的方面來看，積分學的基本公式也是屬於這範疇的，而根據積分學的基本公式，展佈在一個區間的定積分之值可由它的原函數在上下限之值來確定，也就是可由原函數在積分區間的兩界點之值來確定。

展佈在任何一個平面面積的二重積分可化成展佈於這域的邊界曲線的曲線積分。建立在這樣的兩種積分之間的關係名為平面**奧斯特洛格拉德斯基公式**。為了引出這公式，我們取如下的兩個積分來研究：

$$\iint\limits_{D}\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy \quad 及 \quad \iint\limits_{D}\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy,$$

其中 $P=P(x, y)$ 及 $Q=Q(x, y)$ 乃是在積分域 D 上的連續單值函數。假定這域的邊界曲線 C 具有下述特性：經過域的內部一點並與 Ox 軸或 Oy 軸平行的任意一條直線與 C 相交在兩點。設平行於 Oy 軸的一條直線交邊界曲線 C 於 $M_1(x, y_1)$ 及 $M_2(x, y_2)$ 兩點。依二種積分的計算法則，可有

$$\iint\limits_{D}\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy=\int_a^A dx\int_{y_1}^{y_2}\frac{\partial P}{\partial y}dy=\int_a^A[P(x, y_2)-P(x, y_1)]\,dx, \quad (1)$$

其中 a 及 A 乃是邊界曲線 C 上的點的最小橫標及最大橫標，也就是點 U_1, U_2 的橫標及點 V_1, V_2 的橫標(圖 67)；而 y_1, y_2 乃是變數 x 的函數，它們各表曲線 $U_1M_1V_1$ 及曲線 $U_2M_2U_2$❶。但積分

---

❶ 點 U_1 及 U_2 可重合；點 V_1 及 V_2 也同樣可重合。

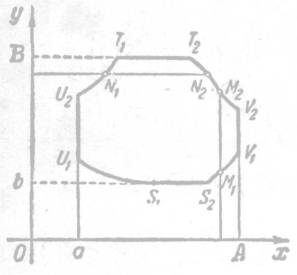

圖 67

$$\int_a^A P(x, y_1)dx \quad 及 \quad \int_a^A P(x, y_2)dx$$

可看作曲線積分：第一個展佈於邊界曲線 C 的一段弧 $U_1M_1V_1$，第二個展佈於另一段弧 $U_2M_2V_2$，即

$$\int_a^A P(x, y_1)dx = \int_{U_1M_1V_1} P(x,y)dx,$$

$$\int_a^A P(x, y_2)dx = \int_{U_2M_2V_2} P(x, y)\,dx = -\int_{V_2M_2U_2} P(x, y)dx。$$

因此，等式（1）可化爲

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_{V_2M_2U_2} P(x, y)dx - \int_{U_1M_1V_1} P(x,y)dx,$$

或
$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_{V_2M_2U_2} P(x, y)dx - \int_{U_2U_1} P(x, y)dx -$$

$$-\int_{U_1M_1V_1} P(x, y)dx - \int_{V_1V_2} P(x, y)dx,$$

右端第二及第四兩個積分是我們增添的，它們各展佈於垂直於 Ox 軸的兩條線段 U_2U_1 及 V_1V_2 上（兩線段可各蛻化成一點），它們每一個之值等於零。但結合四個弧 $V_2M_2U_2$，U_2U_1，$U_1M_1V_1$，V_1V_2，可見它們按逆時針向構成曲線 C 一周，由是

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_C P\,dx。 \qquad (2)$$

和上面所說的相同，我們可用 b 及 B 表邊界曲線 C 的點的最小縱標及最大縱標，亦卽點 S_1，S_2 的縱標和點 T_1，T_2 的縱標，並以 x_1 及 x_2 表點 N_1，N_2 的橫標，這兩橫標當然與 y 有關；那麽可得

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int_b^B dy\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial Q}{\partial x}dx = \int_b^B [Q(x_2, y) - Q(x_1, y)]dy =$$

$$= \int_{S_2N_2T_2} Q\,dy + \int_{T_1N_1S_1} Q\,dy =$$

$$= \int_{S_2N_2T_2} Q\,dy + \int_{T_2T_1} Q\,dy + \int_{T_1N_1S_1} Q\,dy + \int_{S_1S_2} Q\,dy,$$

或因弧 $S_2N_2T_2$，T_2T_1，$T_1N_1S_1$ 及 S_1S_2 構成邊界曲線 C 的全周，可有

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy=\int_C Q\,dy\text{。}\tag{3}$$

從等式(2)及(3)，用減法，卽得平面的奧斯特洛格拉德斯基公式：

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\int_C P\,dx+Q\,dy\text{。}\tag{4}$$

如果經過域 D 內部一點並與橫軸或縱軸平行的每一條直線交 D 的邊界曲線 C 多於兩點，我們可作適當的剖線把 D 分劃成小域 $D_1, D_2, \cdots$，使對於每一個小域我們得引用公式(4)。按項把這樣所得的等式相加，我們仍舊得公式(4)，原因是在右端的各積分中，沿剖線的積分依相反的方向各出現一次，彼此抵消化爲零，所以右端的積分仍結合成功一個沿邊界曲線 C 的曲線積分。

應用奧氏公式(4)，我們可把一個域的面積用展佈於這域的邊界的一個曲線積分表出。令

$$P=-\frac{1}{2}y \quad 且 \quad Q=\frac{1}{2}x,$$

可有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=1\text{。}$$

由是

$$\iint_D dx\,dy=\frac{1}{2}\int_C x\,dy-y\,dx\text{。}\tag{5}$$

但二重積分 $\iint_D dx\,dy$ 卽表它的積分域 D 的面積；由此可見我們能從公式(5)，利用展佈於一個域的邊界曲線的曲線積分來計算這域的面積。

如果邊界曲線 C 的方程呈參數型：

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ 並且\ \varphi(t_0)=\varphi(T),\ \psi(t_0)=\psi(T),$$

那麼等式(5)左端的曲線積分可化爲簡單的定積分，而於是我們得到早已熟悉的求面積 D 的公式[第一卷，第 458 頁，(10)]：

$$D=\frac{1}{2}\int_{t=t_0}^{t=T}(x\,dy-y\,dx)。$$

仍藉助於這同一個公式(4),我們可用另外形狀的曲線積分表出面積 D。命 $P=-y$, 而 $Q=0$, 可有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=1 \quad 且 \quad \iint_D dx\,dy=-\int_C y\,dx。 \tag{6}$$

命 $Q=x$, 而 $P=0$, 可得

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=1 \quad 且 \quad \iint_D dx\,dy=\int_C x\,dy。 \tag{7}$$

積分(6)及(7)的半和重新給出公式(5)。

從公式(4)我們可導出"曲線積分 $\int P\,dx+Q\,dy$ 只和積分路徑的始點及末點有關"的條件。實際來看,在此情形,如果設 P 及 Q 連同它們的偏導數在一個域內是連續的,那麼沿這域內一條封閉周線的曲線積分之值應該等於零。由公式(4)可見二重積分

$$\iint\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

對於任何域來說,應該等於零;而欲這樁事實是可能的,那麼必須

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

而且僅須如此。這個條件我們業經在前面用另外的方式導出(參閱第六章, §§ 7—8)。

§ 2. 空間奧斯特洛格拉德斯基公式

空間奧斯特洛格拉德斯基公式給出有關三重積分的相當公式,它的形狀是

$$\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz=\iint_S P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy, \tag{8}$$

其中 P, Q, R 連同它們的偏導數都是 x, y, z 的連續函數:

$$P=P(x,y,z),\quad Q=Q(x,y,z),\quad R=R(x,y,z)。$$

在公式中，我們知道 S 是體積 V 的邊界曲面，也就是 S 圍成體積 V。首先假定經過體積 V 的內部一點且平行於任一坐標軸的直線與 S 相交於兩點。

應用分層計算的規則於三重積分 $\iiint \frac{\partial R}{\partial z} dx\,dy\,dz$，可有

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dx\,dy\,dz = \iint\limits_D dx\,dy \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial R}{\partial z} dz, \tag{9}$$

其中 z_1，z_2 是 x 及 y 的函數，分別由曲面 S 的下半部分和上半部分來決定：

$$z_1=z_1(x,y),\quad z_2=z_2(x,y)\quad (z_1<z_2)。$$

D 乃兼是這兩部分曲面投影到 xOy 面上的一個平面域。作出等式(9)第二端關於 z 的積分，可得

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dx\,dy\,dz = \iint\limits_D [R(x,y,z_2)-R(x,y,z_1)]\,dx\,dy。 \tag{10}$$

展佈於域 D 的二重積分

$$\iint\limits_D R(x,y,z_2)\,dx\,dy \quad 及 \quad \iint\limits_D R(x,y,z_1)\,dx\,dy$$

可視爲展佈於 S 的兩部分的上側的兩個曲面積分：第一個乃視爲展佈於上半部分 $[z_2=z_2(x,y)]$ 的上側的積分，第二個乃視爲展佈於下半部分 $[z_1=z_1(x,y)]$ 的上側的積分，原因是這兩個積分中的面積素 $dx\,dy$ 都是正：

$$\iint\limits_D R(x,y,z_2)\,dx\,dy = \iint\limits_{\overline{S}_2} R(x,y,z)\,dx\,dy,$$

$$\iint\limits_D R(x,y,z_1)\,dx\,dy = \iint\limits_{\overline{S}_1} R(x,y,z)\,dx\,dy。$$

記號 $\overline{S}_1$ 及 $\overline{S}_2$ 乃表曲面 S 的兩部分的上側。因此，以 $\underline{S_1}$ 表曲面 S 的下

半部分的下側，則可有

$$\iint_D [R(x, y, z_2) - R(x, y, z_1)]\, dx\, dy =$$

$$= \iint_{\overline{S}_2} R(x, y, z) dx\, dy + \iint_{\underline{S_1}} R(x, y, z) dx\, dy\text{。}$$

曲面 $\overline{S}_2$ 及 $\underline{S_1}$ 通常可由一個直立的柱面所聯繫，這柱面的母線垂直於 xOy 平面(可能這些母線各蛻化成點)：$\overline{S}_2$，$\underline{S_1}$ 以及聯繫它們的柱面共同構成曲面 S 的外側。因此，等式(10)可化呈下狀：

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx\, dy\, dz = \iint_S R(x, y, z) dx\, dy, \tag{10'}$$

其中 S 當然表體積 V 的邊界曲面的外側。

同樣的方法，可得

$$\left.\begin{aligned} &\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dx\, dy\, dz = \iint_S P\, dy\, dz, \\ \text{及}\quad &\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dx\, dy\, dz = \iint_S Q\, dz\, dx\text{。} \end{aligned}\right\} \tag{10''}$$

由等式(10′)及(10″)，相加卽得公式(8)。

如果過 V 的內部一點且平行於不拘那一個坐標軸的一條直線交 S 多於兩點，那麼我們可作新的剖面，把 V 分劃成小部分，使每一小部分適合所要求的性質。應用公式(8)於每一個這樣的小部分。把這樣所得的等式相加，我們仍得公式(8)；原因是在所得諸曲面積分中，沿每一所作剖面的積分都是依正反兩側各作出一次，故沿這樣剖面的積分之和爲零。

應用公式(8)，我們可利用曲面積分來定體積。置

$$P = \frac{1}{3}x, \quad Q = \frac{1}{3}y, \quad R = \frac{1}{3}z,$$

可得

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1$$

及 $$\iiint_V dx\,dy\,dz=\frac{1}{3}\iint_S x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy\text{。}$$

以 α,β,γ 表曲面 S 的外法線的側斜角,則可有

$$\iiint_V dx\,dy\,dz=\frac{1}{3}\iint_S (x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)d\sigma,$$

其中 $d\sigma$ 表曲面面積素。如果以 r 表點 (x, y, z) 的向徑,而以 (r, n) 表這向徑與外法線 n 所夾之角,那麼把折線 (x, y, z) 的各節及閉合線 r 投影到外法線上,可得

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=r\cos(r, n)\text{。}$$

由是 $$\iiint_V dx\,dy\,dz=V=\frac{1}{3}\iint_S r\cos(r, n)d\sigma\text{。}$$

例如,倘若一個球面的中心位於原點,那麼 $r=$常數,而 $(r, n)=0$;由是球的體積為

$$V=\frac{1}{3}r\iint_S d\sigma,$$

更因 $$\iint_S d\sigma=4\pi r^2,$$

故得 $$V=\frac{4}{3}\pi r^3\text{。}$$

從奧斯特洛格拉德斯基公式,我們可見要使曲面積分

$$\iint_S P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy\quad(S\text{ 非為閉曲面})$$

與曲面的形狀無關,只和它的邊界曲線有關,那麼我們必須有而且僅須有

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0\text{。}\tag{11}$$

實際看來,設 S 及 S_1 是由同一條邊界曲線所圍的兩塊曲面,並設這兩塊曲面沒有其他的公共點。依條件,沿兩曲面的同側的兩個曲面積分

彼此相等，因此沿封閉曲面 $S+S_1$ 的外側的曲面積分應等於零。由是，對於任意一個空間域 V，如果函數 P, Q, R 和它們的導函數 $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ 於其中是連續的，那麼我們應有恆等式

$$\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz=0,$$

這只有在條件(11)成立時才是可能的。

§3. 格林定理

應用奥氏公式於下列函數

$$P=U\frac{\partial V}{\partial x}-V\frac{\partial U}{\partial x},\quad Q=U\frac{\partial V}{\partial y}-V\frac{\partial U}{\partial y},\quad R=U\frac{\partial V}{\partial z}-V\frac{\partial U}{\partial z},$$

其中 U 和 V 是變數 x, y, z 的函數，這兩函數連同它們的偏導函數在所論的域 V 內是連續的(不要與函數 V 混淆)；那麼我們可導出格林定理，這定理在數理物理學中具有重要的意義。首先注意

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=U\Delta V-V\Delta U,$$

其中 ΔU 及 ΔV 表下列的式子，卽所謂第二微分參數❶：

$$\Delta U=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2},$$

$$\Delta V=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}。$$

除此之外，仍以 S 表域 V 的邊界曲面，並以 n 表點沿曲面 S 的法線的位移，則有

$$x=x_0+n\cos\alpha,\quad y=y_0+n\cos\beta,\quad z=z_0+n\cos\gamma,$$

❶ 第一微分參數乃指如下的式子：

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2。$$

其中(x_0, y_0, z_0)乃是計算 n 的起始點，而 α, β, γ 如前表 n 與坐標軸的傾斜角。把函數 U 及 V 看作 n 的複合函數，那麼我們可求它們的沿法線的導數，即關於變數 n 的導數：

$$\frac{dU}{dn}=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dn}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dn}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dn},$$

即
$$\frac{dU}{dn}=\frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma;$$

同理可有
$$\frac{dV}{dn}=\frac{\partial V}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial V}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial V}{\partial z}\cos\gamma。$$

再計算下式：

$$P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy=(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)d\sigma,$$

得到
$$P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy=\left(U\frac{dV}{dn}-V\frac{dU}{dn}\right)d\sigma。$$

現在引用奧氏公式，可得格林定理如下：

$$\iiint\limits_V(U\Delta V-V\Delta U)\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_S\left(U\frac{dV}{dn}-V\frac{dU}{dn}\right)d\sigma。$$

§4. 斯鐸克斯公式

設有一塊曲面 S，由一個封閉曲線 L 圍住。展佈於曲面 S 的某一定形態的函數的曲面積分與沿邊界曲線 L 的某曲線積分有一定的關係，這關係名為斯鐸克斯公式。如果 $P=P(x, y, z)$，$Q=Q(x, y, z)$，$R=R(x, y, z)$連同它們的偏導函數都是 x, y, z 的連續函數，那麼斯鐸克斯公式是

$$\iint\limits_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\,dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\,dx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=$$
$$=\int_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz。\tag{12}$$

為了確立這個等式，我們可從左端的積分中選出包括同一函數的積分，例如包括 P 的積分，並把所選出的部分寫成如下的形狀：

$$\iint_S\left(\frac{\partial P}{\partial z}dz\,dx-\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy\right)=\iint_S\left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta-\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)d\sigma, \tag{13}$$

其中 β 及 γ 爲曲面的法線與 Oy 軸及 Oz 軸的正向的傾角，且 $d\sigma$ 爲曲面面積素。這裏變數 x, y, z 由曲面 S 的方程 $z=\varphi(x, y)$ 所聯繫。首先假定函數 $z=\varphi(x, y)$ 是單值的，並且 $\cos\gamma$ 不變號。再假設曲面積分展佈於曲面的上側(當然也可假定展佈於另一側)，那麼 $\cos\gamma>0$。週線 L 圍出曲面 S; L 投影到 xOy 平面上成爲一條曲線 C，而 C 圍成一個平面域 D; 我們更假定域 D 與曲面 S 有相互的一一對應關係。因爲 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 與 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 及 -1 成比例(第 148 頁)，所以

$$-\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}=\frac{\partial z}{\partial y},$$

由是

$$\iint_S\left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta-\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)d\sigma=-\iint_S\left(\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\,d\sigma。$$

在這積分中，以 $\varphi(x, y)$ 代 z，以 $dx\,dy$ 代 $\cos\gamma\,d\sigma$，我們可把它變成一個展佈於域 D 的尋常的二重積分。再進一步用 P_1 表 $P[(x, y, \varphi(x, y)]$，則可有

$$\frac{\partial P_1}{\partial y}=\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y},$$

並且 $$-\iint_S\left(\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\,d\sigma=-\iint_D\frac{\partial P_1}{\partial y}dx\,dy。$$

依平面上奧氏公式[§ 1,(2)]，

$$-\iint_D\frac{\partial P_1}{\partial y}dx\,dy=\int_C P_1\,dx。$$

但函數 $P_1=P[x, y, \varphi(x, y)]$ 在曲線 C 上的點之值，完全與函數 $P(x, y, z)$ 在曲線 L 上相當點之值相同，由是

$$\int_C P_1\,dx=\int_L P\,dx,$$

於是

$$\iint_S\left(\frac{\partial P}{\partial z}dz\,dx-\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy\right)=\int_L P\,dx。\tag{14}$$

這裏曲線積分須沿順的方向作出，而所謂順的方向可根據坐標軸的相互坐向以下列方式確定：一個觀測者，站在 xOy 面，頭頂向 Oz 軸的正向，它沿 xOy 面上任何一個域的邊界繞行；如果他繞行前進的方向符合於一條射線繞原點由 Ox 正向轉 $90°$ 至 Oy 正向的旋轉方向時，那麼我們便說這人是依順向繞行的。

對於如在圖 61 的坐標軸的坐向，所繞之巡行的域將永留在繞行者面向前進的右方。如果繞行一塊曲面的周界 L，那麼繞行者必須站在曲面積分所展佈的一側，頭頂向法線的正向，並使曲面留在繞行者面向前進的右側。

如果函數 $z=\varphi(x,y)$ 不是單值的，並且當點在曲面上變動時，$\cos\gamma$ 可以變號，那麼我們必須用適當的諸剖線把曲面 S 分成小部分 S_1, S_2, …，然後應用等式(14)於每一小部分；由是推知這等式(14)對於全部曲面 S 仍將有效，因爲在相加時，沿每一剖線的積分依相反的兩方向各出現一次的緣故。

完全與上類似，我們可證等式

$$\left.\begin{aligned}\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial x}\,dx\,dy-\frac{\partial Q}{\partial z}dy\,dz\right)&=\int_L Q\,dy,\\ \iint_S\left(\frac{\partial Q}{\partial y}dy\,dz-\frac{\partial R}{\partial x}dz\,dx\right)&=\int_L R\,dz。\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

把(14)及(15)按項相加，卽得斯鐸克斯公式(12)，這公式也可改成如下的形狀：

$$\iint_S\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]d\sigma=$$

$$=\int_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz。\tag{12'}$$

從斯鐸克斯公式，我們可導出“沿任何一段空間曲線的曲線積分與

曲線形狀無關,只和它的始末點有關"的必須及充分條件。實際看來,從與路徑形狀無關的這樣一條性質,可見沿相當域內任一條封閉周線的曲線積分應等於零。在這情形,對於這封閉周線所圍的任何一塊曲面,斯鐸克斯公式中的重積分皆應等於零,因此

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma=0;$$

曲面既可呈任意的形狀,那麼 α, β, γ 當然也都是任意的,所以從這個等式,我們可推得所求的必須條件:

$$\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0。$$

這些條件的充分性可直接從等式(12′)察知。有了這些條件,微分式子

$$P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

將是某一個函數 U 的全微分,這函數 U 可由下列曲線積分所確定:

$$U(x,y,z)=\int_{a,b,c}^{x,y,z}P\,dx+Q\,dy+R\,dz。$$

§5. 矢量分析的概念

欲了解在本章中所引出的奧氏公式及斯氏公式究竟能有什麼意義,我們應注意:三個連續函數 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$)可作爲從 (x,y,z) 點發出的一個矢量在坐標軸的分矢。以 V 表這矢量之長(也叫模),並以 λ, μ, ν 表這矢量和坐標正向所成的傾斜角,則有

$$V=\sqrt{P^2+Q^2+R^2},$$

$$\cos\lambda=\frac{P}{V},\quad \cos\mu=\frac{Q}{V},\quad \cos\nu=\frac{R}{V}。$$

一個域,如果這些函數於其中是連續的,我們便稱這域爲一個**矢場**。矢量 V 可能有各種不同的物理意義。例如,以任何法則作用在任何物體上一點的力,液體流動的速度等等都是矢量。注意:給了矢量意義之後,奧氏及斯氏公式中所包含的式子都有適當的物理意義,而這些公式