经典数学的综合教材

H.B. GRIFFITHS
P.J. HILTON 著

第一册

贵阳师范学院数学系
一九八三年十月

肖荣圭赠

说　明

本书对于与中学教学联系较紧密的经典数学各主要分支，深入浅出地用现代观点做了统一处理，对于深入研究中学数学教材有一定的参考价值。为促进中学数学研究，提高教育质量，在学院科研科和数学系领导的大力支持下，由陈应枢同志和陈仪传同志完成了全书的翻译工作：序言、第一章至第二十二章由陈应枢同志译出，第二十三章至第三十九章由陈仪传同志译出。本书的翻译工作得到赵咸云教授的鼓励和支持，并详细校阅了部份内容，直到病重住院逝世之前还在不断工作。在本书装印成册之际，不能不引起我们对赵先生的深切

怀念。全书基本上是直译的，由于時间紧促，译者水平所限，不妥之处在所难免。我们冒昧地把它公诸于同行，是希望得到同志们的帮助，使本书的翻译质量得到进一步的提高。

贵阳师院数学系　中学数学教研室

1983. 9. 15.

Springer—Verlag 版序言

这一版在内容上和以前没有什么不同，但是由于第一版在一九七〇年发行，而今天读者得到这本书时，数学自身和数学的学习方面都经历了非常深刻和急剧的变化——特别是和本书构思和写成的年代相比。这些变化的重要影响已逐步渗透到程序数学、信息论、数值分析，计算机科学（还不单这些）。在这本书里我们排除了这些课题，因为我们在这些课题的探讨中没有任何特殊的贡献——虽然我们显然承认它们是有趣和重要的。

今天，数学的研究领域的进一步发展，并居于如此显著的地位，这是由于计算机在教育和社会中起了重要作用的结果。虽然这些学科已变得非常重要，但它们尚不能取代本书中所包含的更为经典的科目。进一步说，当然还有应用数学的广大领域——例如微分方程——它们在经典学科中比现代学科中居于更中心的位置。因此我们可以宣称不论是就数学自身而言，还是就它在现实世界的应用的观点来看，本书中所论述的内容仍不失为适当的；纵然数学在急速地发展，而经济现实对于应用的需求，对数学所施加的压力远较十年前为大，我们仍然必须学习这些内容。事实上在整本书里，我们也是随写随指出其应用的。

我们的下一个说明是针对美国读者，当写成这本书的时候，我们并没有想到它将供给欧洲和加拿大这样广大的范围（但由于出版部门的某些予想不到的政策上的改变这已成为事实——本书原先的出版政策是由它们掌握着的）目前美国和欧洲体系在学习上的一个重大差别是美国的大学课通常是指定教科书，而在欧洲体系也可能介绍一些教科书，但它们很难得会构成课程的一个完整的部分，因而在第36页为美国读者提供了一个包括

五个课程的目录，它们可从本书中适当选择材料来组成，每一个课程可以在美国的大学或学院的大纲中找到一个归处。例如课程2（代数）编入了整数标术、线代数、群论介绍、多项式函数和多项式方程的理论和一些布尔代数。当然还可以补充其它章节的材料。又如课程5（分析）或多或少地讨论了微分学和积分学理论的初步，进而讨论实多元函数、复变函数以及实分析中诸如隐函数理论等课题。

为与本书的标题相适应，在课程作业里我们倾向于形成一个较高的观点，在本书初版序言里我们曾强调，总的说来，我们应牢记读者已经接触过这些题材，而他（她）们又愿意随着知识和数学修养的加深来回顾这些内容，我们深信本书可以作为美国数学科学学位课程的适当的基础，特别是作为硕士级学位课程的必要基础。

通常认真考虑数学专业的学生在现在和可以预见的将来，进入美国职业市场时其所受教育的适用性的人们的观点是*，学生应用数学到工业上并不像数学自身那样具有那些人为的技巧性，学生们需要的是以非常審慎的态度来应用数学，使之成为有效适用的手段，因而在我们主张的第二点，从具有硕士学位的学生进入职业市场来着眼于大学的数学（教育）也许是吻合于人们的惯常看法的。

类似的意见对于欧洲体系相应于大学学位的称号的人来说也是完全适用的，在那里许多大学课程把高度抽象的数学强加给学生们，而他们具有的经典数学基础是十分不够的（因为轻视）

*这些已在全国应用数学训练调查委员会的成员中讨论过，而我们当中的一位（P、J、H）是该委员会的主席。

我们还认为由本书构成的课程对于想成为职业数学家的学生也是有用的，但对于这样的学生自然需要做很多的补充。

这一版除改正了原版中的错误以外和原版没有什么不同，对于那些向我们指出原版中错误的读者我们自然是十分地感谢的，本版还增加了少量的分析练习题。

簡　介

1、本书的缘起和宗旨

本书来源于作者们在美国伯明翰大学数学系的一些同行协助下给出的讲座教材，这个教材是为在伯明翰地区工作的文法中学的数学教师设计的，虽然它包含了关于“现代数学”在工业、情报理论、统计和计算机科学等方面的应用和专题讲座，但我们原先的宗旨是：想介绍在现代的大学数学系里的一些思想动态并探讨这些思想与中学数学的关系。我们希望我们的相互讨论能有助于所有中学和大学，在注意到数学家们成长中的不足之处以后，能使他们的学生在数学准备上完成得更快，讲座在学期中的星期一下午举行，每次持续二至三小时，这种合作（而且是认真执行的）在当时（1961—62）确属罕见所幸的是现今已经多了起来，这里我们愿意谈谈，在我们与教师听众之间这种又有付出又有收益的讨论中，我们有多大的收获，看来这样的接触不仅关系到数学系，而且对大学也有巨大的价值。

当然在此教材中不可能提供一个适应于中学第六年级和大学一年级水平的有关纯数学课程的广泛题材，因而我们决定从经典数学中选取某些题材而用近代的观点来处理基本概念和理论。谈到“近代”的观点，我们不愿对今日如何教学的任何特殊见解表现出倾向性，甚至我们有意表明想从一个数学专业工作者的观点来处理这些题材，来适用近代数学的语言和标准，同样的宗旨也贯穿于这本书的始终。

然而，这本书自然要比那个教材的内容多得多，尽管我们没有引进在该教材中所没有讲过的任何题材，但我们对讲过的每个课题都给予了尽可能多的关注（或者说已够满意了）。在

写出这本书的全过程里，我们的愿望是使大致具有一年的大学数学学习水平的学生（不论任何年纪）能接受这本书，而且在阅读它之前无需要通过讲课或课堂练习的简介（见p36）

所涉及的课题或多或少都已表达在本书各部分的标题里了，做为例外的是第一、二、三部分它们可以全部归在这样的课题之下：集合论和基础。于是除此课题外，我们讨论了算术、几何、代数、数系、分析。这样的选择并不意味着除了我们所论及的课题之外，数学中再无其它课题可供这种水平的读者作为复习的内容，我们把它们选出来作为课题的中心内容，是因为它们构成了中学教师和大学教师共同具有的经典（纯）数学的基础。我们的原意并不想给读者提供一个初次接触的题材和思想，讲述教材的要旨是鼓午读者用现代数学思想再一次回顾一些相当熟练的思想，并把它们置于现代数学的结构之中，我们期望能使读者看到某些关键的思想是怎样一次又一次的再现，而使读者把早期的数学实践中表面上看来不同的部分从实质上统一起来。我们还相信在某些情况下，我们的写作方式是介绍和发展某一概念的最好途径，但这既不是我们写这本书的主张，也不是写这本书的动机。

在选课题时，我们深知现代概率和统计以及信息论在现阶段的重要性，我们当然希望一个学生现今要对数值分析和计算机科学相当熟悉，我们充分肯定计算机在当代社会里扮演着一个重要角色，我们深知这一角色必将在整个教育上发生影响，但是我们没有把它列入本书之中，若加入了这个内容，不仅要使限定了篇幅的教科书增加份量，而且必然要导致题材上一个十分不同的组织方式。此外，这些被排除的题材不像被选入的题材那样为读者所熟知，而且就称他们熟悉这些内容，也可以

等期作为首次介绍给予读者的作品与我们所给出的内容是不会有多大差别的（看来对作者来说一个好的原则是，如果没有什么新东西可说最好保持沉默）然而，我们时常强调某些技巧的算法性质，因为当表述一个论题或为使学生表明他是明晓一种思想并准备向计算机解释这一思想时，算法性质常是有帮助的。（这只是这样一个概念的延伸既要想懂得毕达哥拉斯定理最好的办法是让他们把自己设想成毕达哥拉斯，并进行探索和为证明定理而奋斗）我们希望受鼓舞的读者们能承认明利用计算机而导致对数学的某些特殊的洞察明晰；如果他是个教师，他将自觉地将这一点传授给他的学生

二、表达方式

二、表达方式

我们的写作风格反映了我们这样一种意图，即对所写题材提供一个回顾（从对一个熟悉的背景做观察开始）我们给出了大多的理论，那是把它们做为特定的知识实体来陈述的，自然为了推广或是为了给出一个定理的深刻含义而引进一个新的概念其动机常常是很明显地和我们有关，但是我们采用了实际是阐明定义和结论的教学方式，而明显地留给学生一点选择的余地，使他们能自己接近题材并取得进展，然而我们没有忘记"数学里最重要的存在定理是人为的存在"，我们的教学思想，让我们再重复一次，不属于任何偏颇的，所谓数学的"发现法"那一类，但也并不意味着我们否认数学的创造性方面至少和应用数学使我们的知识系统化方面是具有同样的重要性。但是在一个题材不太具有技巧性的水准下（或者用"中学数学的目的"†一书中的语言，在准数学的水准下）通过使用和应用早已变为熟悉了的时候，尚需要说明其数学思想所包含的实质，并且组织这些知识去进一步获益，这当然需要一个合适的表达方式和仔细的组织题材，以揭示它和数学的其他部分的内在联系，使思想的结构可以更清晰地显现出来。

这就是居先讲义里的基本思想。也是由课堂讲义转而为印刷成书时所需要强调处理题材的风格，我们非常希望教师们以我们的课题为原材料。这就是说他们可以选用这些课题而沿着卓越的ATM手册里"数学中的若干课"的路数（见本书末附录[36]）在课堂技术上做大胆的处理，在他们实行变革之前是需要专业形式的数学题材的而这也就是我们希望本书所具有的形式。

另一方面数学思想并不是以十分恰当的方式由一个数学家传给另一个数学家的，事实上，常有这样的情况，一篇发表了的文章具有完美的严谨性和形式的正确性，而在表达一个结果的本质上却是不成功的，这只是因为作者在他的作品中忽视了对问题的基本动机或他自己所选择的解题思路做一个概略的描述，对其种含义作数学上的说明，看来要用"中学数学的目的"这本小册子所推荐的"螺旋接近"一种思想先做粗略的介绍稍后再对关键的概念给一个严谨的定义和证明，在这以后，这思想非正式地再次地变得更确切了，我们试图遵循这一原则，甚而与螺旋接近相一致，我们相信课题应该在某个经过"良好规则的进度表"里再现（为简洁请允许我们使用这个独创的词）一个课题由于其自身的理由。在第一处论述过以后，在较后的地方做为一个更广泛的推广的一部分而被重新考察或者在论证某些在初始面貌下十分难以体会的和明晰其微妙处的特征时，也要把某些课题重新审议一番，当一个概念初次出现时，我们概略地直观地讨论它，然后我们把它提高到这样的一种精确程度，以使概念脱离出来，形成问题，这种作法，在一般教科书中是少见的，然后我们再一次地使之精确化。我们有这样的看法，为了使思想和观念能得以自由交流，我们应和读者一块非正式地

十 这个剑桥中学数学协会的报告由Houghton Mifflin印行（1964）它值得每个数学教育感兴趣的人一读。

来获得正确的结论，其次考虑到这本书，主要是做一个回顾在某些地方，我们比较快地由第一阶段达到我们认为适于采取精确语言和符号的阶段。而且我们希望像我们这样足够快地通过这种非正规的型式可以避免掉学究式的训条。

3、螺旋接近与学究式：符号上的困难

我们肯定不愿受到严格化的拘束，但同时我们相信，在背离了精确的术语的过程中，学生应该知道他在哪些地方背离了精确性，学究式的出现也许特别明显地表现在符号上，首先，我们坚持譬如说，一个函数就是简明地用符号"f"来表示（出于实际计算的原因）我们必须确定f的定义域和值域，进而在经过介绍性的漫谈之后，做为严格形式的一个集合的函数的定义首先出现，它(被看做)是取自某个适当的笛卡儿乘积的相互制约的有序数对，我们完全反对在一开始涉及到函数时，就坚持形式主义观点的那种态度，就許微分学来说吧，我们采用较普遍，较传统的记号和术语，诸如"$f(x)$"、"$\frac{dy}{dx}$"、"y是x的函数"等，类似地我们强调恒等函数这个角色，记为I_d甚至记为I，由于其定义域不受限制，读者可将其设想为一个十分重要的无处不在的数学概念，但是在大多数的微积分中，它可能也常常是变成一个不引人注目的元素，同样地最初我们十分着力于函数的复合，但这是服从于另外一个目的，因为我们深信学生若不在开始弄懂函数复合的性质，以及这样的复合与实值函数环上重要的乘积运算之间的区别，那么实际上就会产生混淆，当学生们已经知道$x^{-1}=\frac{1}{x}$时，关于函数f的反函数的符号f^{-1}实际上是有危险性的（考虑到函数的复合时），我们不能与一个含义完全自由的符号打交道——这样的符号将成为一个难以忍受的麻烦，但教师至少应该以严格的解释来尽到他们对学生的责任——在螺旋接近的这个阶段上——由于采用了可

是提供单一的含义。例如，为将有理数扩充到实数，我们同时叙述了哥西数列方法和戴德金分割法，作者之一认为前一方法更富于代数趣味，而后一方法则更富于几何趣味，而另一个作者则持相反意见，但是我们都一致认为在这里断然主张一种观点是愚蠢的，类似地一个函数 $f: S \to T$，若有函数 $g: T \to S$ 使得 gf 是 S 上的恒等函数，而 fg 则是 T 上的恒等函数，我们把这函数说成是可逆的，又说成是相当的"可逆"一辞，带有代数风味，而"相当"一词则带有集合论味道，在其他情况下也是一样。我们试图对一个概念提供各种用途以适应学生在数学上的不同口味，并训练学生能够阅读那些使用不同术语和符号的和不同流派的教科书。

在引入特殊符号时，其特点当然要在课本中加以解释，然而个别符号似应在序言里提到它们，我们用符号■表示证明已经完毕，而用符□表示，所陈述的东西没有给出证明（当然证明是有的！）因为"当且仅当"这个词经常出现，故用新字"iff"表示之；但我们时常用符号"$\Longrightarrow$""$\Longleftarrow$"和"$\Longleftrightarrow$"表示"仅当"，"当"和"当且仅当"我们还常常使用现成的量词 $\exists x$ 和 $\forall x$ 来表示"存在着一个 x"和"对所有的 x"，我们着力于文法的熟练为的是顺利地进行否定，并强调灵活性，为的是有效地使用任何缩写符号。

4、数学的统一性

熟知的思想和技巧的新结构必然地包含着新的思想，但这种新思想如我们在书中所说，是取自集合论、代数或拓扑的统一思想为掌握它们读者最好能收集在特殊情况下做出的论述的意义。寻求统一的目的，部分地出于美学的原因，它还有着实用的目标，就是帮助把众多的详细叙述过的知识控制起来，

前

能导致误解的符号，这阶段学生是有误解的危险性的，在这种情况下，为及早地避免误解，我们用符号f^b代替符号f^{-1}，直到我们觉得准备充分了．再回到f^{-1}，我们宁可勉强地保留传统的，把函数符号写在自变量左边的习惯（即写成$f(x)$）．我们深知把函数符号写在变量右边的好处，但是我们想，一个新的符号，如果不是超过普通的标准的话，即使超过了公认的习惯标准，那么不引入它也是明智的，无疑地，在这种水平的教科书中，是很少见到采用右手习惯的，我们也不愿意单是为了凑合这本书与其他的读者已读过，或不久将要读到的书，在术语符号上的差异而给读者造成不必要的困难．然而由于我们在可适融性方面做了颇多的强调，如果不奉劝读者自己对每种习惯用法做好思想准备，那就是一种倒退了，不烦予示的过份明白，我们要指出，在函数复合的讨论中（在第二章）符号问题将显然成为一个焦点，为了给出

$$S \xrightarrow{f} T \xrightarrow{g} U$$

这个由S到U的复合函数，看来要用符号$f\circ g$或简单地fg。然而依右手习惯，我们就不得不写成$g\circ f$或gf。因为若x是在S内则在复合函数下相应于x的值域是$g(f(x))$．当然，多数数学家使用左手习惯（这当然包括了我们在这本书里所选用的习惯），但记住这种习惯的形式是在函数组合像今天这样被强调之前，研究数学家们在对付上述提到的这种反常现象时，是给出了怎样不同的讲法那常是一种有趣味的感受，很多人在写"fg"时实际是把"g"写在前（即时间在前！）而把"f"写在后，有些则走得更远，把符号"fg"读做"gee eff"！

按照螺旋接近的精神，对于一个给定的题目，我们往往不是只提出关于这个课题的一种观点，甚至对特殊的概念，也不

仅只是在达到某种熟练程度时才产生要循以直线方式写出的作品的愿望。以残忍的直线方式写讲义，远比螺旋接近的技术容易，如果教学的目的远比给阐述者以美学的满足更重要的话，那我们必须将教学法的技巧置于纯逻辑和审查体系的要求之上。由布尔巴基带给我们的数学的统一和顺序的思想已经造成了影响。我们还应注意皮亚杰的错误影响，在任何情形，孩子们的波动将很快地传到大学里来，它从属于一些新的数学计划的更自由的教学途径，大学必须做好准备，好与之相适应。

第二部分涉及到集合论本身，即是说，集合论做为一种数学训练，更甚于它做为数学论说的一种媒介，这部分的题材（例如排列的研究）可以很好地使读者感受到学究式的不必要。把这一点明白地说清楚，事关重大。但是，在这部分，我们试图明确提出的基本前提，在初等的数学论证中常常比较隐晦，甚至没有被注意到，另一方面，我们所写的集合论，是"质朴"的，而在第八部分的第39章，则采取一种更具有人为加工的方式。

第三部分涉及到integral算术，这部分包含着对基础的再检验，而对算术的基础概念，则採取更一般的观点。我们介绍了代数结构（阿贝尔群、环等等）为了显示出传统著作中所正确提出的诸如因式分解，质数等整数性质的本质。然后，我们就进入到可以大大扩大这个理论的应用范围的境界，在第十三章里，我们给出某些应用，学生们在现阶段来说可能是不那么熟悉的。

第四部分涉及到三维空间的几何，我们把这部分立即接在算术的后面，是因为我们觉得计数和度量是数学的两个基础概念，并从中构成我们的数系理论，我们的陈述显然是代数的，而且我们大量地使用向量，然后在第十七章，我们讨论了公理问题，我们介绍了实和复的射影平面，并以之阐述克莱因关于几何的本质的观点。

前

以便于我们记忆，这促使我们加进了范畴和函子这一章，这些观念近来引入数学中发现它十分有益于数学家对数学的广大的不同分支（指的是集合论、群论和拓扑）提出一个通用的结构和语言，然而，如在数学的发展中常有的那样，一个新概念产生后，围绕着这个概念就形成了新的理论，范畴论是一个十分鼓午人的年轻数学分支，然而，我们这里杜绝了深入于该理论的诱惑，而满足于描述它的基本概念是怎样地加深了我们对数学的熟知部分的理解。提出要明确这些部分之间的联系，在原先我们只是直观地领悟到这种联系，我们的目标不超出介绍范畴语言的范围。

六、本教程的结构

本教科书组成如下：全书分为八部分，每部分又分成章（章的编号依序贯通全书）每章分成节。虽然每个部分的前面都有一个说明性的介绍作为序言，我们还是把它们的内容在这里做一个摘要，以明瞭各部分的关系。第一部分是数学语言，它与其余部分不同，如其标题所揭示的那样，这一部分设想要建立起沟通本书其余部分的语言＋因而在这一阶段需要做某些讨论，这一部分非常符合标题的字义是做为其后面部分的必要准备，因为后面要涉及到数学的各种领域，所以我们希望多数学生将选读其中个别部分而略去其余的或者至少不按本书编排的顺序来阅读各部分。

自然，由于本书的主题是数学的高度统一，为阐明某一思想，譬如说算术、那就必须懂得关于代数的部分，而命题和例题的相互参照使得本书连成一个整体，但是题材的陈述顺序则有着极大的任意性。我们鼓励学生按其爱好而做出选择，我们必须声明，我们的处理方式并非总是最经济的，而在大学的许多数学讲义中，则偏爱在逻辑上最直捷的顺序，但是我们相信，多数的学生在学习时，经历了一个远非直线式的道路（包括学习上述的讲义在内）

＋让我们重复一句、如俗话所说，随着概念的增多，语言也将渐渐增多。

数的连续性和数列的极限）实际上是拓扑性质的，从而将导致他们更好地理解这些概念，我们希望他还可以得到一门学科的有意义的介绍、今天这门学科在数学的许多部分里扮演着角色，而该学科本身就是一个十分活跃的探索领域。这章的一部分内容首先在数学教学月刊（也在小册子[45]）上发表，我们感谢原作者同意在这儿引用这些内容。

第七部分涉及到单元和多元的微分学和积分学。关于这个课题的广泛阐述，其自身实质就需要一本书——写分析的教本是如此地多也就是个证明，因而，在这部分较其他部分更突出，我们的目的不在少满，而是为标准定理的证明提示其他教科书，在想把这本书的写作篇幅保持在一定的限度的同时，我们还注意到我们的主要革新是在我们的记号和观点上，因而关于这种水平的分析课本中什么是重要的性质，我们和其他作者本质上是一致的。然而我们对实际教分析时，持绝对严格的观点这一问题还要说几句，无疑地许多学生在数学课中首次接触分析时是栽了筋斗的。另外许多学生则是把分析做为一些法则的汇集来学习的，在数学分析课程否前表现出严重的混乱，在他们看来，迄今为止，分析的学习中除了处处是疑问以外什么都没有学到。我们的目标是想把分析学表述为基于代数和实数这两个基础而又不忘记注入几何的灵感，数学的本质的发展的一部分，借口分析是一个困难的数学训练，因而，给出它全部的基础的理论，并连带着完全的证明，这将使得甚至多数有才能的学生也高度紧张、然而这是一种错误的路线，因为省掉某些证明，我们不仅在适合的地方吧下了我们的色彩，而且我们实在不相信多数学生在这阶段能掌握住他们，这里我们再次求助于螺旋接近。着眼于学生在这一水平下的思想准备，他们还没有达到数学上足够成熟的程度来严格论证全部的定理，而需要的是技巧及其应用，必然的，严格的，但可能是不完

第五部分涉及到代数，当然不能认为代数直接来自算术，两者重叠极多，我们武断地认为代数是由算术对整数的研究直接感发而形成的，而且是算术研究的一个应用。相应地，我们在这部分陈述的代数概念有着更一般的应用（例如在几何上）这部分的许多思想包含于我们在第四部分（和第三部分）的讨论之中，在这一部分，这些观点获得十分严格和明白并从群体代数结构的观点来加以研究。在第二十一章我们将涉及一个给定集合的序关系和代数结构之间的相互作用，这导致我们写出戴德金的实数定义和关于布尔代数的一个简要叙述，它是在第二部分（第8章）开始形成的概念。

第六部分涉及到数系的系统发展和实n维空间R^n上的拓扑和实的n数组的集合。这里比本书的其它部分更引人注目，螺旋接近式是显然的，因为我完了全部过程都与数系一致，我们来构造它！第24章原则地指出了由有理数发展到实数的结构，也许这是全书中最困难的一章，因为在那里，严格的叙述很难附以动机的介绍，而所给的消化时间又是一点点，进一步又从交换环上的理想论的观点（哥西数列）叙述了实数结构。因为我们假定学生已经吸收了必要的代数——算术背景，有些人认为写实数结构是教学法上的一个错误，他们的观点是应该公理化地介绍完备的阿基米德有序体，而完备化的过程应在后面讨论一般距离空间时再介绍，我们希望我们的关于结构的学究式的处理能为学生们在时机到来时自己推广到任意距离空间提供一些便利，我们相信对许多学生来说，这是他们对完备化过程的仅有的一次接触。对那些今后不继续通过纯数学的专业课程的学生，我们不赞成这样的观点，即让他们一辈子对实数是怎样由有理数构成的保持无知状态。数学家对这样一些学生同样是负有责任的！在第25章我们着手正式研究R^n中的拓扑。我们希望读者将由此看到某些基础概念（如函