高等数学教学参考书

高等数学习题解

上册

辽宁科学技术出版社

高等数学教学参考书

高等数学习题解

上 册

蒋众益 高福[illegible]

蒋非非 周国[illegible]

辽宁科学技术出版社

一九八三年·沈阳

高等数学教学参考书

高等数学习题解

（上　册）

蒋众益　高福岐
　　　　　　　　演算
蒋菲菲　周国煜

辽宁科学技术出版社出版　（沈阳市南京街6段1里2号）
辽宁省新华书店发行　沈阳新华印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32　印张：33 1/4　插页：2　字数：774,000
1982年5月第1版　　1983年6月第3次印刷

责任编辑：禾　果　　　　插　图：何柏祥

印数：67,001—137,700

统一书号：7288·22　　定价：3.60元

第一编　解析几何

第二编　数学分析

第一编　解析几何

第一章　平面上的直角坐标、曲线及其方程

平面上点的直角坐标，坐标变换

1·1．设轴上三点A, B, C的排列次序如图1—1，A和B间距离为4，C和B间距离为1．

(a) 求轴上有向线段$\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$的值．

(b) 若以点A为原点，那么点A, B, C的坐标等于什么？

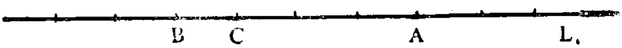


图 1—1

解：(a) 这里，$\overline{AB}, \overline{AC}$的方向和轴的正方向相反，所以 $AB=-|AB|=-4$，$AC=-|AC|=-3$；$\overline{BC}$的方向和轴的正向相同，所以 $\overline{BC}=|BC|=1$；

(b) 若以点A为原点，则A的坐标是(O)，B, C的坐标分别是(-4)，(-3)．

1·2. 已知数轴上点：A,B,C 的坐标依次为 -6，0，8，求轴上有向线段 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 的值.

解：根据“有向线段的值等于终点的坐标减去始点的坐标”得出：

$$AB = 0-(-6) = 6,$$
$$BC = 8-0 = 8,$$
$$CA = -6-8 = -14.$$

1·3. 作下列各点：$A(2,7)$, $B(3,0)$, $C(1,-4)$, $D(0,5)$, $E(-1,2)$, $F(-4,-3)$, $G(-2,0)$, $H(0,-3)$, $K\left(-3\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}\right)$, $L(\sqrt{2},-\sqrt{3})$, $N(0,\sqrt{5})$.

解：根据已给的坐标，A在第一象限，B在X轴的正向上，C在第四象限，D在Y轴的正向上，E在第二象限，F在第三象限，G在X轴的负向上，H在Y轴的负向上，K在第二象限，L在第四象限，N在Y轴的正向上。

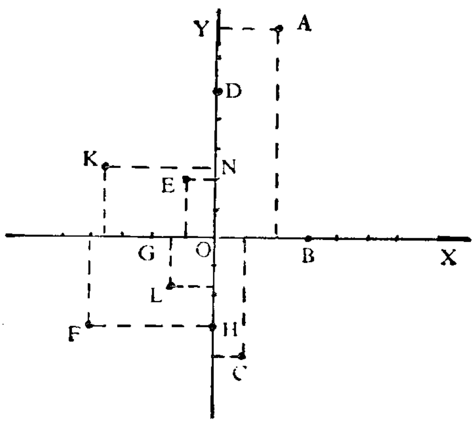


图 1—2

1·4． 三角形的三个顶点的坐标如下：

(a) $(8,4)$, $(0,-4)$, $(2,4)$;

(b) $(3,5)$, $(3,10)$, $(0,2.5)$;

(c) $(2,0)$, $(-1,\sqrt{3})$, $(-1,-\sqrt{3})$.

求作这些三角形。

解：这些三角形顺次我们用$\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$, $\triangle A''B''C''$表示，作图1－3如下：

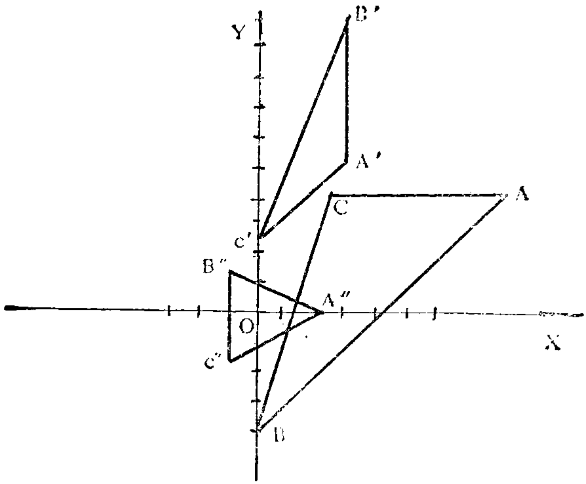


图 1—3

1·5． 设 $a=1, b=2$，求作点 (a,b)，(b,a)，$(-a, b)$，$(b,-a)$，$(-b,a)$，$(a,-b)$，$(-a,-b)$和 $(-b,-a)$。

解：$\because$ $a=1$，$b=2$，则$-a=-1$，$-b=-2$。点(a,b)和$(-a,b)$关于Y轴为对称，点(a,b)和$(a,-b)$关于X轴为对称，点(a,b)和$(-a,-b)$关于原点为对称。

同样，点(b,a)和点$(b,-a)$，$(-b,a)$，$(-b,-a)$分别关

于X 轴，Y轴，原点为对称。

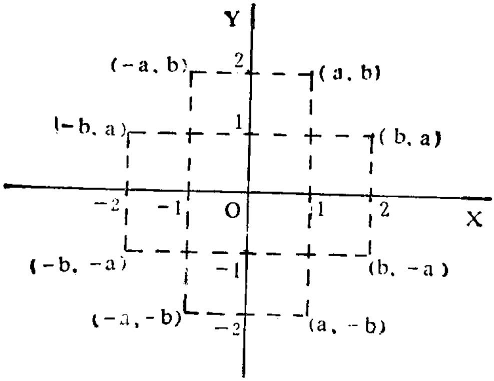
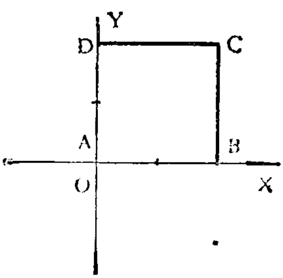


图 1—4

1·6. 一正方形的边长为 2 单位，如果将两条坐标轴放到这正方形的任意一组邻边上去，问正方形各顶点的坐标等于什么?

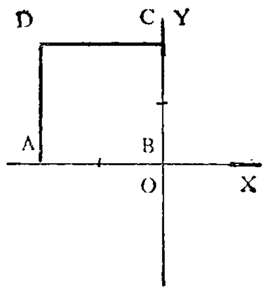
解：因为正方形的一组邻边和两条坐标轴重合，可见正方形的一个顶点在原点上，两个顶点分别在X 轴上Y 轴上，根据另一顶点落在哪一个象限中，它可以分做四种不同的情况：

(1)



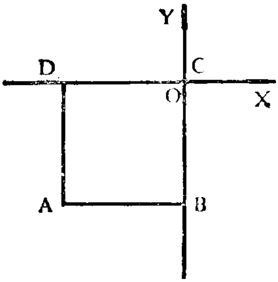
A(0,0)，B(2,0)，
C(2,2)，D(0,2)。

(2)



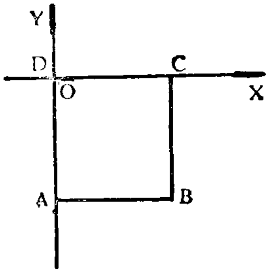
A(−2,0)，B(0,0)，
C(0,2)，D(−2,2)。

(3)



A(−2, −2), B(0, −2),
C(0, 0), D(−2, 0).

(4)



A(0, −2), B(2, −2),
C(2, 0), D(0, 0).

图 1—5

1·7. 菱形的每边长为 5 个单位，它有一条对角线长为 6 个单位，如果把菱形的两条对角线分别放在两坐标轴上，求它各个顶点的坐标.

解：根据所给对角线 AC 与 X 轴重合或与 Y 轴重合，它有两种情况，且当 $AC=6$，$AB=5$，另一条对角线 $BD=8$.

（1）AC 与 OY 轴重合时，四个顶点的坐标分别为

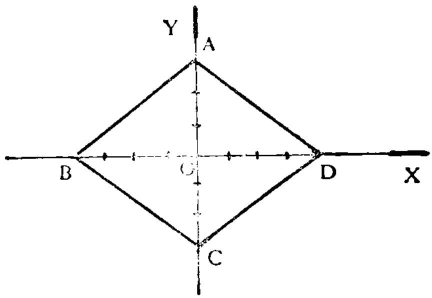


图 1—6（1）

$A(0,3)$，$B(-4,0)$，$C(0,-3)$，$D(4,0)$.

（2） AC与X轴重合时，四个顶点的坐标分别为

$A(3,0)$，$B(0,4)$，

$C(-3,0)$，$D(0,-4)$.

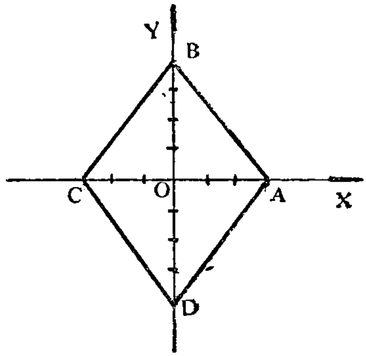


图 1—6（2）

1·8.已知点$M(3,2)$，作它关于横轴、纵轴、原点的对称点．求这些点的坐标．

解：凡是关于X轴为对称的两点，它们的横坐标相同，而纵坐标的绝对值相等，符号相反．所以与$M(3,2)$关于X轴为对称的点是（3，－2）．

凡是关于Y轴为对称的两点，它们的纵坐标相同，而横坐标的绝对值相等，符号相反，所以与$M(3,2)$关于Y轴为对称的点是（－3，2）．

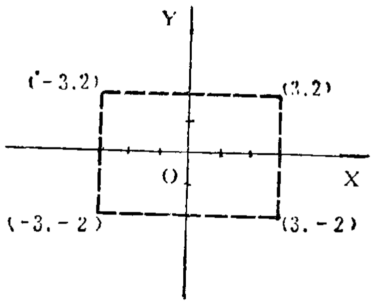


图 1—7

凡是关于原点为对称的两点，它们的横坐标相等，符号相反，纵坐标也是这样．所以与点$M(3,2)$关于原点为对称的点是（－3，－2）．

1·9． 证明点$A_1(a,b)$关于第Ⅰ和第Ⅲ象限角的平分线的对称点A_2必有坐标(b,a)．

证明：如图1—8．连结A_1A_2，命A_1A_2与第Ⅰ和第Ⅲ象限角的平分线的交点为C，并过点A_1作$A_1M\perp OX$，$A_2N\perp OY$．

因为点A_1，A_2关于OC为对称，也就是OC垂直平分A_1A_2，

即$A_1C=CA_2$，$\angle A_1CO=\angle A_2CO=$直角，又$OC$公共，所以$\triangle A_1CO\cong\triangle A_2CO$。

于是$OA_1=OA_2$，$\angle COA_1=\angle COA_2$。

但$\angle COX=\angle COY=45°$，$\therefore \angle COX-\angle COA_1=\angle COY-\angle COA_2$ 即$\angle A_1OM=\angle A_2ON$。

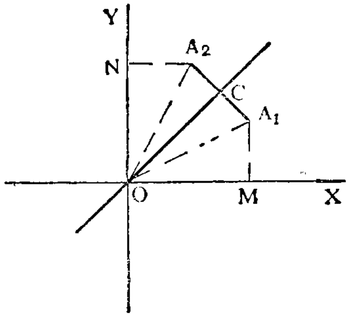


图 1—8

由此得到直角三角形A_1OM，A_2ON 全等，$A_1M=A_2N$，$OM=ON$。

已知点A_1的坐标为(a,b)即$A_1M=b$，$OM=a$。

$\therefore$ $A_2N=b, ON=a$。这也就是说，点A_2的坐标为(b,a)。

1·10. 点B与点$A(2,4)$对称于第Ⅰ和第Ⅲ象限角的平分线，求点B的坐标。

解：根据上题的证明，立刻可以得到与点$A(2,4)$关于第Ⅰ和第Ⅲ象限角的平分线为对称的点B的坐标是（4，2）。

1·11. 一点在某一坐标系下的坐标为$x=2$，$y=-1$，如果轴的方向保持不变而将原点移至点：

(a) $(4,5)$；(b) $(4,-5)$；

(c) $(-4,5)$；(d) $(-4,-5)$。

该点在新系下的坐标等于什么？

解：在轴的平移下用旧系坐标表示新系坐标的公式是

$$\begin{cases} x'=x-a, \\ y'=y-b. \end{cases}$$

已知旧系坐标是（2，1），根据所给的a,b值，分别得

到：

(a) $x'=2-4=-2$,

$y'=-1-5=-6$;　　∴ 新坐标为 $(-2,\ -6)$

(b) $x'=2-4=-2$,

$y'=-1-(-5)=4$;　　∴ 新坐标为 $(-2,\ 4)$

(c) $x'=2-(-4)=6$,

$y'=-1-5=-6$;　　∴ 新坐标为 $(6,\ -6)$

(d) $x'=2-(-4)=6$,

$y'=-1-(-5)=4$.　　∴ 新坐标为 $(6,\ 4)$

1·12. 某点在两轴方向相同的两坐标系下的坐标为 $(12,-7)$ 和 $(0,\ 15)$，各系的原点在他系下的坐标等于什么？

解：命该点关于旧系 O 的坐标为 $(12,\ -7)$，关于新系 O' 的坐标为 $(0,\ 15)$．设点 O' 关于旧系的坐标为 (a,b)，根据在轴的平移下，用旧系的坐标表示新系的坐标公式得到

$$0=12-a,\quad 15=-7-b.$$

求得 $a=12$，$b=-22$. 也就是点 O' 关于系 O 的坐标是 $(12,\ -22)$.

所以点 O 关于系 O' 的坐标是 $(-12,\ 22)$.

1·13. 如果将坐标轴依逆时针方向旋转 $60°$，点 $M(1,\sqrt{3})$ 在新系下的坐标等于什么？

解：根据在轴的旋转下用旧系坐标表示新系的坐标公式

$$\begin{cases} x'=x\cos\alpha+y\sin\alpha, \\ y'=-x\sin\alpha+y\cos\alpha. \end{cases}$$

坐标轴依逆时针方向旋转 $60°$，点 $M(1,\sqrt{3})$ 关于新系的坐标为

$$x'=1\cdot\cos60°+\sqrt{3}\sin60°=\frac{1}{2}+\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2,$$

$$y' = -1\cdot\sin60° + \sqrt{3}\cos60° = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0.$$

即新系下的坐标是（2， 0）。

1·14．如果将坐标轴依逆时针方向旋转45°，点$M(1,\sqrt{3})$在新系下的坐标等于什么？

解：已知点M关于旧系坐标：$x=1$，$y=\sqrt{3}$，且$\alpha=45°$，所以点M关于新系的坐标为

$$x' = 1\cdot\cos45° + \sqrt{3}\sin45° = 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2},$$

$$y' = -1\cdot\sin45° + \sqrt{3}\cos45° = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}.$$

即新系下的坐标为$\left[\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{6}),\ \frac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})\right]$.

1·15．坐标轴应该旋转多少角度，方能使点$M(2,0)$在新系下的横标和纵标变成相等？（我们把角度限制在$-\frac{\pi}{2}$到$\frac{\pi}{2}$之间.）

解：在坐标轴旋转后，点$M(2,0)$在新系下的坐标是

$$x' = 2\cos\alpha + 0\cdot\sin\alpha = 2\cos\alpha,$$

$$y' = -2\sin\alpha + 0\cdot\cos\alpha = -2\sin\alpha.$$

按照条件，在新系下横标和纵标相等，就有

$$2\cos\alpha = -2\sin\alpha,$$

即 $\operatorname{tg}\alpha = -1.$

因为我们把角度限制在$-\frac{\pi}{2}$到$\frac{\pi}{2}$之间，所以

$$\alpha = -\frac{\pi}{4}.$$

两点间的距离，线段的定比分点

1·16. 求下列各题中两点间的距离：

(a) (5,2)和（1，－1）； (b) (－6,3)和（0，－5）；

(c) (0,0)和（－3，4）； (d) (9，－7)和（4，5）．

解：根据两点间的距离公式

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

我们得到

$$\text{(a)}\quad d=\sqrt{(1-5)^2+(-1-2)^2}=5,$$

$$\text{(b)}\quad d=\sqrt{(0+6)^2+(-5-3)^2}=10,$$

$$\text{(c)}\quad d=\sqrt{(-3-0)^2+(4-0)^2}=5,$$

$$\text{(d)}\quad d=\sqrt{(4-9)^2+(5+7)^2}=13.$$

1·17. 已知三角形的顶点$A(3,2)$，$B(-1,-1)$和C (11，－6)．求三角形的周长．

解：$|AB|=\sqrt{(-1-3)^2+(-1-2)^2}=5,$

$|BC|=\sqrt{(11+1)^2+(-6+1)^2}=13,$

$|CA|=\sqrt{(11-3)^2+(-6-2)^2}=8\sqrt{2}.$

所以三角形的周长

$$P=5+13+8\sqrt{2}=2(9+4\sqrt{2}).$$

1·18. 试证顶点为$A(0,0)$，$B(3,1)$ 及$C(1,7)$的三角形是直角三角形．

证明：$\because$ $|AB|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10},$

$$|BC|=\sqrt{(1-3)^2+(7-1)^2}=\sqrt{40},$$

$$|CA|=\sqrt{1^2+7^2}=\sqrt{50},$$

这时 $(\sqrt{10})^2+(\sqrt{40})^2=(\sqrt{50})^2$，也就是 $|AB|^2+|BC|^2=|CA|^2$。

所以$\triangle ABC$ 是直角三角形.

1·19. 一点从点$A(-3,-2)$作直线运动移至点$B(4,5)$，求该点所经过的距离.

解：$|AB|=\sqrt{(-3-4)^2+(-2-5)^2}=7\sqrt{2}$，也就是该点所经过的距离是$7\sqrt{2}$.

1·20. 证明点（7，2）和点（1，-6）在以点（4，-2）为圆心的圆周上，并求这个圆的半径.

证明：因为点$A(7,2)$，$B(1,-6)$到点$O(4,-2)$的距离是：

$$|AO|=\sqrt{(7-4)^2+(2+2)^2}=5,$$

$$|BO|=\sqrt{(1-4)^2+(-6+2)^2}=5,$$

$\therefore\quad |AO|=|BO|$.

所以它们在以点O为圆心的圆周上，而且半径$R=5$.

1·21. 在X轴上求与点$A(5,12)$的距离为13个单位的点的坐标.

解：在X轴上的点的纵标等于零，所以我们假设所求点的坐标为$(x,0)$，根据两点间的距离公式有

$$\sqrt{(x-5)^2+12^2}=13.$$

两边平方，得

$$x^2-10x+25+144=169,$$

即 $$x^2-10x=0,$$

$$x(x-10)=0.$$

$\therefore \quad x=0, \ x=10.$

所以，所求点的坐标是（0，0）或（10，0）.

1·22. 在第Ⅰ象限角的平分线上求一点. 使它与点A(0,2)的距离为$\sqrt{2}$个单位.

解：因为在第Ⅰ象限角的平分线上的点的横标和纵标相等，所以我们可以假设所求点的坐标是(x,x)，根据条件，得到

$$\sqrt{x^2+(x-2)^2}=\sqrt{2}.$$

整理后得$(x-1)^2=0.$

$\therefore \quad x=1.$

所以所求点的坐标是（1，1）.

1·23. 已知点M的横坐标等于7个单位，而到点$N(-1,5)$的距离等于10个单位，求点M的纵坐标.

解：设点M的纵坐标为y，也就是它的坐标是$(7,y)$，根据条件得到

$$\sqrt{(7+1)^2+(y-5)^2}=10$$

整理后，得

$$y^2-10y-11=0$$

$\therefore \quad y=11, \ -1.$

所以点M的坐标是（7，11）或（7，－1）.

1·24. 已知点M到两坐标轴和点（3，6）都有相等的距离，求点M的坐标.

解：因为点M到两坐标轴和点（3，6）距离都相等，所以点M一定在第Ⅰ象限内. 并且我们可设它的坐标是(x,x)，根据条件得到

$$\sqrt{(x-3)^2+(x-6)^2}=x,$$

整理后得