

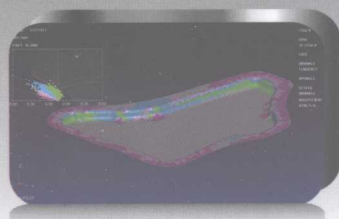
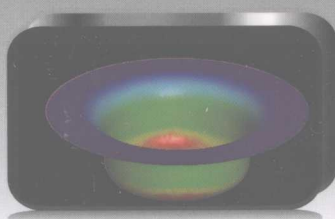
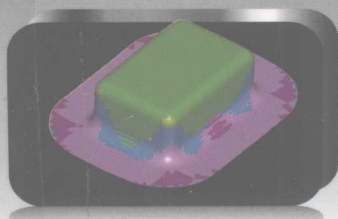


随书附光盘

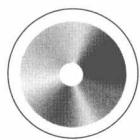
BANLIAO CHONGYA CHENGXING **CAE** SHIYONG JIAOCHENG

板料冲压成形 **CAE** 实用教程

◆
龚红英
主编



化学工业出版社



随书附光盘

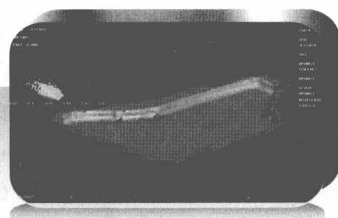
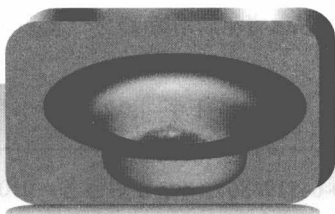
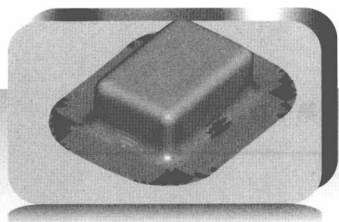
BANLIAO CHONGYA CHENGXING **CAE** SHIYONG JIAOCHENG

板料冲压成形

CAE

实用教程

◇ 龚红英 主编



化学工业出版社

· 北京 ·

图书在版编目(CIP)数据

板料冲压成形 CAE 实用教程 / 龚红英主编. —北京:
化学工业出版社, 2009.11

ISBN 978-7-122-06593-3

I. 板… II. 龚… III. 板材冲压-成型-计算机辅助分析-教材 IV. TG386.41-39

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 153800 号

责任编辑: 刘丽宏

文字编辑: 陈 喆

责任校对: 李 林

装帧设计: 韩 飞

出版发行: 化学工业出版社 (北京市东城区青年湖南街 13 号 邮政编码 100011)

印 装: 三河市延风印装厂

787mm×1092mm 1/16 印张 10¼ 字数 256 千字 2010 年 1 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询: 010-64518888 (传真: 010-64519686) 售后服务: 010-64518899

网 址: <http://www.cip.com.cn>

凡购买本书, 如有缺损质量问题, 本社销售中心负责调换。

定 价: 38.00 元

版权所有 违者必究

编写人员名单

主编：龚红英

参编：李名尧

孙健

苏钰

宋晨

张猛

杨华

前 言

板料冲压成形是一个具有大挠度、大变形的复杂塑性成形过程,涉及到金属在各种复杂应力状态下的塑性流动、塑性强化等问题,在实际成形过程中还会产生破裂、起皱和回弹等成形缺陷。因此,单凭经验很难准确预测板料冲压成形性能,致使模具设计正确性也很难加以评估。实际生产中必须反复调试模具,获得有效的工艺参数,最终使具体零件得以成形,但这种方法增加了企业和用户的实际生产成本,生产周期也被迫延长。随着计算机技术的飞速发展,我国相关汽车工业企业及研究部门已经普遍开始应用计算机技术对冲压成形工序进行 CAE 分析,作为专业技术人员分析具体零件成形工艺和进行工艺优化的最为简便和有效的方式。然而相对于 CAD、CAM 技术而言,CAE 技术对技术人员的专业要求更高,使得专业人员在采用 CAE 分析软件进行具体板料冲压成形模拟分析中往往会遇到许多实际的软件操作和应用以及工艺分析等困难。技术人员只能通过不断深入学习和进行相关理论、技能的训练才能成为合格的从事 CAE 技术工作的专业人才。

本书以国内外常用板料冲压软件 ETA/DYNAFORM5.6 作为平台,兼顾理论基础和设计实践两个方面需求,首先介绍了板料冲压成形 CAE 分析涉及的基本理论、关键技术以及 ETA/DYNAFORM5.6 软件的应用基础理论知识,并根据典型的板料冲压零件工艺及特点,选择了六个典型的板料冲压成形应用实例,由浅到深地对应用 ETA/DYNAFORM5.6 软件进行板料冲压成形 CAE 分析过程中的前置处理、求解计算及后置处理等进行了详尽的阐述,以引导读者在掌握基本理论知识的基础上,能够较快地应用 ETA/DYNAFORM5.6 软件解决实际工程问题。

本书由上海工程技术大学龚红英主编。参与编写的人员还有李名尧、苏钰、张猛、孙健、宋晨、杨华。本书在编写过程中,得到了于治水、曹阳根、徐纪平、张水忠、赵中华、李培耀等教授的大力支持和帮助,在此一并表示衷心感谢。

由于编者水平有限,书中不足之处难免,敬请广大读者批评指正。

编 者

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 板料冲压成形 CAE 分析技术概述	1
1.2 板料冲压成形 CAE 分析有限元理论	1
1.2.1 有限变形的应变张量	3
1.2.2 有限变形的应力张量	5
1.2.3 几何非线性有限元方程的建立	6
1.3 板料冲压成形 CAE 分析的关键技术	9
1.3.1 有限元求解算法及常用板料冲压成形 CAE 分析软件	9
1.3.2 各向异性屈服准则的运用	10
1.3.3 单元类型的选择	11
1.3.4 有限元网格划分	11
1.3.5 边界条件的处理	12
1.3.6 提高 CAE 分析效率的方法	14
1.4 板料冲压成形缺陷分析	14
1.4.1 起皱	14
1.4.2 破裂	15
1.4.3 回弹	15
第 2 章 ETA/DYNAFROM5.6 软件应用基础	17
2.1 ETA/DYNAFROM5.6 软件简介	17
2.2 应用 ETA/DYNAFROM5.6 软件的一般步骤	17
2.3 ETA/DYNAFROM5.6 软件系统结构	19
2.3.1 ETA/DYNAFROM5.6 软件主界面	19
2.3.2 前置处理模块	20
2.3.3 分析模块	21
2.3.4 后置处理模块	22
2.4 DYNAFORM5.6 软件的基本功能	27
2.4.1 文件管理 (File)	27
2.4.2 零件层控制 (Parts)	28
2.4.3 前处理 (Preprocess)	29
2.4.4 模面工程 (DFE)	35
2.4.5 坯料工程 (BSE)	35

2.4.6 模拟设置 (Setup)	36
2.4.7 回弹补偿 (SCP)	37
2.4.8 工具定义	37

第3章 圆筒件的正向拉深成形模拟 39

3.1 带凸缘圆筒件的拉深工艺分析	39
3.2 导入模型	40
3.3 前处理设置	40
3.3.1 编辑零件名	40
3.3.2 零件单元网格划分	41
3.3.3 零件网格检查	42
3.4 快速设置	45
3.4.1 创建压边圈零件“BINDER”	45
3.4.2 双动设置[正向拉深/Double action (Toggle draw)]	45
3.4.3 定义坯料零件“BLANK”	46
3.4.4 定义压边圈零件“BINDER”	46
3.4.5 定义凹模零件“DIE”	47
3.4.6 定义材料“Material”	47
3.4.7 材料及工具运动相关参数的修改设置	48
3.4.8 工模具运动规律的动画模拟演示	49
3.4.9 提交 LS-DYNA 进行求解计算	49
3.5 自动设置	50
3.5.1 初始设置	50
3.5.2 定义板料零件“BLANK”	50
3.5.3 定义凹模零件“DIE”	52
3.5.4 定义凸模零件“PUNCH”	52
3.5.5 定义压边圈零件“BINDER”	54
3.5.6 工模具初始定位设置	54
3.5.7 工模具拉深行程参数设置	54
3.5.8 工模具运动规律的动画模拟演示	57
3.5.9 提交 LS-DYNA 进行求解计算	57
3.6 传统设置	58
3.6.1 创建凸模零件“PUNCH”	58
3.6.2 创建压边圈零件“BINDER”	59
3.6.3 定义工模具零件	60
3.6.4 定义毛坯零件	61
3.6.5 工模具的自动定位	62
3.6.6 测量凸模零件“PUNCH”的拉深深度	62
3.6.7 定义凸模零件“PUNCH”的拉深行程	62
3.6.8 定义零件“BINDER”的压边力载荷曲线	64

3.6.9	工模具运动的动画模拟演示	64
3.6.10	提交 LS-DYNA 进行求解计算	64
3.7	后置处理	66
3.7.1	观察成形零件的变形过程	66
3.7.2	观察成形零件的厚度分布云图及成形极限图	67
第 4 章	矩形件的反向拉深成形模拟	69
4.1	矩形件的拉深成形工艺分析	69
4.2	导入模型	70
4.3	设置分析参数	70
4.4	前处理设置	71
4.4.1	编辑零件	71
4.4.2	零件单元网格划分	72
4.4.3	零件单元网格模型检查	73
4.5	快速设置	74
4.5.1	创建压边圈零件“BINDER”	75
4.5.2	单动设置[反向拉深/Single action(Inverted draw)]	75
4.5.3	定义坯料零件“BLANK”	75
4.5.4	定义压边圈零件“BINDER”	76
4.5.5	定义凹模零件“DIE”	76
4.5.6	定义材料“Material”	77
4.5.7	材料及工具运动相关参数的修改设置	77
4.5.8	工模具运动规律的动画模拟演示	79
4.5.9	提交 LS-DYNA 进行求解计算	79
4.6	自动设置	79
4.6.1	初始设置	79
4.6.2	定义毛坯零件“BLANK”	80
4.6.3	定义凹模零件“DIE”	83
4.6.4	定义凸模零件“PUNCH”	83
4.6.5	定义压边圈零件“BINDER”	84
4.6.6	工模具初始定位设置	84
4.6.7	工模具拉深行程设置	86
4.6.8	工模具运动的动画模拟演示	87
4.6.9	提交 LS-DYNA 进行求解计算	87
4.7	传统设置	89
4.7.1	创建凸模零件“PUNCH”	89
4.7.2	创建压边圈零件“BINDER”	90
4.7.3	定义工模具零件	90
4.7.4	定义毛坯零件	91
4.7.5	工模具零件自动定位	92

4.7.6	测量凸模零件“PUNCH”的拉深深度	92
4.7.7	定义凹模零件“DIE”的拉深行程曲线	93
4.7.8	定义压边圈零件“BINDER”的压边力载荷曲线	93
4.7.9	工模具运动规律的动画模拟演示	95
4.7.10	提交 LS-DYNA 进行求解计算	95
4.8	后置处理	95
4.8.1	观察成形零件的变形过程	95
4.8.2	观察成形零件的厚度分布云图及成形极限图	97
第 5 章	汽车油底壳零件的拉深成形模拟	98
5.1	导入模型	98
5.2	快速设置	99
5.2.1	创建零件“PART”单元模型	99
5.2.2	创建零件“PART”	99
5.2.3	网格检查	101
5.2.4	创建并定义零件“DIE”	103
5.2.5	创建并定义毛坯零件“BLANK”	104
5.2.6	创建压边圈零件“BINDER”	106
5.2.7	调整零件的冲压方向	108
5.2.8	定义工模具及相关工艺参数设置	109
5.2.9	提交 LS-DYNA 进行求解计算	110
5.3	后置处理	111
第 6 章	U 形零件的回弹模拟	113
6.1	回弹分析	113
6.2	导入模型	113
6.3	单元网格划分	114
6.3.1	工模具零件单元网格划分	114
6.3.2	毛坯零件网格划分	114
6.3.3	网格检查	116
6.4	自动设置	117
6.4.1	建立新的拉深模拟	117
6.4.2	定义板坯材料和属性	117
6.4.3	定义工具	118
6.4.4	工模具自动定位设置	119
6.4.5	工序设置	120
6.4.6	提交 LS-DYNA 进行求解计算	121
6.5	回弹分析设置	121
6.5.1	导入模型进行回弹分析	121
6.5.2	回弹分析设置	121

6.6 后置处理	122
6.6.1 在后置处理器中读取 d3plot 文件	122
6.6.2 回弹分析	122
第 7 章 球形件的液压胀形模拟	124
7.1 板料液压胀形工艺分析	124
7.2 导入模型	125
7.3 设定分析环境参数	125
7.4 零件单元网格划分	126
7.4.1 毛坯零件单元网格划分	126
7.4.2 工模具零件单元网格划分	127
7.4.3 单元网格检查	128
7.5 自动设置	129
7.5.1 初始设置	129
7.5.2 选择毛坯材料和定义属性	130
7.5.3 定义工模具零件	131
7.5.4 定义压延筋零件	131
7.5.5 工具定位	135
7.5.6 工序设置	136
7.5.7 提交任务到 LS-DYNA 进行求解计算	140
7.6 后置处理	140
第 8 章 十字形管件液压胀形模拟	142
8.1 管件液压胀形工艺分析	142
8.2 导入模型	143
8.3 编辑零件	144
8.4 零件的单元网格划分及网格检查	144
8.5 自动设置	147
8.5.1 定义零件“TUBE”	148
8.5.2 定义工模具零件	150
8.5.3 设置工模具零件初始位置	153
8.5.4 定义工模具零件的运动行程	153
8.5.5 工模具运动规律的动画模拟演示	156
8.5.6 提交 LS-DYNA 进行求解计算	156
8.6 后置处理	157
参考文献	158

第 1 章 绪 论

1.1 板料冲压成形 CAE 分析技术概述

冲压是利用安装在压力机上的冲模对材料施加压力,使其产生分离或塑性变形,从而获得所需零件(俗称冲压件或冲件)的一种压力加工方法。因为它主要是用板料加工成零件,所以又称为板料冲压成形。采用板料冲压成形不但可以加工金属材料,还可以加工非金属材料。与切削加工等方法相比,板料冲压成形不仅具有更高的生产效率,而且可以获得更高的材料利用率,已经广泛应用于汽车、航空航天、造船、电子电器、国防、日用五金等工业领域。尤其是在汽车工业领域中,由于汽车车身零部件的精度要求高、生产批量大,目前绝大部分车身零部件均采用金属板料冲压成形技术进行实际生产。

由于板料冲压成形过程是一个大挠度、大变形的塑性变形过程,涉及板料在不同塑性成形工序中复杂的应力应变状态下产生塑性流动,塑性变形,与此同时引起起皱、破裂及回弹等成形缺陷问题,同时由于板料冲压成形过程是一个非常复杂的多体接触的动态力学分析问题,因此,在实际板料冲压成形过程中,单凭经验往往很难对板料的冲压成形性能做出合理的预测,进而加大了冲模制造、调模试模的难度和成本,如果出现工艺判断错误,还可能导致模具报废。为了准确把握板料冲压成形性能,对实际冲压零件的成形过程有充分的认识,在当前板料冲压成形生产中,利用先进的计算机辅助工程(Computer Aided Engineering,简称 CAE)分析技术对具体冲压零件的成形过程进行数值模拟,可以及早发现问题,改进模具设计,从而大大缩短调模试模周期,降低制模成本等。正因为如此,板料冲压成形 CAE 分析技术在近几十年中一直是板料成形领域的研究热点之一。

板料冲压成形 CAE 分析技术现已进入实际应用阶段,许多较为成熟的商业化软件得到了广泛的应用,如: AUTOFORM、LS-DYNA3D、FORMSYS、PAM-STAMP、ROBUST 以及 ETA/DYNAFORM 等。典型的板料冲压成形 CAE 分析系统如图 1-1 所示。例如:目前在汽车工业领域,许多国内外大型汽车制造企业从汽车冲压零件的结构设计、冲模设计、调试直至投产的整个过程中贯穿了 CAE 分析技术,极大地缩短了冲压零部件的开发周期,产生了巨大的经济效益。采用 CAE 分析技术已成为当前进行板料冲压成形应用研究最有效的方法之一。

1.2 板料冲压成形 CAE 分析有限元理论

板料冲压成形研究中所运用的 CAE 分析技术,其核心是应用数值分析方法研究板料塑

性成形理论问题。

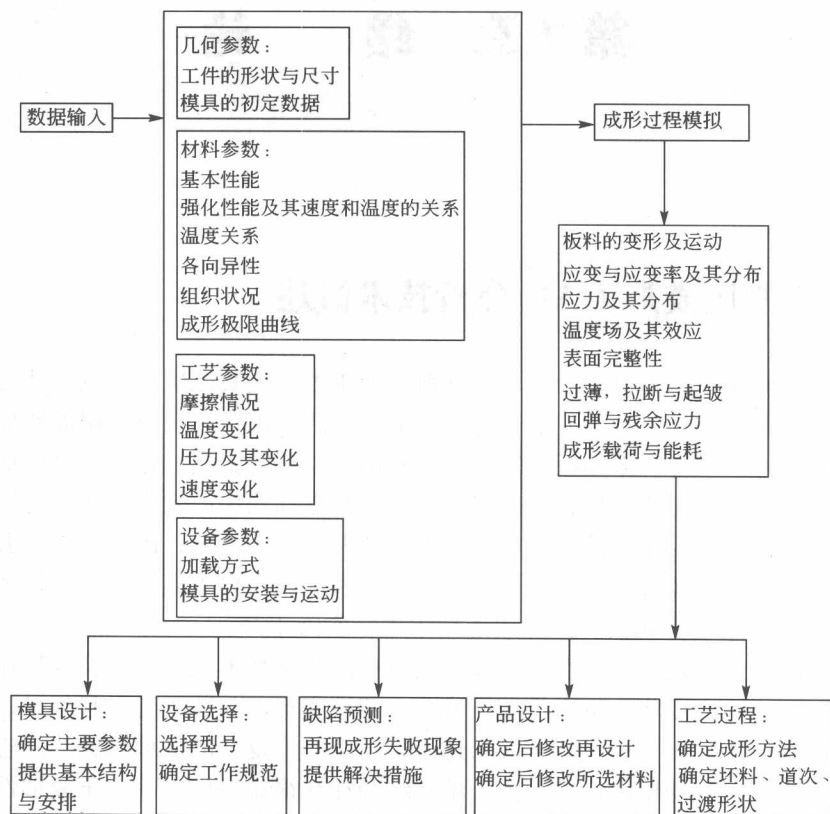


图 1-1 板料冲压成形 CAE 分析系统

基于有限元理论进行的板料冲压成形 CAE 分析过程是一个材料条件、几何条件和边界条件三重非线性相互耦合的复杂成形过程，它与材料体积成形 CAE 分析过程相比较，具有以下特点：① 板料冲压成形是一个大挠度、大变形的问題，必须要采用有限变形理论才能正确地描述其变形特点。② 弹性变形和回弹不容忽略，必须加以考虑，一般不采用刚塑性材料模型，而采用弹塑性材料模型。③ 由于材料本构关系和屈服条件具有相关性，必须选择能够描述板料各向异性特点的屈服准则。④ 当板料冲压成形的挠度达到板厚的量级时，还必须要考虑到弯曲效应，选取合适的单元类型。在板料冲压成形 CAE 分析过程中涉及到的核心内容及其所采用的一些关键技术见表 1-1。

表 1-1 板料拉深成形数值模拟核心内容和关键技术

核 心 内 容	关 键 技 术
模具和工件的几何建模	点阵法、解析法、有限元网格法、参数法
有限元力学模型的建立	有限变形理论、应力状态、应变状态
有限元分析模型的建立	有限单元类型选择、有限元网格划分
板壳理论	板壳理论基本假设、各种板壳单元计算效率和计算精度
弹塑性本构关系	屈服准则的建立、流动准则的建立
模具和工件间接触界面处理	接触点处理、接触力计算、接触应力的计算
模具和工件间摩擦力的计算	摩擦机理、摩擦定律、摩擦力计算
有限元方程的求解方法	隐式法、显式法、隐式显式综合法

板料塑性成形有限元理论分为固体塑性有限元法（包括小变形和大变形弹塑性有限元法）和流体塑性有限元法（包括刚塑性有限元法和刚黏塑性有限元法）。研究板料冲压成形主要采用固体塑性有限元法中的大变形弹塑性有限元法。大变形弹塑性有限元法同时考虑弹性和塑性变形，弹性区采用 Hook 定律，塑性区采用 Prandtl-Reuss 方程和 Mises 屈服准则。大变形弹塑性有限元法以有限变形理论为基础，考虑到了大变形过程由于大位移和大转动对单元形状和有限元计算的影响。采用弹塑性有限元法分析板料冲压变形过程，不仅能够按照变形路径得到塑性区的变化，变形体的应力、应变分布规律和大小以及几何形状的变化，而且还能有效处理卸载问题，计算残余应力和残余应变，从而可以进行成形缺陷的分析预测。下面对在板料冲压成形中所涉及的部分有限元法基本理论进行具体阐述。

1.2.1 有限变形的应变张量

考虑一个在固定笛卡儿坐标系内的物体，在某种外力的作用下连续地改变其位形。如图 1-2 所示。用 ${}^0x_i (i=1,2,3)$ 表示物体处于 0 时刻位形内任一点 P 的坐标，用 ${}^0x_i + d^0x_i$ 表示和 P 点相邻的 Q 点在 0 时刻位形内的坐标。由于外力作用，在以后的某个时刻 t 物体运动并变形到新的位形，用 tx_i 和 ${}^tx_i + d^tx_i$ 分别表示 P 和 Q 点在 t 时刻位形内的坐标，可以将物体位形变化看作是从 0x_i 到 tx_i 时的一种数学上的变换。对于某一固定的时刻 t ，这种变换可以表示为：

$${}^tx_i = {}^tx_i({}^0x_1, {}^0x_2, {}^0x_3) \quad (1-1)$$

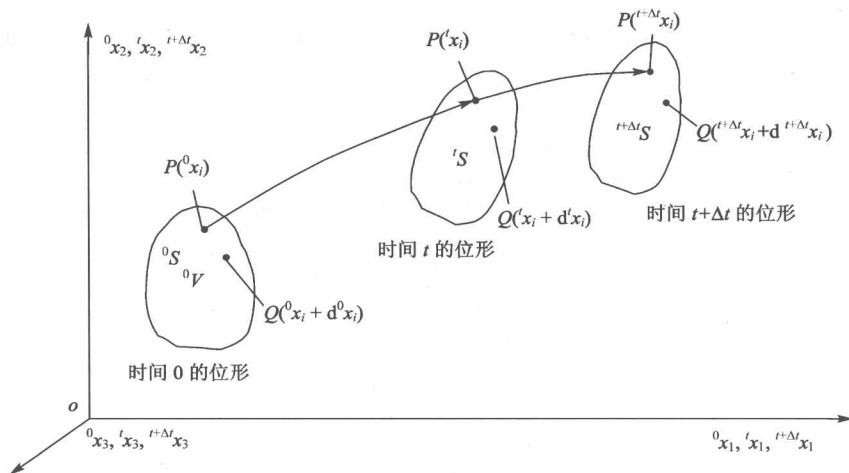


图 1-2 笛卡儿坐标系内物体的运动和变形

根据变形的连续性要求，这种变换必须是一一对应的，也即变换应是单值连续的，因此，上述变换应有唯一的逆变换，即存在下列单值连续的逆变换：

$${}^0x_i = {}^0x_i({}^tx_1, {}^tx_2, {}^tx_3) \quad (1-2)$$

利用上面变换，可以将 d^0x_i 和 d^tx_i 表示成：

$$d^0x_i = \left(\frac{\partial {}^0x_i}{\partial {}^tx_j} \right) d^tx_j, \quad d^tx_i = \left(\frac{\partial {}^tx_i}{\partial {}^0x_j} \right) d^0x_j \quad (1-3)$$

将 P 、 Q 两点之间在时刻 0 和时刻 t 的距离 d^0s 和 d^ts 表示为：

$$(d^0s)^2 = d^0x_i d^0x_i = \left(\frac{\partial^0 x_i}{\partial^t x_m} \right) \times \left(\frac{\partial^0 x_i}{\partial^t x_n} \right) d^t x_m d^t x_n \quad (1-4)$$

$$(d^t s)^2 = d^t x_i d^t x_i = \left(\frac{\partial^t x_i}{\partial^0 x_m} \right) \times \left(\frac{\partial^t x_i}{\partial^0 x_n} \right) d^0 x_m d^0 x_n \quad (1-5)$$

变形前后该线段长度的变化,即为变形的度量,可有两种表示方法,即:

$$(d^t s)^2 - (d^0 s)^2 = \left(\frac{\partial^t x_k}{\partial^0 x_i} \cdot \frac{\partial^t x_k}{\partial^0 x_j} - \delta_{ij} \right) d^0 x_i d^0 x_j = 2^t E_{ij} d^0 x_i d^0 x_j \quad (1-6)$$

$$(d^t s)^2 - (d^0 s)^2 = \left(\delta_{ij} - \frac{\partial^0 x_k}{\partial^t x_i} \cdot \frac{\partial^0 x_k}{\partial^t x_j} \right) d^t x_i d^t x_j = 2^t e_{ij} d^t x_i d^t x_j \quad (1-7)$$

这样就定义了两种应变张量,即:

$$^t E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^t x_k}{\partial^0 x_i} \times \frac{\partial^t x_k}{\partial^0 x_j} - \delta_{ij} \right) \quad (1-8)$$

$$^t e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \frac{\partial^0 x_k}{\partial^t x_i} \times \frac{\partial^0 x_k}{\partial^t x_j} \right) \quad (1-9)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

$^t E_{ij}$ 是 Lagrange 体系的 Green 应变张量,它是用变形前坐标表示的,是 Lagrange 坐标的函数。 $^t e_{ij}$ 是 Euler 体系的 Almansi 应变张量,是用变形后坐标表示的,它是 Euler 坐标的函数。

为了得到应变和位移的关系方程,引入位移场:

$$^t u_i = ^t x_i - ^0 x_i \quad (1-10)$$

$^t u_i$ 表示物体中一点从变形前(时刻 0)位形到变形后(时刻 t)位形的位移,它可以表示为 Lagrange 坐标的函数,也可表示为 Euler 坐标的函数,从上式可得:

$$\frac{\partial^t x_i}{\partial^0 x_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial^t u_i}{\partial^0 x_j} \quad (1-11)$$

$$\frac{\partial^0 x_i}{\partial^t x_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial^t u_i}{\partial^t x_j} \quad (1-12)$$

将它们分别代入式(1-8)和式(1-9),可得:

$$^t E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^t u_i}{\partial^0 x_j} + \frac{\partial^t u_j}{\partial^0 x_i} + \frac{\partial^t u_k}{\partial^0 x_i} \frac{\partial^t u_k}{\partial^0 x_j} \right) \quad (1-13)$$

$$^t e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^t u_i}{\partial^t x_j} + \frac{\partial^t u_j}{\partial^t x_i} - \frac{\partial^t u_k}{\partial^t x_j} \frac{\partial^t u_k}{\partial^t x_i} \right) \quad (1-14)$$

当位移很小时,上两式中位移导数的二次项相对于它的一次项可以忽略,这时 Green 应变张量 E_{ij} 和 Almansi 应变张量 e_{ij} 都简化为无限小应变张量 ε_{ij} ,它们之间的差别消失,即:

$$E_{ij} = e_{ij} = \varepsilon_{ij} \quad (1-15)$$

由于 Green 应变张量是参考于时间 0 的位形,而此位形的坐标 $^0 x_i (i=1,2,3)$ 是固结于材

料的坐标, 当物体发生刚体转动时, 微线段的长度 ds 不变, 同时 d^0x_i 也不变, 因此联系 ds 变化和 d^0x_i 的 Green 应变张量的各个分量也不变。在连续介质力学中称这种不随刚体转动的对称张量为客观张量。

1.2.2 有限变形的应力张量

为了能对大变形进行分析, 就必须将应力和应变联系, 当定义和有限应变相对应的应力时, 也必须参照相同的坐标。

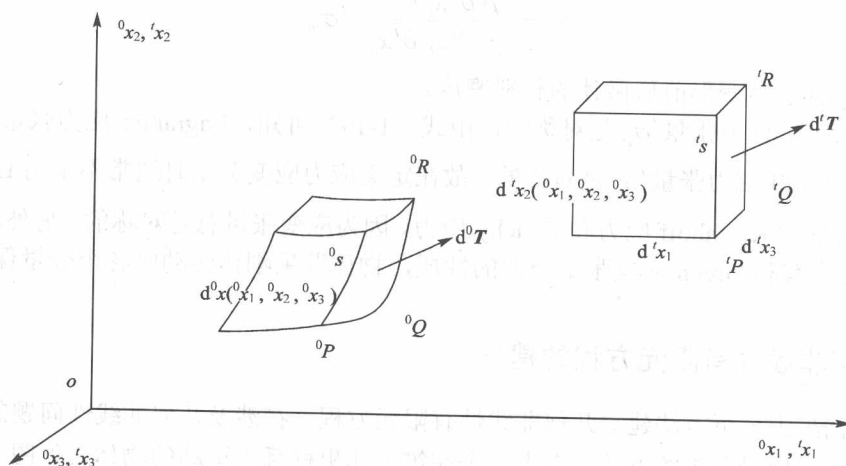


图 1-3 微元体变形前后的作用力

图 1-3 表示一个微元体变形前后作用在一个侧面上的力的情况, 左边微元体为变形前的状态, 考察其一个侧面 ${}^0P{}^0Q{}^0R{}^0T$, 该面单位方向矢量为 ${}^0\nu_i$ ($i=1,2,3$), 其面积为 d^0s , 右边为变形后微体, 侧面 ${}^0P{}^0Q{}^0R{}^0T$ 变为 ${}^{'P}{}^{'Q}{}^{'R}{}^{'T}$, 其单位方向矢量为 ${}^{'\nu}_i$, 其面积为 $d's$ 。如果研究应力时参照变形后的坐标系, 则作用在 ${}^{'P}{}^{'Q}{}^{'R}{}^{'T}$ 面上的力 $d'T$ (其分量是 $d'T_i$):

$$d'T_i = {}^{'\sigma}_{ij} {}^{'\nu}_j d's \quad (1-16)$$

这种用 Euler 体系定义的应力称为 Cauchy 应力 (${}^{'\sigma}_{ij}$), 此应力张量有明确的物理意义, 代表真实的应力。同样对 dT_i 也即变形后 ${}^{'P}{}^{'Q}{}^{'R}{}^{'T}$ 面上的力系采用 Lagrange 体系, 用变形前坐标定义应力, 有:

$$d'T_i = {}^{'T}_{ij} {}^0\nu_j {}^0ds \quad (1-17)$$

这样定义的应力称为 Lagrange 应力, 也称为第一皮阿拉-克希霍夫应力 (First Piola-kirchhoff Stress)。Lagrange 应力不是对称的, 不便于数学计算, 因此将 Lagrange 应力前乘以变形梯度 $\frac{\partial^0x_i}{\partial^{'x}_k}$ 得:

$$\frac{\partial^0x_i}{\partial^{'x}_k} d'T_k = {}^{'S}_{ij} {}^0\nu_j {}^0ds = \frac{\partial^0x_i}{\partial^{'x}_k} {}^{'T}_{jk} {}^0\nu_j {}^0ds \quad (1-18)$$

这样定义的应力称为 Kirchhoff 应力, 或称为第二皮阿拉-克希霍夫应力 (Second Piola-kirchhoff Stress)。

Kirchhoff 应力无实际物理意义,但是它与 Green 应变相乘构成真实的变形能。Cauchy 应力是真实的精确应力,因为它考虑了物体的变形,也即力 dT 的真实作用面积,显然比起工程应力(未考虑物体变形)要准确。同样 Cauchy 应力与 Almansi 应变相乘构成真实应变能,这种关系称为共轭关系。

根据 ${}^t\nu_j d^t s$ 和 ${}^0\nu_j d^0 s$ 之间的关系,可以导出 ${}^t\sigma_{ij}$ 、 ${}^tT_{ij}$ 和 ${}^tS_{ij}$ 之间的关系如下:

$${}^tT_{ij} = \frac{{}^0\rho}{{}^t\rho} \frac{\partial {}^0x_i}{\partial {}^t x_m} {}^t\sigma_{mj} \quad (1-19)$$

$${}^tS_{ij} = \frac{{}^0\rho}{{}^t\rho} \frac{\partial {}^0x_i}{\partial {}^t x_l} \frac{\partial {}^0x_j}{\partial {}^t x_m} {}^t\sigma_{lm} \quad (1-20)$$

其中, ${}^0\rho$ 和 ${}^t\rho$ 分别是变形前后微体的材料密度。

由于 Cauchy 应力张量 ${}^t\sigma_{ij}$ 是对称的,由式 (1-19) 可知, Lagrange 应力张量 ${}^tT_{ij}$ 是非对称的。而 Kirchhoff 应力张量 ${}^tS_{ij}$ 是对称的。故在定义应力应变关系时通常不采用 Lagrange 应力,而采用对称的 Kirchhoff 应力和 Cauchy 应力,因为应变张量总是对称的。另外, Kirchhoff 应力张量 ${}^tS_{ij}$ 具有和 Green 应变张量类似的性质,物体发生刚体转动时各个分量保持不变。

1.2.3 几何非线性有限元方程的建立

(1) 根据静力分析方法建立几何非线性有限元方程 在涉及几何非线性问题的有限元法中,通常都采用增量分析的方法,考虑一个在笛卡儿坐标系内运动的物体(如图 1-3 所示),增量分析的目的在于确定此物体在一系列离散的时间点 $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots$ 处于平衡状态的位移、速度、应变、应力等运动学和静力学参量。假定问题在时间 $0 \sim t$ 的所有时间点的解答已经求得,下一步需要求解时间为 $t+\Delta t$ 时刻的各个未知量。

在 $t+\Delta t$ 时刻的虚功原理可以用 Cauchy 应力和 Almansi 应变表示:

$$\int_{t+\Delta t V} {}^{t+\Delta t}\sigma_{ij} \delta {}^{t+\Delta t}e_{ij} dv = \int_{t+\Delta t V} {}^{t+\Delta t}F_k \delta u_k dv + \int_{t+\Delta t S_T} {}^{t+\Delta t}T_k \delta u_k ds \quad (1-21)$$

上式是参照 $t+\Delta t$ 时刻位形建立的,由于 $t+\Delta t$ 时刻位形是未知的,如果直接求解,在向平衡位形逼近的每一步迭代中,都要更新参照体系,导致了计算量的增加。为方便起见,所有变量应参考一个已经求得的平衡构形。理论上,时间 $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, t$ 等任一时刻已经求得的位形都可作为参考位形,但在实际分析中,一般只作以下两种可能的选择:

① 全 Lagrange 格式 (Total Lagrange Formulation, 简称 T. L. 格式),这种格式中所有变量以时刻 0 的位形作为参考位形。

② 更新的 Lagrange 格式 (Updated Lagrange Formulation, 简称 U. L. 格式),这种格式中所有变量以上一时刻 t 的位形作为参考位形。

从理论上讲,两种列式都可用于进行板料成形的几何非线性分析,相比而言, U. L. 法比 T. L. 法更易引入非线性本构关系,同时由于在计算各载荷增量步时使用了真实的柯西应力,适合追踪变形过程的应力变化,所以在板料成形分析中一般都使用 U. L. 法。

以上一时刻 t 的位形作为参考位形,可以得到 $t+\Delta t$ 时刻的虚功原理的 U. L. 格式:

$$\int_V {}^{t+\Delta t}S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t}E_{ij} dV = \delta {}^{t+\Delta t}W \quad (1-22)$$

由于 t 时刻的应力应变已知, 可建立增量方程:

$${}^{t+\Delta t}S_{ij} = {}^tS_{ij} + \Delta {}^{t+\Delta t}S_{ij} \quad (1-23)$$

$$\Delta {}^tE_{ij} = \Delta {}^tL E_{ij} + \Delta {}^{NL} E_{ij} \quad (1-24)$$

其中:

$$\Delta {}^tL E_{ij} = \frac{1}{2}(\Delta {}^tu_{i,j} + \Delta {}^tu_{j,i}), \Delta {}^{NL} E_{ij} = \frac{1}{2}\Delta {}^tu_{i,j}\Delta {}^tu_{j,i} \quad (1-25)$$

增量型本构关系为:

$$\Delta {}^{t+\Delta t}S_{ij} = {}^tD_{ijkl}\Delta {}^{t+\Delta t}E_{ij} \quad (1-26)$$

将式 (1-23) ~ 式 (1-25) 代入式 (1-26) 并引入形函数可得平衡方程的矩阵表达形式为:

$$({}^tK_L + {}^tK_{NL})\Delta u = {}^{t+\Delta t}Q - {}^tF \quad (1-27)$$

其中:

$${}^tK_L = \int_{V'} {}^tB_L^T {}^tD {}^tB_L dV \quad (1-28)$$

$${}^tK_{NL} = \int_{V'} {}^tB_{NL}^T {}^t\sigma {}^tB_{NL} dV \quad (1-29)$$

$${}^tF = \int_{V'} {}^tB_L^T {}^t\bar{\sigma} dV \quad (1-30)$$

以上各式中, ${}^tB_L^T$ 和 ${}^tB_{NL}^T$ 分别是线性应变和非线性应变与位移的转换矩阵; tD 是材料的本构矩阵; ${}^t\sigma$ 和 ${}^t\bar{\sigma}$ 是 Cauchy 应力矩阵和向量; ${}^{t+\Delta t}Q$ 是外部载荷向量。为了简单起见, 以上只列出了一个单元的方程, 严格说上述方程对于所有单元的整体才成立。

(2) 根据动力分析方法建立几何非线性有限元方程 根据静力分析方法建立的几何非线性有限元方程适于静力问题和准静力问题, 有其广泛的应用领域。对于加载速度缓慢、速度变化小、可以不考虑惯性力的准静力成形过程, 采用静力分析非常有效。但如果载荷是迅速加上的, 必须考虑惯性力, 这类成形过程则为动力问题, 必须进行动力分析。此时, 因采用包括惯性力的运动方程 (也可称为动力平衡方程), 由虚功原理建立的有限元方程应包含惯性力和阻尼力功率项, 以反映物体系统的惯性效应和物理阻尼效应。因此, 类似于静力分析方法所建立的非线性有限元方程, 根据动力分析方法进行非线性有限元方程的建立时, 则弹塑性问题的动力虚功率方程为:

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \dot{e}_{ij} dV = \int_V b_i \delta \dot{v}_i dV + \int_{S_p} p_i \delta \dot{v}_i dS + \int_{S_c} q_i \delta \dot{v}_i dS - \int_V \rho a_i \delta \dot{v}_i dV - \int_V \gamma \gamma_i \delta \dot{v}_i dV \quad (1-31)$$

根据式 (1-31), 把整个物体离散为若干个有限单元, 对于任一个单元 e 由虚功率方程建立有限元方程, 所有单元方程的集合即可形成整个有限元方程。

对于任一单元 e , 选取其形函数矩阵为 $[N]$, 单元内任一点的位移、速度和加速度向量分别记为 $\{u\}$ 、 $\{v\}$ 和 $\{a\}$, 单元内任一点的位移、速度和加速度向量分别记为 $\{u\}^e$ 、 $\{v\}^e$ 和 $\{a\}^e$, 对三维问题有:

$$\begin{cases} |u| = [u_1 & u_2 & u_3]^T \\ |v| = [v_1 & v_2 & v_3]^T \\ |a| = [a_1 & a_2 & a_3]^T \end{cases} \quad (1-32)$$

$$\{u\} = [N]\{u\}^e, \{v\} = [N]\{v\}^e, \{a\} = [N]\{a\}^e \quad (1-33)$$

$$\{b\} = [b_1 \quad b_2 \quad b_3]^T \quad (1-34)$$