优化与决策

最优路问题

——极优代数方法

秦裕瑗 著

上海科学技术出版社

优 化 与 决 策

最优路问题

——极优代数方法

秦裕瑗 著

上海科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

最优路问题:极优代数方法/秦裕瑗著. —上海: 上海科学技术出版社,2009.9

(优化与决策)

ISBN 978—7—5323—9880—5

Ⅰ.最... Ⅱ.秦... Ⅲ.最优化算法 Ⅳ.O242.23

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 107719 号

上海世纪出版股份有限公司
上 海 科 学 技 术 出 版 社 出版、发行

(上海钦州南路 71 号 邮政编码 200235)

新华书店上海发行所经销

苏州望电印刷有限公司印刷

开本 889×1194 1/32 印张 3.875

字数:80 千字

2009 年 9 月第 1 版 2009 年 9 月第 1 次印刷

印数:1—3 250

ISBN 978—7—5323—9880—5/O·297

定价:15.00 元

序

“人尽其能，物尽其用”，是人类进步的重要标志和社会发展的根本动力。

在现代社会中，小至个人事务的处理，大到国家政策的制定，无不需要人们进行关于“人”和“物”的选优抉择，以求取好的结果。在科技日新月异和经济快速发展的21世纪，人们要日益面临各种愈来愈复杂的决策问题，因此，现代优化思想和科学决策知识，已是当今人们普遍需要具备的基本素养。

现代教育提倡对学生进行创新精神和综合能力的素质培养。在我国大中学教育中，让学生们了解某些现代优化方法和进行决策能力培养，也正是素质教育的重要内容。

为了向广大读者普及最优化和科学决策的思想和方法，在中国运筹学会及其决策科学分会、数学规划分会和排序分会，中国系统工程学会，中国数学会计算数学分会以及上海运筹学会的倡议和支持下，我们邀请了在相应领域卓有成就的有关专家，撰写了这套《优化与决策》系列丛书。

这套丛书具有以下特点：

选题实用求新 本丛书的重要特色是内容的实用性。各选题在扩大知识的同时，均注重联系实际结合应用展开讨论。不论是定量或定性的决策问题，进行选优建模和效益分析一般要归为用数量刻画和作数值计算，因此，数学是这套丛书各选题的基本工具。但是，与以往作为中学数学教科书内容补充的科普性数学读

物或抽象的数学专著不同，本丛书强调综合运用数学和有关知识去解决现实中的应用问题。另外，从书的选题既考虑其内容是具代表性的，同时也注意对新领域和某些发展中问题的介绍。

表述浅出深入 本丛书着力于用通俗易懂的方式引导读者掌握现代优化和决策知识。书中特配置了形象的图画以帮助加深读者对内容的理解。我们计划，具有高中数学基础的读者，即可读懂其中的基本内容。但是，为了每一选题的系统性和完整性，也不放弃对一些最基本和著名理论结果的介绍。因此，主要想了解思想方法和借鉴应用手段的读者，阅读时可以略去其中某些理论和证明部分，而不会影响对主要内容的理解。然而，对于具相当数学素养并对理论结果同样有兴趣者，这些较深入的内容对他们是有价值的，其中有些结果即使对于同行学者也将具有重要的参考意义。因此，不同层次的读者，阅读本丛书后均会有所得益。

这套丛书的读者面是多层次和极广泛的，它既适用于各行业管理者，各级行政公务员，广大科技工作者，以及各专业大学生、研究生和教师们阅读，同时也可作为大专和高中学生的选读材料或课外读物。

写作这套既具科普性又基于一定理论分析的现代应用丛书，对于丛书作者是一种新的尝试。本丛书从酝酿组织、确定选题，直至现在与读者见面，曾经历了较长的时间。许国志院士和俞文鮆

教授生前曾积极参与出版本丛书的策划，并热情承担了写作任务，可惜未及如愿。值得一提的是，各位作者对分担撰写选题的内容都进行了精心选择和安排。特别是，许多作者专业造诣精深，但写作科普著作则是第一次，因此在可读性方面曾倾注了许多心血。对于他们的这种认真和奉献精神，谨致以衷心感谢和崇高的敬意！鉴于著述这套丛书对多数作者是一件新的工作，其中难免或有不足之处，期待读者们不吝指正。

最后，我们对吴文俊院士和谷超豪院士关心和支持本丛书的出版，并乐于担任名誉主编致以诚挚的谢忱！同时，感谢上海科学技术出版社对出版这套丛书所作的一系列努力。

胡毓达

2006 年 9 月 19 日

前　言

路是人们生活中最为熟悉的对象之一。确定从一个城市到另一个城市的旅行方案使其旅程最短，是人们生活中反复实践的一个问题。

把它提炼成一个数学问题，即有向图的最优路问题，是20世纪40、50年代的事，至今已成为组合最优化中基本问题之一。它和离散型的动态规划有着密切关系。

一个题目如果有多个解决方案，又能把每个方案转化为路，我们就有可能通过求解最优路的办法找出最好的方案。可以设想，最优路问题具有十分广泛的应用。

书中讲了近十个应用问题。它们是多种具体内容的资源分配问题、流水作业问题、设备更新问题、无缺货多阶段库存问题、生产进度控制问题和装配线平衡问题，还讲了矩阵连乘式关于实数间乘法的最小运算量问题。这些都是动态规划的应用问题，而且除了关于矩阵连乘积外，全都是微观经济学的优化与决策题目。

经济学家邹至庄在《动态经济系统的分析与控制》一书中反复强调："动态规划对微观经济学的应用多到足以形成另外一本书"，"这种应用是无限的"。

劳勒(E. L. Lawler)在《组合最优化：网络和拟阵》(*Combinatorial Optimization*：*Networks and Matroids*，1976)中第60页说过："下面的论断并非不准确：在决定性和组合性范围内，动态规

划，从根本上说，就是在这样或那样结构的网络中计算最短路。”

与传统的动态规划相比较，由于极优代数方法的引入，十分强调有向图的作用，求解的思路和过程有明显的不同。

极优代数是一个十分年轻、应用十分广泛的数学分支。1984年陈文德[1]提出了准域概念，本书作者[4, 5, 10]也作了一些工作。法国国家信息与自动化研究院(INRIA)有一些学者合用一个笔名M. Plus(即Max Plus)发表了一系列关于这方面的文章，并于1990年宣布，作为一个应用数学的分支，极大代数正式诞生。它平行地建立了极小代数，我们把它们以及另外一些相似系统一并称为极优代数。

文献[8]自称，该书是第一本专门论述极大代数的大学选修课教材。书中介绍了作者利用极大代数在荷兰全国铁路系统成功制定列车时刻表的方法。这可能是极大代数的规模最大的实际应用案例。作者在书中这样说：

“当我自告奋勇地去荷兰铁道公司董事会，向他们说明用极大代数方法编制列车时刻表的优点时，我受到非常友好的接待。他们邀我讲解时，我讲得简单明了，甚至几乎没有用一个公式。凭着我的经验，向不同人群介绍其他数学原理时，给人的印象是：数学家都是文雅人士，是一批不会有危险，不会闹事，有时还很风趣的人群。此后，毫不令人惊讶，什么事情也没有发生。没有再表示出任何积极兴趣。当我使我们所在大学土木工程系的同事发生了兴趣，情况改变了。从那时起，他们成为催化剂。现在，我们和铁道公司建立起了一种富有成果的合作关系。”

理论联系实际不只是口号，它是一个艰苦工作的过程。数学

家为了推广应用，必须把相关知识和方法讲解得更加容易理解，更加便于应用，更深入到实际生产中去。

本书部分内容曾经在讨论班中讨论过，让少数大学生试读过，在多次科普演讲中向大学生和教师们介绍过，张鹏博士仔细阅读了全本书稿。作者衷心感谢武汉科技大学管理学院的支持，感谢所有给予帮助的教授、工程师和学生们提出的宝贵意见。还感谢沈世德教授、陈和平教授、袁德保高级工程师、周一中工程师和吴晓琴博士等。

一位令人尊敬的徐老师曾经对我讲过："一门学科有它研究的问题、意义和发展前景，有它自己的基本概念、理论和方法。它们的来龙去脉往往通过科普读物的形式可以讲得更加生动活泼，引人入胜。许多人从读物中真正弄懂很多东西，进而喜爱相关学科，甚至获得立志为之奋斗终生的助动力。我就是一个受益者。"这也许只是一家之言，却引导本书作者四十年来不时主动抽暇选读，聆听各种科普演讲，从中寻求启发，受益甚多。现在通读本书清样，念及于斯，心情惶恐。

作者个人数学知识十分有限，相关专业的生产知识更是贫乏，书中的缺点错误之处一定很多，恳请读者指正。

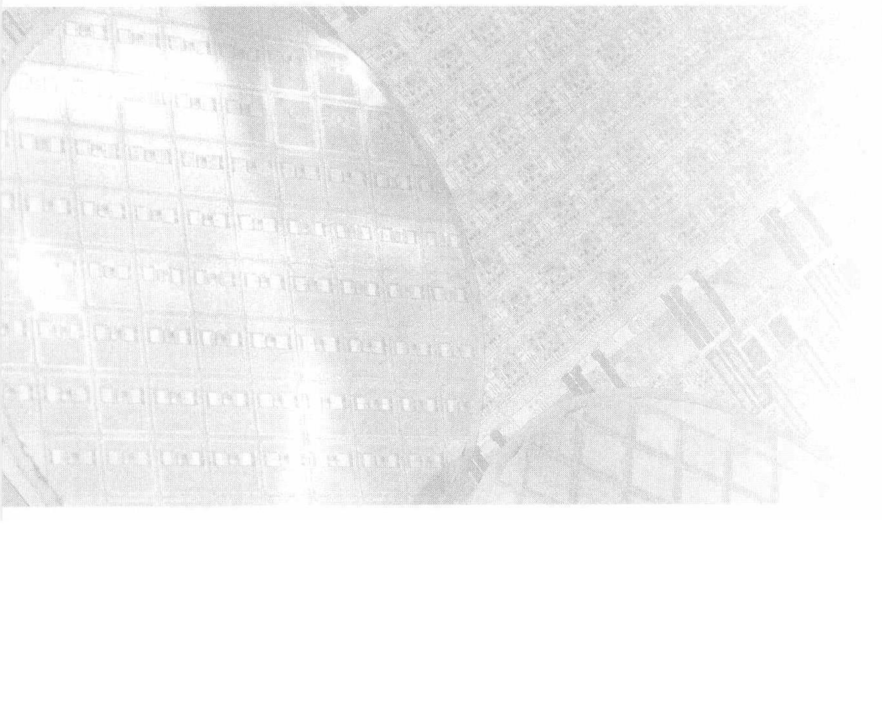
作　者

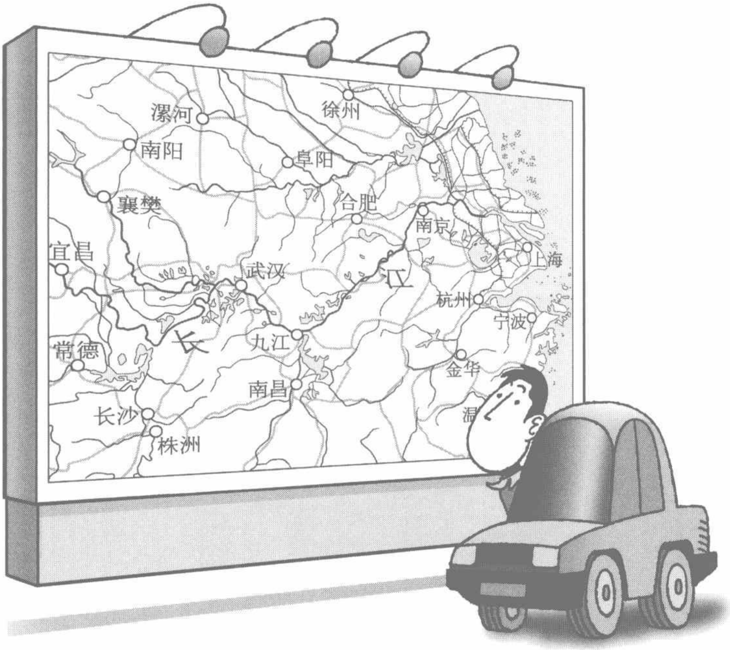
2009 年 7 月于武汉科技大学

目　录

确定最短路线

1





从一个城市旅行到另一个城市，是生活中经常遇到的事情。从出发地到目的地通常还需经过其他一些城镇，要分别经过哪些地方才能使得总里程最短？把它提炼成一个数学问题，就是赋权多阶段有向图的最优路问题。在符合这样条件的图中，最短路的任意一段也是最短的。根据这一原理，本节给出了确定最短路线的简单方法。

1.1 问题提出

某人驾驶汽车从一个城市到另一个城市，可能有多条旅行线路。问应该经过哪几个城镇，使得旅程最短呢？

凡是驾车出行，都要考虑这个事情。人们往往只是根据个人的知识和经验行事，叫做经验决策。并没有多少驾车人意识到这里有一个科学决策问题，更没有意识到将和本书要讲的极优代数方法有着密切关系。常言道，“实践出真知”，可能更准确的说法是，“实践中的有心人出真知”。

如何把它变成一个数学问题呢？譬如一位王先生因公要从武汉去上海。首先不会想到先驾车去哈尔滨或者广州，再去上海；其次，他并不需要考虑两个城市间的所有城镇。他所考量的只是在一定范围内的若干个需要作决策的城镇。

先把图 1.1 中有关的对象做一番正名的工作。

图中有若干个顶点，名字分别是 A, B_1, C_2，等等。从 A 到 B_2，有一条有向边 AB_2，它的旁边还写有一个数 7，叫做这条边的权（重），可以设想是这条边的长度。

在图中，顶点集 $\{A\}$ 叫做图的初态集或者状态集 0，顶点集 $\{B_1, B_2, B_3\}$ 叫做状态集 1。同样有状态集 2，它是 $\{C_1, C_2\}$；状态

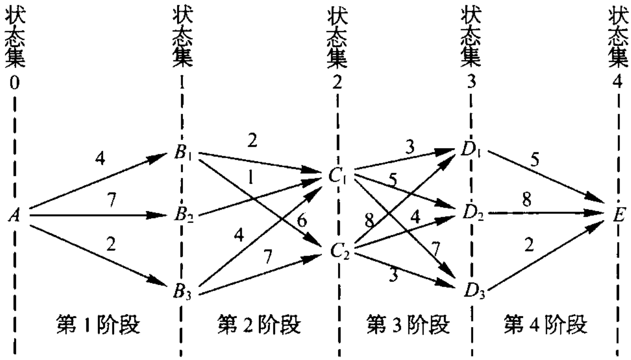


图 1.1　赋权 4 阶段有向图

本图为王先生旅行路线的简化图,称为G,每条有向边表示从一个地点到另一个地点的行程。王先生需要寻求的是从点A到点E的一条最短路,中间要经过几个城镇。也称作寻求图G的最短路。

集 3,它是$\{D_1, D_2, D_3\}$。至于顶点集$\{E\}$,是状态集 4,也是图的终态集。

把图的初态集即状态集 0、状态集 1、它们之间的三条有向边以及诸边的权所组成的(子)图叫做图G的第 1 阶段。同样,把状态集 1、状态集 2 以及它们之间的有向边和权所组成的(子)图叫做第 2 阶段,等等。状态集 1 是第 1 阶段的末态集,又是第 2 阶段的始态集。同样,状态集 2 是第 2 阶段的末态集,也是第 3 阶段的始态集,等等。

图G叫做**赋权多(4)阶段有向图**。顶点A叫做图的初始顶点,E叫做图的终点。

读者可以画出各种各样的赋权多阶段有向图。

如果每条有向边表示从一个地点到另一个地点的旅行过程,如果它的权是所经历的时间。图 1.1 成了一张旅行图。

当然如果城市A是武汉,E是上海,那些边的长度实在太胡编乱写,太脱离实际了。不过我们宁愿举这样的数字例。因为,为了讨论问题的实质,这样更方便。当学会求解这个例子了,题目改用

实际的里程数，除了计算繁琐一些，无需学习新的实质性的东西。又何必在学习之初用繁琐的数字干扰讨论的思路呢？

如果是旅行图，立刻就可以想象，一条路 $AB_2C_1D_2E$ 表示一个旅行方案，这条路上诸边长度之和等于 21，是这个方案的旅程数。图中有许多旅行方案，哪一条旅程最短呢？

1.2 逆序法求解最短路

人们解四则应用题时，建立起来的那些方程或方程组往往是根据题目的必要条件得到的。在学习一元函数微分学时，同样利用必要条件得到寻求闭区间上函数的最小点和最小值的方法。

从理论上发现所论问题的性质定理，常常是发现求解方法的基本途径之一。

那么，最短路有什么性质呢？

首先，有一个非常平凡的、甚至会被人认为是无聊的性质。

第 1 必要条件 从初始顶点到终点的最短路是一条路。

于是，从它得到一个求解题目的算法，叫做全枚举法。步骤如下。

(1) 逐一列出所有从初始顶点到终点的路，

(2) 计算它们的长度，

(3) 比较长度的大小，

(4) 得到题目的答案。

答案包括两个部分，一是最短路的长度，二是所求的最短路。

用全枚举法求解图 1.1 的从 A 到 E 的最短路是简单的。

从 A 到 E 的每条路必须经过 C_1 或者 C_2。从 A 到 C_1 有 3 条路，而从 C_1 到 E 也有 3 条路，所以从 A 经过 C_1 到达 E 一共有 9 条路。又从 A 到 C_2 有 2 条路，而从 C_2 到 E 有 3 条路，所以从 A 经过 C_2 到达 E 一共有 6 条路。从 A 到 E 一共有 15 条路。

每条路作为一个方案，或者说是一个可行解。计算路上四个权的和得到路的长度。诸长度的最小值是14。这就是最短路（即最优解）的长度。譬如说，$AB_3C_1D_1E$就是一条最短路。

像这种规模不大的数字题，就是说，不多几个顶点、有向边以及阶段的图，所有从初始顶点到终点的路为数也不多，用全枚举法，在纸上笔算总能得到最优解。但是人们总是以规模巨大的图为对象，来研究最短路问题的理论和算法。这时，全枚举法成了言之有理，行之不仅乏味，而且效率很低的办法。

人们总是把全枚举法排除在有效方法之外。尽管它对规模微小的情形，确实是一个可用的办法。

要得到有效的方法，就需要努力发现别的必要条件。

刚才已经得到，从A到E有一条最短路$AB_3C_1D_1E$。在它上面，取两个点B_3和D_1，把这条最短路分成好几个节，譬如，其中的一节$B_3C_1D_1$，它不仅是从B_3到D_1的一条路，而且，读者可以检核，它是从B_3到D_1的所有的路中最短的。再选另外一节$B_3C_1D_1E$，它也是一条从B_3到E的最短路，等等。一般来说，有如下条件。

第2必要条件 赋权有向图中，最短路的任意一节也是最短的。

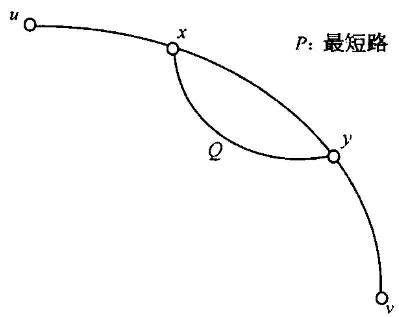


图1.2 最短路的任意一节也最短

如果从顶点u到顶点v是一条最短路，那么这条路上的任意两点x，y间的路也是最短的。